УДК 517.956, 517.968.2, 517.984

СПЕКТРАЛЬНО-НАГРУЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

М. М. Амангалиева, М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов

Показано, что граничная задача для спектрально-нагруженного (одномерного по пространственной переменной) уравнения теплопроводности в четверти плоскости является нетеровой. Особенностью рассматриваемого уравнения является то, что спектральный параметр служит коэффициентом при нагруженном слагаемом, и порядок производной в нагруженном слагаемом равен порядку дифференциальной части уравнения.

В работе рассматриваются граничные и спектральные задачи для нагруженного (одномерного по пространственной переменной) оператора теплопроводности в четверти плоскости. Особенностью рассматриваемого уравнения является то, что, во-первых, спектральный параметр λ служит коэффициентом при нагруженном слагаемом и, во-вторых, порядок производной в нагруженном слагаемом равен порядку дифференциальной части уравнения. В этом случае, в отличие от ранее изученных нагруженных дифференциальных уравнений [1–4], нагруженное слагаемое в уравнении не является слабым возмущением его дифференциальной части [5, 6]. Здесь проявляются новые свойства нагруженного дифференциального оператора, не присущие операторам со слабым возмущением. Показано, что рассматриваемая в работе граничная задача является нетеровой, и для некоторых, строго описанных в комплексной плоскости, значений спектрального параметра λ она имеет конечный неотрицательный индекс $\varkappa(\lambda)$.

1. Постановка задач

Пусть $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$, $\mathbb{R}_- = (-\infty,0)$, $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$. Рассмотрим в области $Q = \{x \in \mathbb{R}_+,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ следующие граничные задачи

$$L_\lambda u = f \Longleftrightarrow \begin{cases} u_t - u_{xx} + \lambda u_{xx}(x,t)_{|x=t} = f, \\ u(x,0) = 0, \;\; u(0,t) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$L_\lambda^* v = g \Longleftrightarrow \begin{cases} -v_t - v_{xx} + \lambda \cdot \delta''(x-t) \otimes \int\limits_0^\infty v(\xi,t)d\xi = g, \\ v(x,\infty) = 0, \;\; v(0,t) = v(\infty,t) = v_x(\infty,t) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

и спектральные задачи

$$L_1 u = -\lambda u_{xx}(x,t)_{|x=t} \Longleftrightarrow \begin{cases} u_t - u_{xx} = -\lambda u_{xx}(x,t)_{|x=t}, \\ u(x,0) = 0, \;\; u(0,t) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

$$L_1^* v = -\lambda \cdot \delta''(x-t) \otimes \int_0^\infty v(\xi,t)d\xi \Longleftrightarrow \begin{cases} -v_t - v_{xx} = -\lambda \cdot \delta''(x-t) \otimes \int\limits_0^\infty v(\xi,t)d\xi, \\ v(x,\infty) = 0, \ \ v(0,t) = v(\infty,t) = v_x(\infty,t) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered} \lambda \in \mathbb{C} - \text{ спектральный параметр, } \sqrt{t}\, f \in M(Q), \ (x+\sqrt{t})\, g \in L_1(Q), \\ \sqrt{t} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau \right)_{|x=t} \in M(\mathbb{R}_+), - \text{ заданные функции,} \end{gathered} \tag{5}$$

$M(Q) = L_\infty(Q) \cap C(Q)$, $M(\mathbb{R}_+) = L_\infty(\mathbb{R}_+) \cap C(\mathbb{R}_+)$, $\delta(x-t) \in \mathscr{E}'(Q)$ — дельта-функция, сосредоточенная на открытой диагонали $x = t$ области Q, $\operatorname{erf}(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a \exp(-z^2)dz$, функция Грина $G(x,\xi,t-\tau)$ определена формулой

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t} \right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4t} \right) \right\}.$$

Определим функциональные классы $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ для решений соответственно граничных задач (1) и (2), а также области определения операторов L и L^* $\mathscr{D}(L)$ и $\mathscr{D}(L^*)$ соответственно следующим образом

$$\mathscr{U} = \left\{ u |\, (x+\sqrt{t})^{-1} u, \ \sqrt{t}(u_t - u_{xx}) \in M(Q), \ \ \sqrt{t}\, u_{xx}(x,t)_{|x=t} \in M(\mathbb{R}_+) \right\}, \tag{6}$$

$$\mathscr{V} = \left\{ v |\, t^{-1/2} v, \ (x+\sqrt{t})(v_t + v_{xx}) \in L_1(Q), \ \ t^{-1/2} \int\limits_0^\infty v(\xi,t)d\xi \in L_1(\mathbb{R}_+) \right\}, \tag{7}$$

$$\mathscr{D}(L_\lambda) \equiv \mathscr{D}(L_1) = \{ u |\, u \in \mathscr{U}, \ u(x,0) = 0, \ u(0,t) = 0 \}, \tag{8}$$

$$\mathscr{D}(L_\lambda^*) \equiv \mathscr{D}(L_1^*) = \{ v |\, v \in \mathscr{V}, \ v(x,\infty) = 0, \ v(0,t) = 0, \ v(\infty,t) = 0, \ v_x(\infty,t) = 0 \}. \tag{9}$$

Граничная задача (1) является сопряженной к задаче (2). Действительно, согласно (1), (2) и (6)–(9) имеем

$$< Lu, v > = < u, L^* v > \quad \forall u \in \mathscr{D}(L), \ \ \forall v \in \mathscr{D}(L^*).$$

Задача 1. Требуется исследовать вопросы разрешимости граничных задач (1) и (2) при условиях (5)–(9).

Задача 2. Требуется исследовать спектральные задачи (3) и (4) по определению пар $\{\lambda, \, u_\lambda(x,t)\}$ и $\{\lambda, \, v_\lambda(x,t)\}$ при условиях (6)–(9).

2. Получение сопряженного уравнения в (2)

Прежде всего, покажем, что

$$\int\limits_0^\infty \delta''(x-y) u(y,t) dy = u_{xx}(x,t) \quad \text{в } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^1_+) \ \ \forall t \in (0,+\infty). \tag{10}$$

Во-первых, в силу соотношения

$$\int\limits_0^\infty \Big[\int\limits_0^\infty \delta(x-y)u(y,t)dy\Big]\varphi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^\infty \Big[\int\limits_0^\infty \delta(z)u(y,t)\varphi(y+z)dy\Big]dz$$

$$= \int\limits_0^\infty \Big[\int\limits_{-\infty}^\infty \delta(z)\varphi(y+z)dz\Big]u(y,t)dz = \int\limits_0^\infty u(y,t)\varphi(y)dy \quad \forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^1_+)$$

имеем

$$\int\limits_0^\infty \delta(x-y)u(y,t)dy = u(x,t) \text{ в } \mathscr{D}'(\mathbb{R}^1_+) \quad \forall t\in(0,\infty). \tag{11}$$

Далее, продифференцируем равенство (11) по x дважды. В результате получим

$$\int\limits_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\int\limits_0^\infty \delta(x-y)u(y,t)dy\right]\varphi(x)dx = \int\limits_0^\infty \left[\int\limits_0^\infty \delta(x-y)u(y,t)dy\right]\varphi''(x)dx$$

$$= \int\limits_{-\infty}^\infty \left[\int\limits_0^\infty \delta(z)u(y,t)\varphi''(y+z)dy\right]dz \equiv I(\varphi) \quad \forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^1_+).$$

Так как здесь $\varphi''_{yy}(y+z)=\varphi''_{zz}(y+z)$, то отсюда следует

$$I(\varphi) = \int\limits_0^\infty u(y,t)\varphi''_{yy}(y)dy = \int\limits_0^\infty u_{yy}(y,t)\varphi(y)dy \quad \forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^1_+), \tag{12}$$

$$I(\varphi) = \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty \delta''(z)u(y,t)\varphi(y+z)dzdy$$

$$= \int\limits_0^\infty \left[\int\limits_0^\infty \delta''(x-y)u(y,t)dy\right]\varphi(x)dx \quad \forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^1_+). \tag{13}$$

Из (12) и (13) получаем справедливость равенства (10).

Согласно соотношению (10) и введенным обозначениям получим

$$\int\limits_0^\infty \delta''(t-y)u(y,t)dy \equiv \left(\int\limits_0^\infty \delta''(x-y)u(y,t)dy\right)\Big|_{x=t} = u_{yy}(y,t)_{|y=t} \equiv u_{xx}(t,t).$$

Тогда исходное уравнение в (1) можно записать в виде

$$u_t - u_{xx} + \lambda\left(\int\limits_0^\infty \delta''(\eta-y)u(y,t)dy\right)\Big|_{\eta=t} = f.$$

Далее, с учетом равенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2_+} \Big[\int\limits_0^\infty \delta''(t-y)u(y,t)d\xi\Big]v(x,t)dxdt = \int\limits_{\mathbb{R}^2_+} u(x,t)\Big[\delta''(t-x)\otimes\int\limits_0^\infty v(y,t)dy\Big]dxdt$$

получим сопряженное уравнение из (2)

$$-v_t - v_{xx} + \lambda\delta^{''}(t-x) \otimes \int\limits_0^\infty v(\xi,t)d\xi = g.$$

3. Сведение к интегральным уравнениям

Обращая дифференциальную часть в граничной задаче (1), будем иметь

$$u(x,t) = -\lambda\int\limits_0^t \mathscr{K}_0(x,t-\tau)u_{\eta\eta}(\eta,\tau)_{|\eta=\tau}d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \quad (14)$$

где

$$\mathscr{K}_0(x,t-\tau) = \int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)d\xi = \operatorname{erf}\Big(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\Big).$$

Теперь, дифференцируя (14) по x дважды и вводя обозначения

$$\mu(t) = \sqrt{t}\cdot u_{xx}(x,t)|_{x=t},$$

$$\mathscr{K}_2(t,\tau) = -\sqrt{\frac{t}{\tau}}\cdot\frac{\partial^2\mathscr{K}_0(x,t-\tau)}{\partial x^2}\Big|_{x=t} = \frac{t^{3/2}}{2\sqrt{\pi\tau}(t-\tau)^{3/2}}\exp\Big(-\frac{t^2}{4(t-\tau)}\Big),$$

$$f_1(t) = \sqrt{t}\cdot\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau\Big)\Big|_{x=t},$$

получим из (14) интегральное уравнение

$$\mathbf{K}_{2\lambda}\mu \equiv (I-\lambda\mathbf{K}_2)\mu \equiv \mu(t) - \lambda\int\limits_0^t \mathscr{K}_2(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = f_1(t), \quad t\in\mathbb{R}_+. \quad (15)$$

Заметим, что ядро $\mathscr{K}_2(t,\tau)$ обладает следующими свойствами:

1^0. ядро $\mathscr{K}_2(t,\tau)$, $0<\tau<t<\infty$, непрерывно;
2^0. ядро $\mathscr{K}_2(t,\tau)\geq 0$, $0<\tau<t<\infty$;
3^0. для каждого $t_0\geq\varepsilon>0$ $\lim\limits_{t\to+t_0}\int_{t_0}^t\mathscr{K}_2(t,\tau)d\tau = 0$;
4^0. имеет место предельное соотношение

$$\lim_{t\to+0}\int\limits_0^t \mathscr{K}_2(t,\tau)d\tau = \lim_{t\to+0}\exp(-t/4) = 1. \quad (16)$$

Из предельного соотношения (16) следует, что норма интегрального оператора, действующего в пространстве ограниченных и непрерывных функций и определяемого ядром $\mathscr{K}_2(t,\tau)$, равна единице (хотя ядро $\mathscr{K}_2(t,\tau)$ имеет интегрируемую особенность). Это принципиальным образом отличает уравнение (15) от уравнений Вольтерра второго рода, для которых, как известно, решение существует и единственно. В нашем случае соответствующее однородное уравнение

$$\mathbf{K}_{2\lambda}\mu \equiv (I-\lambda\mathbf{K}_2)\mu \equiv \mu(t) - \lambda\int\limits_0^t \mathscr{K}_2(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = 0, \quad t\in\mathbb{R}_+,$$

для некоторых значений $\lambda \in \mathbb{C}$ может иметь наряду с тривиальным и нетривиальное решение.

Теперь, обращая дифференциальную часть в задаче (2) по аналогиии с задачей (1), будем иметь

$$v(x,t) = \int\limits_t^\infty \int\limits_0^\infty G(x,\xi,\tau-t)\Big[-\lambda\,\delta''(\xi-\tau)\otimes\int\limits_0^\infty v(\eta,\tau)d\eta + g(\xi,\tau)\Big]d\xi d\tau. \qquad (17)$$

Интегрируя соотношение (17) по переменной x от 0 до ∞ и обозначая

$$\nu(t) = (t)^{-1/2}\int\limits_0^\infty v(\eta,t)d\eta,$$

получим интегральное уравнение

$$\mathbf{K}^*_{2\lambda}\nu \equiv (I-\lambda\mathbf{K}^*_2)\nu \equiv \nu(t) - \lambda\int\limits_t^\infty \mathscr{K}_2(\tau,t)\nu(\tau)d\tau = g_1(t), \quad t\in\mathbb{R}_+, \qquad (18)$$

где

$$\mathscr{K}_2(\tau,t) = -\sqrt{\frac{\tau}{t}}\cdot\int\limits_0^\infty \delta''(\xi-\tau)\otimes\operatorname{erf}\Big(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau-t}}\Big)d\xi = \frac{\tau^{3/2}}{2\sqrt{\pi}t(\tau-t)^{3/2}}\exp\Big(-\frac{\tau^2}{4(\tau-t)}\Big),$$

$$g_1(t) = (t)^{-1/2}\cdot\int\limits_t^\infty\int\limits_0^\infty \operatorname{erf}\Big(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau-t}}\Big)g(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Очевидно, что уравнение (18) является союзным интегральным уравнением для (15).

Таким образом, решение сопряженных граничных задач (1) и (2) сведено к исследованию пары союзных интегральных уравнений (15) и (18).

Дальнейшее исследование разрешимости граничных задач (1) и (2) проводится по следующей схеме:

1. выделение главной части ядра интегрального оператора из (15) и введение соответствующего этой главной части характеристического интегрального уравнения и его союзного;

2. изучение вопросов разрешимости характеристических интегральных уравнений;

3. исследование разрешимости интегральных уравнений (15) и (18) методом регуляризации решением характеристических интегральных уравнений.

4. исследование разрешимости граничных задач (1) и (2) (задача 1).

5. исследование спектральных задач (3) и (4) (задача 2).

4. Характеристические интегральные уравнения

Характеристическими интегральными уравнениями для (15) и (18) будет следующая пара союзных уравнений

$$\mathbf{K}_\lambda\mu \equiv (I-\lambda\mathbf{K})\mu \equiv \mu(t) - \lambda\int\limits_0^t \mathscr{K}(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = f_1(t), \quad t\in\mathbb{R}_+, \qquad (19)$$

$$\mathbf{K}_\lambda^*\nu \equiv (I-\lambda\mathbf{K}^*)\nu \equiv \nu(t) - \lambda\int\limits_t^\infty \mathscr{K}(\tau,t)\nu(\tau)d\tau = g_1(t), \quad t\in\mathbb{R}_+,$$

где

$$\mathscr{K}(t,\tau) = \frac{t^{3/2}}{2\sqrt{\pi\tau}(t-\tau)^{3/2}}\exp\Big(-\frac{t\tau}{4(t-\tau)}\Big). \tag{20}$$

Отметим, что ядро характеристического уравнения $\mathscr{K}(t,\tau)$ (20) обладает теми же свойствами, что и ядро $\mathscr{K}_2(t,\tau)$, и справедливо аналогичное (16) предельное соотношение

$$\lim_{t\to+0}\int\limits_0^t \mathscr{K}(t,\tau)d\tau = 1, \text{ так как } \mathscr{K}(t,\tau) = \exp(t/4)\cdot\mathscr{K}_2(t,\tau). \tag{21}$$

И в силу справедливости неравенства

$$|\mathscr{K}_2(t,\tau) - \mathscr{K}(t,\tau)| \le \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi\tau(t-\tau)}}\exp\Big(-\frac{t\tau}{8(t-\tau)}\Big), \tag{22}$$

которое показывает, что разность $\mathscr{K}_2(t,\tau) - \mathscr{K}(t,\tau)$ обладает слабой особенностью, и имеет место следующее предельное соотношение

$$\lim_{t\to+0}\int\limits_0^t \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi\tau(t-\tau)}}\exp\Big(-\frac{t\tau}{8(t-\tau)}\Big)d\tau = 0.$$

Таким образом, в силу соотношений (16), (21) и (22) уравнение (19) действительно является характеристическим для уравнения (15).

Справедливость неравенства (22) следует из соотношений

$$\begin{aligned}
\mathscr{K}(t,\tau) - \mathscr{K}_2(t,\tau) &= \frac{t^{3/2}}{2\sqrt{\pi\tau}(t-\tau)^{3/2}}\exp\Big(-\frac{t\tau}{4(t-\tau)}\Big)(1-\exp(-t/4)) \\
&= \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{\pi\tau(t-\tau)}}\exp\Big(-\frac{t\tau}{4(t-\tau)}\Big)(1-\exp(-t/4)) \\
&\quad + \frac{\sqrt{t}\tau}{2\sqrt{\pi\tau}(t-\tau)^{3/2}}\exp\Big(-\frac{t\tau}{4(t-\tau)}\Big)(1-\exp(-t/4)) \\
&\le \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{\pi\tau(t-\tau)}}\exp\Big(-\frac{t\tau}{8(t-\tau)}\Big) + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi\tau(t-\tau)}}\frac{t\tau}{8(t-\tau)}\exp\Big(-\frac{t\tau}{4(t-\tau)}\Big) \\
&\le \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{\pi\tau(t-\tau)}}\exp\Big(-\frac{t\tau}{8(t-\tau)}\Big)(1+2e^{-1}) \le \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi\tau(t-\tau)}}\exp\Big(-\frac{t\tau}{8(t-\tau)}\Big).
\end{aligned}$$

Здесь мы использовали следующие известные неравенства

$$1-\exp(-y)\le y, \quad y\cdot\exp(-y)\le e^{-1} \quad \forall y>0.$$

5. Основные результаты

Исследованием вопросов разрешимости характеристических интегральных уравнений устанавливаются основные результаты работы, для которых мы ограничимся только их формулировкой. Для формулировки основных результатов в

работе получено разбиение комплексной плоскости параметра λ (рис.1 и 2) на непересекающиеся области $D_m,\ m=0,1,2,\ldots$, внешние части границ которых обозначаются соответственно через $\Gamma_m,\ m=0,1,2,\ldots$. В терминах этих областей, а также внутренних частей их границ и целого неотрицательного, строго определяемого в зависимости от спектрального параметра λ числа $\varkappa(\lambda)$ установлены следующие утверждения.

Рис 1. Плоскость спектрального параметра λ (уменьшенный масштаб)

Рис 2. Плоскость спектрального параметра λ (увеличенный масштаб)

Теорема 1. *Если $\lambda \in D_0$, то для $\forall f$ (5) граничная задача (1) имеет единственное решение $u \in \mathscr{U}$ (6). Если $\lambda \in \{\mathbb{C} \setminus D_0\} \cap \{D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \{(-1)^m e^{m\pi}\}\}$, то для $\forall f$ (5) граничная задача (1) имеет общее решение $u \in \mathscr{U}$ (6), состоящее из решения однородного уравнения*

$$u_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{m} c_k u_{\lambda k}(x,t),$$

плюс частного решения $u_{\text{част}}(x,t)$, где $u_{\lambda k}(x,t),\ k=1,\ldots,\varkappa(\lambda)$, — собственные функции, соответствующие собственному значению λ.

Теорема 2. *Если $\lambda \in D_0$, то для $\forall g$ (5) граничная задача (2) имеет единственное решение $v \in \mathscr{V}$ (7). Если $\lambda \in \{\mathbb{C} \setminus D_0\} \cap \{D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \{(-1)^m e^{m\pi}\}\}$, то для однозначной разрешимости граничной задачи (2) в классе $\mathscr{V}$ (7), необходимо*

и достаточно, чтобы функция g (5) удовлетворяла условиям ортогональности

$$\int_0^\infty u_{\lambda k}(x,t)g(x,t)dxdt = 0, \quad k = 1, \ldots, \varkappa(\lambda).$$

Теорема 3. *Открытое множество D_0 является резольвентным для оператора L_1 (3), а его дополнение $\mathbb{C} \setminus D_0$ составляет спектр оператора L_1 (3). Причем если $\lambda \in D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \{(-1)^m e^{m\pi}\}$, $m = 1, 2, \ldots$, то $\dim \mathrm{Ker}\,(L_1) = \varkappa(\lambda)$.*

Теорема 4. *Множество значений $\lambda \in \mathbb{C}$ есть резольвентное множество оператора L_1^* (4).*

В заключение отметим работы [7–12], посвященные нагруженным уравнениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их приложения // Диффер. уравн. 1983. Т. 19, № 1. С. 86—94.

2. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.

3. *Дженалиев М. Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Компьютерный центр ИТПМ, 1995.

4. *Дженалиев М. Т.* О нагруженных уравнениях с периодическими граничными условиями // Диффер. уравн. 2001. Т. 37, № 1. С. 48—54.

5. *Рамазанов М. И.* О краевой задаче для “существенно” нагруженного параболического уравнения в неограниченных областях // Докл. АМАН (Нальчик). 2004. Т. 7, № 1. С. 84–91.

6. *Амангалиева М. М., Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.* О граничных задачах для “существенно” нагруженных параболических уравнений в ограниченных областях // Докл. АМАН (Нальчик). 2004. Т. 7, № 1. С. 18–23.

7. *Кожанов А. И.* Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче // Мат. заметки. 2004. Т. 76, вып. 6. С. 840–853.

8. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях. М.: Наука, 1932.

9. *Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial integral operators and integro-differential equations. New York; Basel: Marcel Dekker, 2000.

10. *Гюнтер Н. М.* К общей теории интегральных уравнений // Докл. АН СССР. 1939. Т. 22. С. 215–219.

11. *Назаров Н. Н.* Об одном новом классе линейных интегральных уравнений // Тр. ин-та математики и механики АН УзССР. 1948. Вып. 4. С. 77–106.

12. *Krall A. M.* The development of general differential and general differential boundary systems // Rocky Mountains J. Math. 1975. V. 5, N 4. P. 493–542.

Амангалиева Мейрамкуль Мувашархан кызы
Казахстан, Алматы, Казахский национальный университет им. аль-Фараби

Дженалиев Мувашархан Танабаевич
Казахстан, Алматы, Институт математики ЦФМИ МОН РК
dzhenali@math.kz

Рамазанов Мурат Ибраевич
Казахстан, Алматы, Институт математики ЦФМИ МОН РК