УДК 517.9

МЕТОД БЕЛЛМАНА ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

М. Т. Дженалиев, К. Б. Иманбердиев

Рассматривается задача стабилизации на временной полуоси решения нагруженного параболического уравнения. Для ее аппроксимации предлагается использовать семейство задач оптимального управления на ограниченных временных интервалах. Для каждой из последних получено условие оптимальности в форме уравнения Беллмана.

1. Постановка задачи

Найти такие граничные управления $u_-(t)$, $u_+(t)$, чтобы решение $y(x,t)$ начально-граничной задачи

$$y_t(x,t) - y_{xx}(x,t) + \alpha \cdot y(0,t) = 0, \ \ \{x,t\} \in Q, \tag{1}$$

$$y(-\pi/2,t) = u_-(t), \quad y(\pi/2,t) = u_+(t), \tag{2}$$

$$y(x,0) = y_0(x) \tag{3}$$

стремилось к нулю при $t \to \infty$ следующим образом

$$\|y(x,t)\|_{L_2(-\pi/2,\pi/2)} \le C_0 e^{-\sigma_0 t}, \tag{4}$$

где $Q = \{x,t| \ -\pi/2 < x < \pi/2, \ t > 0\}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, σ_0 — заданное положительное число, $y_0(x) \in L_2(-\pi/2,\pi/2)$ — заданная функция. Уравнение (1) называют нагруженным [1]. В случае отсутствия нагруженного слагаемого задача стабилизации (1)–(4) была изучена в [2].

Приближенное решение рассматриваемой задачи (1)–(4) сводится к задаче оптимального управления по минимизации семейства функционалов (при различных T)

$$\mathcal{J}(u_+,u_-,T) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} [y(x,T) - C_0 e^{-\sigma_0 T}]^2 dx + \alpha_+ \int\limits_0^T |u_+(t)|^2 dt + \alpha_- \int\limits_0^T |u_-(t)|^2 dt, \tag{5}$$

на решениях интегрального тождества

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} y(x,t)\psi(x,t)\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} dx - \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \{y(x,t)\psi_t(x,t) + y(x,t)\psi_{xx}(x,t) - \alpha \cdot y(0,t)\psi(x,t)\} dx dt - \int\limits_{t_1}^{t_2} \{u_+(t)\psi_x(\pi/2,t) - u_-(t)\psi_x(-\pi/2,t)\} dt = 0, \tag{6}$$

для любой функции $\psi(x,t) \in L_2(t_1, t_2; W_2^2(-\pi/2,\pi/2) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(-\pi/2,\pi/2)) \cap W_2^1(t_1, t_2; L_2(-\pi/2,\pi/2))$, $0 \le t_1 < t_2 < T < +\infty$, и когда начальная функция $y_0(x)$ удовлетворяет следующему условию

$$\lim_{t\to+0} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} [y(x,t) - y_0(x)]\varphi(x)dx = 0 \;\; \forall\, \varphi \in L_2(-\pi/2,\pi/2). \tag{7}$$

Требуется минимизировать функционал (5) на решениях интегрального тождества (6) при выполнении условия (7).

2. Вывод уравнения Беллмана

Для решения задачи оптимального управления воспользуемся принципом оптимальности Беллмана, который заключается в следующем:

оптимальное поведение системы обладает тем свойством, что, каков бы ни был момент времени t_0 $(0 \le t_0 < T)$, оно остается оптимальным относительно состояния системы в этот момент времени на всем оставшемся отрезке времени $t > t_0$, независимо от того, каким образом система достигла состояния в момент времен t_0.

В соответствие с этим принципом вводим функционал

$$S[y(x,t),t] = \min_{\substack{u\equiv\{u_+(\tau),\\ u_-(\tau)\}\in\mathbb{R}^2}} \Bigg\{ \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} [y(x,T) - C_0 e^{-\sigma_0 T}]^2 dx \\ + \alpha_+ \int\limits_0^T |u_+(\tau)|^2 d\tau + \alpha_- \int\limits_0^T |u_-(\tau)|^2 d\tau \Bigg\}, \tag{8}$$

где t — произвольный момент времени из отрезка $[0,T]$, а $u_-(\tau)$ и $u_+(\tau)$ — граничные управления.

Положив $y(x,t') \triangleq y(x,t) + \triangle y(x,t),\; t' \triangleq t + \triangle t$, находим, что

$$S[y(x,t'),t'] \triangleq S[y(x,t) + \triangle y(x,t),\; t+\triangle t].$$

Предполагая, что S, как функция от t, дважды непрерывно дифференцируема и, как функционал от y, имеет дифференциал Фреше, получаем

$$\begin{aligned} S[y(x,t'),t'] &= S[y(x,t),t] + \frac{\partial S[y(x,t'),t]}{\partial t}\triangle t + \Phi(y(x,t),t,\triangle y(x,t)) + o_1(\triangle t) \\ &+ o_2(y(x,t),t,\triangle y(x,t)) = \frac{\partial S[y(x,t),t]}{\partial t}\triangle t + \Phi(y(x,t),t,\triangle y(x,t)) + o_1(\triangle t) \\ &+ o_2(y(x,t),t,\triangle y(x,t)) + \left[\frac{\partial S[y(x,t'),t]}{\partial t} - \frac{\partial S[y(x,t),t]}{\partial t}\right]\triangle t + S[y(x,t),t]. \end{aligned}$$

Здесь Φ — дифференциал Фреше функционала S, вычисленный в точке $(y(x,t),t)$.

Используя формулу Лагранжа, находим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial S[y(x,t'),t]}{\partial t} - \frac{\partial S[y(x,t),t]}{\partial t} &= \Phi_1(y(x,t) + \tau\cdot\triangle y(x,t),t,\triangle y(x,t)) \\ &= \Phi_1(y(x,t),t,\triangle y(x,t)) + o_3(y(x,t),t,\triangle y(x,t)). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$S[y(x,t'),t'] - S[y(x,t),t] = \frac{\partial S[y(x,t),t]}{\partial t}\triangle t + dS[y(x,t),t,\triangle y(x,t)] + o_1(\triangle t) + o_4(y(x,t),t,\triangle y(x,t)), \quad (9)$$

где $o_4 = o_2 + o_3$,

$$\frac{o_1(\triangle t)}{|\triangle t|} \to 0 \ \text{ при } \ \triangle t \to 0$$

и

$$\frac{o_4(y(x,t),t,\triangle y(x,t))}{\|\triangle y(x,t)\|} \to 0 \ \text{ при } \ \|\triangle y(x,t)\| \to 0.$$

Учитывая определение функционала S (см. (8)), имеем

$$\begin{aligned}
S[y(x,t),t] &= \min_{\substack{u_+(\tau),u_-(\tau)\in\mathbb{R}^2\\ t\le\tau\le T\\ -\pi/2\le x\le\pi/2}} \Bigg\{ \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} [y(x,T) - C_0 e^{-\sigma_0 T}]^2 dx + \alpha_+ \int\limits_{t}^{t+\triangle t} u_+^2(\tau)d\tau \\
&\quad + \alpha_+ \int\limits_{t+\triangle t}^{T} u_+^2(\tau)d\tau + \alpha_- \int\limits_{t}^{t+\triangle t} u_-^2(\tau)d\tau + \alpha_- \int\limits_{t+\triangle t}^{T} u_-^2(\tau)d\tau \Bigg\} \\
&= \min_{\substack{u_+(\tau),u_-(\tau)\in\mathbb{R}^2\\ t\le\tau\le t+\triangle t\\ -\pi/2\le x\le\pi/2}} \Bigg\{ \alpha_+ \int\limits_{t}^{t+\triangle t} u_+^2(\tau)d\tau + \alpha_- \int\limits_{t}^{t+\triangle t} u_-^2(\tau)d\tau \\
&\quad + \min_{\substack{u_+(s),u_-(s)\in\mathbb{R}^2\\ t+\triangle t\le s\le T\\ -\pi/2\le x\le\pi/2}} \Bigg\{ \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} [y(x,T) - C_0 e^{-\sigma_0 T}]^2 dx + \alpha_+ \int\limits_{t+\triangle t}^{T} u_+^2(s)ds + \alpha_- \int\limits_{t+\triangle t}^{T} u_-^2(s)ds \Bigg\} \Bigg\} \\
&= \min_{\substack{u_+(\tau),u_-(\tau)\in\mathbb{R}^2\\ t\le\tau\le t+\triangle t\\ -\pi/2\le x\le\pi/2}} \Bigg\{ \alpha_+ \int\limits_{t}^{t+\triangle t} u_+^2(\tau)d\tau + \alpha_- \int\limits_{t}^{t+\triangle t} u_-^2(\tau)d\tau + S[y(x,t'),t'] \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Используя вычисленное значение функционала $S[y(x,t'),t']$ (см. (10)), находим, что

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial S[y(x,t),t]}{\partial t}\triangle t &= \min_{\substack{u_+(\tau),u_-(\tau)\in\mathbb{R}^2\\ t\le\tau\le t+\triangle t\\ -\pi/2\le x\le\pi/2}} \Bigg\{ \alpha_+ \int\limits_{t}^{t+\triangle t} u_+^2(\tau)d\tau + \alpha_- \int\limits_{t}^{t+\triangle t} u_-^2(\tau)d\tau \\
&\quad + dS[y(x,t),t,\triangle y(x,t)] + o_1(\triangle t) + o_4(y(x,t),t,\triangle y(x,t)) \Bigg\}. \quad (10)
\end{aligned}$$

Так как $\triangle y(x,t) \triangleq y(x,t') - y(x,t) \in L_2(-\pi/2,\pi/2)$ при всех $t \in [0,T]$ (по предположению $y(x,t)$ — непрерывная функция), то

$$dS[y(x,t),t,\triangle y(x,t)] = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} v(x,t)\triangle y(x,t)dx,$$

где $v(x,t)$ — градиент функционала S, вычисленный в точке $(y(x,t),t)$, принадлежащий $L_2(-\pi/2,\pi/2)$ почти при всех $t\in[0,T]$. Подставляя это выражение dS в уравнение (11), получаем

$$-\frac{\partial S[y(x,t),t]}{\partial t}\triangle t=\min_{\substack{u_+(\tau),u_-(\tau)\in\mathbb{R}^2\\ t\le\tau\le t+\triangle t\\ -\pi/2\le x\le\pi/2}}\Bigg\{\alpha_+\int\limits_t^{t+\triangle t}u_+^2(\tau)d\tau+\alpha_-\int\limits_t^{t+\triangle t}u_-^2(\tau)d\tau$$
$$+\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}v(x,t)\triangle y(x,t)dx+o_1(\triangle t)+o_4(y(x,t),t,\triangle y(x,t))\Bigg\}.\quad(11)$$

Очевидно, что справедливо тождество

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}v(x,t)\triangle y(x,t)dx=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}v(x,t)[y(x,t)]_t^{t+\triangle t}dx$$
$$=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}[v(x,t)y(x,t)]_t^{t+\triangle t}dx-\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}y(x,t+\triangle t)[v(x,t)]_t^{t+\triangle t}dx.$$

Предположим теперь, что $v(x,t)\in L_2\,(t_1,\,t_2;\,W_2^2\,(-\pi/2,\pi/2)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1\,(-\pi/2,\pi/2))\cap W_2^1\,(t_1,\,t_2;\,L_2\,(-\pi/2,\pi/2)),\ 0\le t_1<t_2<T<+\infty$. Тогда, используя предыдущее тождество, а также интегральное тождество (6), из (12) получаем

$$-\frac{\partial S[y(x,t),t]}{\partial t}=\min_{\substack{u\in\mathbb{R}^2,\\ t\le\tau\le t+\triangle t,\\ -\pi/2\le x\le\pi/2}}\Bigg\{\frac{\alpha_+}{\triangle t}\int\limits_t^{t+\triangle t}u_+^2(\tau)d\tau+\frac{\alpha_-}{\triangle t}\int\limits_t^{t+\triangle t}u_-^2(\tau)d\tau$$
$$+\frac{1}{\triangle t}\int\limits_t^{t+\triangle t}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}[y(x,\tau)v_t(x,\tau)+y(x,\tau)v_{xx}(x,\tau)+\alpha y(0,\tau)v(x,\tau)]dxd\tau$$
$$+\frac{1}{\triangle t}\int\limits_t^{t+\triangle t}[u_+(\tau)v_x(\pi/2,\tau)-u_-(\tau)v_x(-\pi/2,\tau)]d\tau$$
$$-\frac{1}{\triangle t}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}y(x,t+\triangle t)\triangle v(x,t)dx+\frac{o_1(\triangle t)}{\triangle t}+\frac{o_4(y,t,\triangle y)}{||\triangle t,\triangle y)||}\Bigg\}.\quad(12)$$

Переходя к пределу в (13) при $\triangle t\to 0$, получаем так называемое уравнение Беллмана

$$-\frac{\partial S[y(x,t),t]}{\partial t}=\min_{\substack{u\equiv\{u_+(\tau),\\ u_-(\tau)\}\in\mathbb{R}^2}}\Bigg\{\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big[y(x,t)v_{xx}(x,t)+\alpha y(0,t)v(x,t)\Big]dx$$
$$+\alpha_+u_+^2(t)+\alpha_-u_-^2(t)+u_+(t)v_x(\pi/2,t)-u_-(t)v_x(-\pi/2,t)\Bigg\},\quad(13)$$

$$S[y(x,T),T] = 0.$$

Из выражения, стоящего в правой части уравнения Беллмана (14), находим, что

$$u_+(t) = -\frac{v_x(\pi/2,t)}{2\alpha_+}, \quad u_-(t) = \frac{v_x(-\pi/2,t)}{2\alpha_-}.$$

Затем, исключая $u_+(t)$ и $u_-(t)$ из уравнения Беллмана (14), получаем

$$-\frac{\partial S[y(x,t),t]}{\partial t} = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \{y(x,t)v_{xx}(x,t) + \alpha y(0,t)v(x,t)\}dx - \frac{v_x^2(\pi/2,t)}{4\alpha_+} - \frac{v_x^2(-\pi/2,t)}{4\alpha_-},$$

где

$$\alpha y(0,t)v(x,t) = \alpha\delta(x)y(x,t)\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} v(\xi,t)d\xi.$$

Решение этого уравнения ищется в виде

$$S[y(x,t),t] = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} K(x,s,t)[y(x,t) - C_0e^{-\sigma_0 t}][y(s,t) - C_0e^{-\sigma_0 t}]dsdx + \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi(x,t)[y(x,t) - C_0e^{-\sigma_0 t}]dx + \eta(t),$$

здесь $K(x,s,t)$, $\varphi(x,t)$ и $\eta(t)$ — подлежащие определению функции. Нахождение этих функций позволяет найти приближенное решение задачи (5)–(7). При этом мы следуем работе [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.
2. *Фурсиков А. В.* Стабилизируемость квазилинейного параболического уравнения с помощью граничного управления с обратной связью // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 4. С. 115–160.
3. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978.

Дженалиев Мувашархан Танабаевич
Казахстан, Алматы, Институт математики ЦФМИ МОН РК
dzhenali@math.kz

Иманбердиев Канжарбек Балтабаевич
Казахстан, Алматы, Казахский национальный университет им. аль-Фараби
kanzhar@ok.kz