УДК 517.95

О ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

Н. А. Чуешева

В работе исследована разрешимость первой краевой задачи для составного дифференциального уравнения шестого порядка.

В 1933 г. Ж. Адамар обратил внимание на изучение уравнений с частными производными составного типа, то есть таких уравнений, которые в каждой точке рассматриваемой области наряду с комплексными характеристическими направлениями имеют и действительные характеристические направления. Уравнения составного типа имеют большое прикладное значение. Например, в работе С. Л. Соболева [1] была предложена математическая модель малых колебаний вращающейся идеальной жидкости, которая описывается уравнением $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\triangle u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. В работе А. А. Тикиляйнен [2] изучалась начально краевая задача для уравнения подобного типа, которое описывает вращение жидкости с течением. В работе Н. А. Чуешевой [3] найдены условия на коэффициенты при смешанных производных третьего порядка, при выполнении которых имеют место теоремы существования и единственности регулярного решения краевой задачи для уравнения составного типа четвёртого порядка. В данной работе получены аналогичные условия на коэффициенты уравнения составного типа шестого порядка при производных пятого порядка.

Вопросами разрешимости краевых задач для уравнений составного типа занимались многие авторы. Например, А. И. Кожанов [4], И. А. Шишмарёв [5], и другие авторы. Обобщением краевой задачи для уравнения С. Л. Соболева является следующая задача.

В области $Q = \{(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_g) : 0 < x_i < 1,\ 0 < y_j < 1,\ 0 < z_k < 1, i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, g\}$ с границей Γ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \triangle_x\triangle_y\triangle_z u + \sum_{p=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{l,k=1}^{g} a_{pijlk}(x,y,z)u_{x_p y_i y_j z_l z_k} + a(x,y)\triangle_z u + b(x,z)\triangle_y u + c(x,y,z)u = f(x,y,z). \quad (1)$$

Предположим, что коэффициенты оператора L принадлежат пространству $C^5(\overline{Q})$.

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области Q удовлетворяющее краевому условию

$$u|_\Gamma = 0. \quad (2)$$

Через H обозначим пространство, полученное замыканием пространства функ-

ций из $C^5(\overline{Q})$, удовлетворяющих граничному условию (2) по норме

$$\|u\|_H^2 = \|u\|_{W_2^2}^2 + \int_Q \Big(\sum_{p=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{g} u^2_{x_p y_j z_k} + \sum_{p=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{l,k=1}^{g} u^2_{x_p y_i y_j z_l z_k} + \sum_{p,r=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{l,k=1}^{g} u^2_{x_p x_r y_i y_j z_l z_k} \Big) dQ.$$

Теорема 1. *Пусть правая часть уравнения* (1) $f(x,y,z) \in L_2(Q)$ *и для коэффициентов этого уравнения выполнены условия:*

1. $a_{pijlk}(x,y,z) \in C^5(\overline{Q})$ $(p = 1,\ldots,n,\ i,j = 1,\ldots,m,\ l,k = 1,\ldots,g)$, $a(x,y)$, $b(x,z)$, $c(x,y,z) \in C^3(\overline{Q})$;

2. *коэффициенты* $a(x,y) > 0$, $b(x,z) > 0$ *и достаточно большие;*

3. $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{g} \Big(\max\limits_{\overline{Q}} |\sum\limits_{p=1}^{n} a_{pijlkx_p}| + \max\limits_{\overline{Q}} |\sum\limits_{p=1}^{n} a_{pjiklx_p}| \Big) < (1-\varepsilon)4n\pi^2$, $j = 1,\ldots,m$, $k = 1,\ldots,g$, $\varepsilon > 0$ *и достаточно мало;*

4. $a_{pijlk}(x,y,z) = -a_{pjilk}(x,y,z)$ *при* $y_i = 0$, $y_i = 1, i \neq j$; $a_{pijlk}(x,y,z) = -a_{pijkl}(x,y,z)$ *при* $z_l = 0$, $z_l = 1$, $l \neq k$ $(p = 1,\ldots,n,\ i,j = 1,\ldots,m,\ l,k = 1,\ldots,g)$.

Тогда решение краевой задачи (2) *для уравнения* (1) *существует и единственно в пространстве* H.

Доказательство. Интегрированием по частям с использованием граничных условий и мультипликативных неравенств в скалярных произведениях (Lu,u), $(Lu,\triangle_x u)$, $(Lu,\triangle_y u)$, $(Lu,\triangle_z u)$, $(Lu,\triangle_y\triangle_z u)$, $(Lu,\triangle_x\triangle_y\triangle_z u)$, получим априорную оценку для нормы $\|u\|_H$, из которой следует единственность решения поставленной задачи. Методом Фаэдо – Галёркина доказывается существование краевой задачи (2) для уравнения

$$L_0 u \equiv \triangle_x\triangle_y\triangle_z u + a(x,y)\triangle_z u + b(x,z)\triangle_y u = f(x,y,z). \qquad (1')$$

Приближённое решение задачи $(1')$, (2) ищем в виде

$$u_p(x,y,z) = \sum_{j=1}^{p} g_{jp}(y,z)\omega_j(x),$$

где $\{\omega_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированная система собственых функций оператора Лапласа $\triangle_x$. Существование решения задачи (1), (2) доказывается методом продолжения по параметру. Для этого рассматривается семейство дифференциальных уравнений

$$L_\tau u_\tau \equiv (1-\tau)L_0 u_\tau + L u_\tau = f(x,y,z), \quad \tau \in [0,1]$$

с краевым условием $u_\tau|_\Gamma = 0$.

Теорема доказана.

Если коэффициенты уравнения (1) $a(x,y) = b(x,z) = 0$, то верна теорема

Теорема 2. *Пусть правая часть уравнения* (1) $f(x,y,z) \in L_2(Q)$ *и для коэффициентов этого уравнения выполнены условия:*

1. $a_{pijlk}(x,y,z) \in C^5(\overline{Q})$ $(p = 1,\ldots,n,\ i,j = 1,\ldots,m,\ l,k = 1,\ldots,g)$, $c(x,y,z) \in C^3(\overline{Q})$;

2. *коэффициент* $-c(x,y,z) > 0$ *и достаточно большой;*

3. $a_{pijlkz_k}(x,y,z) = -a_{pjilkz_k}(x,y,z)$, $a_{pijlky_j}(x,y,z) = -a_{pijkly_j}(x,y,z)$ $(p = 1,\ldots,n,\ i,j = 1,\ldots,m,\ l,k = 1,\ldots,g)$;

4. $a_{pijlk}(x,y,z) = -a_{pjilk}(x,y,z)$ *при* $y_i = 0$, $y_i = 1$, $i \neq j$; $a_{pijlk}(x,y,z) = -a_{pijkl}(x,y,z)$ *при* $z_l = 0$, $z_l = 1$, $l \neq k$; $(p = 1,\ldots,n,\ i,j = 1,\ldots,m,\ l,k = 1,\ldots,g)$;

5. $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{g}\Big(\max\limits_{\overline{Q}}|\sum\limits_{p=1}^{n} a_{pijlkx_p}| + \max\limits_{\overline{Q}}|\sum\limits_{p=1}^{n} a_{pjiklx_p}|\Big) < (1-\varepsilon)4n\pi^2$, $j = 1,\ldots,m$, $k = 1,\ldots,g$, $\varepsilon > 0$ *и достаточно мало.*

Тогда решение краевой задачи (2) *для уравнения* (1) *существует и единственно в пространстве H.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954, Т. 18. С. 3–50.
2. *Тикиляйнен А. А.* О гидроскопических волнах в средах с переменными по времени течением и вращением // Ж. вычисл. мат. и мат. физики. 1990. Т. 30, № 2. С. 270–277.
3. *Чуешева Н. А.* Задача Дирихле для одного уравнения составного типа // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск, 1984. С. 154–160.
4. *Кожанов А. И.* Начально краевая задача для уравнения типа обобщённого уравнения Буссинеска с нелинейным источником // Мат. заметки. 1999. Т. 65, вып. 1. С. 70–75.
5. *Шишмарёв И. А.* Об одном нелинейном уравнении типа Соболева // Диффер. уравн. 2005. Т. 41, № 1. С. 138–140.

Чуешева Надежда Александровна
Россия, Кемерово, Кемеровский государственный университет
chueshev@lanserv1.kemsu.ru