УДК 517.956

ЗАДАЧИ ГУРСА И НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Т. Д. Джураев, О. С. Зикиров

Изучается вопрос об однозначной разрешимости задач Гурса и нелокальной задачи для одного класса уравнений в частных производных третьего порядка. В работе построена функция Римана для линейного уравнения третьего порядка с гиперболическим оператором в главной части. Исследуются некоторые свойства функции Римана, на основе которых доказываются теоремы существования и единственности решения изучаемых задач.

1. Постановка задач

В односвязной области $D = \{(x,y):\ 0 < x < l,\ 0 < y < h\}$ независимых переменных (x,y) рассмотрим линейное уравнение в частных производных третьего порядка

$$\Big(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\Big)u_{xy} + Lu = f(x,y), \tag{1}$$

где α, β — заданные постоянные, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, а L — линейное дифференциальное выражение вида

$$Lu \equiv a\,(x,y)u_{xx} + 2b\,(x,y)u_{xx} + c\,(x,y)u_{yy} + a_1(x,y)u_x + b_1(x,y)u_y + c_1(x,y)u.$$

Коэффициенты и правая часть уравнения (1) являются заданными действительными функциями в области D.

Уравнения в частных производных третьего порядка лежат в основе математических моделей различных явлений и процессов. Многие задачи, связанные с динамикой почвенной влаги и грунтовой воды [1], распространением акустических волн в слабо неоднородных средах [2], редуцируются к локальным и нелокальным задачам для уравнения (1).

Заметим, что уравнение (1) соответствует второму и третьему типу уравнений с частными производными третьего порядка, приведенных к каноническим видам [3].

Из (1) при $\alpha = 1$, $\beta = 0$ и $b(x,y) = c(x,y) = 0$ получаем уравнения, исследованные в работах [4–6].

Без ограничения общности предположим, что $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, но $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Определение. *Регулярным в области D решением* уравнения (1) называется действительная функция $u(x,y)$, обладающая в D всеми непрерывными частными производными, входящими в уравнение, и удовлетворяющая ему в обычном смысле.

В настоящей работе для уравнения (1) исследуются следующие задачи.

Задача G_1. Найти регулярное в области D решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,0)=\psi_1(x), \quad u_y(x,0)=\psi_2(x), \quad 0\le x\le l, \tag{2}$$

$$u(0,y)=\varphi_1(y), \quad u_x(0,y)=\varphi_2(y), \quad 0\le y\le h, \tag{3_1}$$

где $\psi_i(x)$, $\varphi_i(y)$ $(i=1,2)$ — заданные функции такие, что

$$\varphi_1(0)=\psi_1(0), \quad \varphi_2(0)=\psi_2'(0), \quad \varphi_1'(0)=\psi_2(0), \quad \varphi_2'(0)=\psi_2'(0).$$

Задача G_2. Найти регулярное в области D решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2) и

$$u(l,y)=\varphi_3(y), \quad u_x(l,y)=\varphi_4(y), \quad 0\le y\le h, \tag{3_2}$$

здесь $\varphi_3(y)$, $\varphi_4(y)$ — заданные функции, причем

$$\varphi_3(0)=\psi_1(l), \ \varphi_4(0)=\psi_1'(l), \ \varphi_3'(0)=\psi_2(l), \quad \varphi_4'(0)=\psi_2'(l).$$

Нелокальная задача. Найти регулярное в области D решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2) и нелокальным граничным условиям

$$u(0,y)=\lambda_1(y)u(l,y)+\varphi_5(y), \quad 0\le y\le h, \tag{4}$$

$$u_x(0,y)=\lambda_2(y)u_x(l,y)+\varphi_6(y), \quad 0\le y\le h, \tag{5}$$

где $\lambda_1(y)$, $\lambda_2(y)$, $\varphi_5(y)$, $\varphi_6(y)$ — заданные функции, причем выполняются следующие условия согласования

$$\psi_1(0)=\lambda_1(0)\psi_1(l)+\varphi_5(0), \quad \psi_1'(0)=\lambda_2(0)\psi_1'(l)+\varphi_6(0).$$

Очевидно, что прямые $x=\mathrm{const}$, $y=\mathrm{const}$ являются характеристиками уравнения (1), поэтому задачи G_1 и G_2 будем называть *задачами Гурса*.

Согласно определению нелокальных задач [1] нелокальные условия (4) и (5) относятся к типу условий Бицадзе – Самарского.

2. Решение задачи G_1

Обратимся сначала к построению явного решения задачи Гурса (1)–(3) с помощью метода функции Римана.

Имеет место следующая теорема относительно разрешимости задачи G_1.

Теорема 1. *Если коэффициенты уравнения* (1) *и заданные функции удовлетворяют условиям*

$$a(x,y), \ b(x,y), \ c(x,y)\in C^1(\overline{D})\cap C^2(D), \tag{6a}$$

$$a_1(x,y), \ b_1(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(D), \ c_1(x,y)\in C(D), \tag{6b}$$

$$f(x,y)\in C(\overline{D}), \ f(0,y)=f(x,0)=0, \tag{7}$$

$$\varphi_i(y)\in C^2[0,h], \ \psi_i(x)\in C^2[0,l], \ i=1,2,$$

то задача G_1 имеет единственное решение.

Доказательство. Пусть $u(x,y)$, $v(x,y)\in C^2(\overline{D})\cap C^3(D)$, тогда имеет место тождество

$$vMu-uM^*v=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}, \tag{8}$$

здесь

$$P=\alpha v u_{xy}-\alpha v_{xy}u-\beta v_y u_y+(av)u_x-(av)_x u+(bv)u_y-(bv)_y u+(a_1 v)u,$$

$$Q=\beta v u_{xy}-\beta v_{xy}u-\alpha v_x u_x+(bv)u_x-(bv)_x u+(cv)u_y-(cv)_y u+(b_1 v)u,$$

$$M^*v\equiv-\Big(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\Big)v_{xy}+(av)_{xx}+(2bv)_{xy}+(cv)_{yy}-(a_1v)_x-(b_1v)_y+c_1v.$$

Предположим, что P, Q непрерывны в области $\overline{D}$, P_x, Q_y непрерывны и ограничены в D.

Далее, введем функцию Римана $v=v(x,y;\xi,\eta)$, которая однозначно определяется следующими требованиями

$$M^*v=0, \tag{9}$$

$$v(\xi,y;\xi,\eta)=\omega_1(\xi,y),\quad v_x(\xi,y;\xi,\eta)=\exp\Big(-\frac{1}{\alpha}\int\limits_\eta^y a(\xi,t)dt\Big), \tag{10}$$

$$v(x,\eta;\xi,\eta)=\omega_2(x,\eta),\quad v_y(x,\eta;\xi,\eta)=\exp\Big(-\frac{1}{\beta}\int\limits_\xi^x c(t,\eta)dt\Big), \tag{11}$$

где $\omega_1(\xi,y)$ и $\omega_2(x,\eta)$ являются решениями следующих задач Коши соответственно

$$\beta\omega_{1yy}(\xi,y)-b(\xi,y)\omega_{1y}(\xi,y)+a_1(\xi,y)\omega_1(\xi,y)=0,$$
$$\omega_1(\xi,\eta)=0,\quad \beta\omega_{1y}(\xi,\eta)=1, \tag{12}$$

$$\alpha\omega_{2xx}(x,\eta)-b(x,\eta)\omega_{2x}(x,\eta)+b_1(x,\eta)\omega_2(x,\eta)=0,$$
$$\omega_2(\xi,\eta)=0,\quad \alpha\omega_{2x}(\xi,\eta)=1. \tag{13}$$

Очевидно, задачи (12) и (13) однозначно разрешимы.

С помощью функции Римана $v=v(x,y;\xi,\eta)$ легко получить представление общего решения уравнения (1) в области D. В самом деле, интегрируя равенство (8) по области $D_0=\{(x,y):\ 0<x<\xi,\ 0<y<\eta\}$, где (ξ,η) — произвольная фиксированная точка области D, имеем

$$\begin{aligned}u(\xi,\eta)&=\alpha v_x(0,\eta;\xi,\eta)u(0,\eta)+\beta v_y(\xi,0;\xi,\eta)u(\xi,0)-\int\limits_0^\xi[\beta v(x,0;\xi,\eta)u_{xy}(x,0)\\&+c(x,0)v(x,0;\xi,\eta)u_y(x,0)+A(x;\xi,\eta)u_x(x,0)+B(x;\xi,\eta)u(x,0)]dx\\&-\int\limits_0^\eta[\alpha v(0,y;\xi,\eta)u_{xy}(0,y)+a(0,y)v(0,y;\xi,\eta)u_x(0,y)+A_1(y;\xi,\eta)u_y(0,y)\\&+B_1(y;\xi,\eta)u(0,y)]dy+\int\limits_0^\xi\int\limits_0^\eta v(x,y;\xi,\eta)f(x,y)dxdy,\end{aligned} \tag{14}$$

здесь

$$A(x,\xi,\eta) = -\alpha v_x(x,0;\xi,\eta) + b(x,0)v(x,0;\xi,\eta),$$

$$B(x;\xi,\eta) = -\beta v_{xy}(x,0;\xi,\eta) - b(x,0)v_x(x,0;\xi,\eta) \\ - c(x,0)v_y(x,0;\xi,\eta) - [b_x(x,0) + c(x,0) - b_1(x,0)]v(x,0;\xi,\eta),$$

$$A_1(y;\xi,\eta) = -\beta v_y(0,y;\xi,\eta) + b(0,y)v(0,y;\xi,\eta),$$

$$B_1(y;\xi,\eta) = -\alpha v_{xy}(0,y;\xi,\eta) - a(0,y)v_x(0,y;\xi,\eta) \\ - b(0,y)v_y(0,y;\xi,\eta) - [a_x(0,y) + b_y(0,y) - a_1(0,y)]v(0,y;\xi,\eta).$$

Формулу (14) можно рассматривать как представление общего решения уравнения (1), если считать, что $u(0,y)$, $u_x(0,y)$, $u(x,0)$ и $u_y(x,0)$ — произвольные, непрерывно-дифференцируемые функции.

В силу граничных условий (2), (3_1) из формулы (14) получим представление решения задачи G_1 в виде

$$u(\xi,\eta) = \alpha v_x(0,\eta;\xi,\eta)\varphi_1(\eta) + \beta v_y(\xi,0;\xi,\eta)\psi_1(\xi) - \int\limits_0^\xi [\beta v(x,0;\xi,\eta)\psi_2^{'}(x) \\ + c(x,0)v(x,0;\xi,\eta)\psi_2(x) + A(x;\xi,\eta)\psi_1^{'}(x) + B(x;\xi,\eta)\psi_1(x)]dx \\ - \int\limits_0^\eta [\alpha v(0,y;\xi,\eta)\varphi_2^{'}(y) + a(0,y)v(0,y;\xi,\eta)\varphi_2(y) + A_1(y;\xi,\eta)\varphi_1^{'}(y) \\ + B_1(y;\xi,\eta)\varphi_1(y)]dy + \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\eta v(x,y;\xi,\eta)f(x,y)dxdy. \quad (15)$$

Таким образом, формула (15) дает решение задачи G_1, если известно $v(x,y;\xi,\eta)$.

Теперь на основании формул (9)–(13), докажем существование и единственность функции Римана.

Теорема 2. *Если коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют условиям* (6), *то функция Римана* $v(x,y)$ *для оператора* M *существует и единственна.*

Доказательство. Интегрируя уравнение (9) по x в пределах от ξ до x, по y от η до y, пользуясь первыми условиями из (10, (11), а также условиями (12), (13), имеем

$$-\Big(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\Big)v(x,y) + \int\limits_\xi^x \int\limits_\eta^y L^* v(t,\tau)d\tau dt = \alpha + \beta, \quad (16)$$

где

$$L^* v \equiv (av)_{xx} + (2bv)_{xy} + (cv)_{yy} - (a_1 v)_x - (b_1 v)y + c_1 v.$$

Интегрируя двойной интеграл из (16), пользуясь равенствами

$$\alpha v_{xy} + a(x,y)v_x = 0, \quad \beta v_{xy} + c(x,y)v_y = 0.$$

которые вытекают из равенств (10), (11), получим

$$\Big(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\Big)v(x,y) = \frac{1}{2}K_0 v(x,y) + \gamma(x,y), \quad (17)$$

здесь

$$K_0v(x,y)=2b(x,y)v(x,y)+\int\limits_{\xi}^{x}\left[c_y(t,y)-b_1(t,y)\right]v(t,y)ds$$
$$+\int\limits_{\eta}^{y}\left[a_x(x,\tau)-a_1(x,\tau)\right]v(x,\tau)d\tau+\int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\eta}^{y}c_1(t,\tau)v(t,\tau)d\tau dt,$$

$$\gamma(x,y)=-(\alpha+\beta)+\alpha\exp\left(-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\eta}^{y}a(\xi,t)dt\right)+\beta exp\left(-\frac{1}{\beta}\int\limits_{\xi}^{x}c(t,\eta)dt\right).$$

Пользуясь представлением общего решения уравнения (17) (см. [8]) для определения функции $v(x,y)$, приходим к интегральному уравнению

$$v(x,y)=\frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}\int\limits_{\beta x-\alpha y}^{\alpha x+\beta y}K_0v(\overline{x}(s),\overline{y}(s))ds+\gamma_1(x,y), \tag{18}$$

где

$$\overline{x}(s)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(\beta^2x-\alpha\beta y+\alpha s\right),\quad \overline{y}(s)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(-\alpha\beta x+\alpha^2y+\beta s\right),$$

$\gamma_1(x,y)$ — известная функция.

Таким образом, задача (10), (11) для уравнения (9) эквивалентна интегральному уравнению (18).

Очевидно, что интегральный оператор

$$Kv=\frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}\int\limits_{\beta x-\alpha y}^{\alpha x+\beta y}K_0v(\overline{x}(s),\overline{y}(s))ds+\gamma(x,y)$$

действует из $C(\overline{D})$ в $C(\overline{D})$.

Легко видеть, что для $v(x,y)=v_1(x,y)-v_2(x,y)$ имеет место оценка

$$|Kv|\le\frac{1}{2(\alpha^2+\beta^2)}M\cdot(\alpha x+\beta y)[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]\|v\|,$$

где

$$\|v\|=\max_D|v(x,y)|,\quad M=\max\{k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4\},\quad k_1=\max_D|c_y(x,y)-b_1(x,y)|,$$
$$k_2=\max_D|a_x(x,y)-a_1(x,y)|,\quad k_3=\max_D|c_1(x,y)|,\quad k_4=\max_D|2b(x,y)|.$$

Далее,

$$|K^2v|\le\frac{1}{2^2(\alpha^2+\beta^2)^2}\frac{M^2}{2!}(\alpha x+\beta y)^2[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^2\|v\|,$$

для n-й степени оператора K имеем

$$|K^n|\le\frac{1}{2^n(\alpha^2+\beta^2)^n}\frac{M^n}{n!}(\alpha x+\beta y)^n[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^n\|v\|.$$

Отсюда видно, что можно подобрать n такое, что

$$\frac{1}{2^n(\alpha^2+\beta^2)^n}\frac{M^n}{n!}(\alpha l+\beta h)^n(l^n+h^n)<1.$$

Для этого n отображение K^n является сжимающим.

Из обобщенной теоремы о неподвижной точке следует, что интегральное уравнение (18) имеет и притом единственное решение.

Теорема 2 доказана.

Для доказательства того, что функция (15) удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3_1), достаточно установить существование решения уравнения (1) при однородных краевых условиях $\varphi_i(y)=0,\quad \psi_i(x)=0,\quad i=1,2.$

В самом деле, вводя вместо функции $u(x,y)$ новую неизвестную функцию $z(x,y)$ по формуле

$$\begin{aligned}z(x,y)=u(x,y)-\{\varphi_1(y)+x[\varphi_2(y)-\psi_1^{'}(0)]\\ +\psi_1(x)+y[\psi_2(x)-\psi_2(0)]-\psi_2^{'}xy-\psi_1(0)\},\end{aligned}$$

которая удовлетворяет уравнению (1) с другой правой частью и однородным условиям

$$z(0,y)=z_x(0,y)=z(x,0)=z_y(x,0)=0. \qquad (*)$$

Пользуясь свойством функции Римана, непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что функция, определенная равенством (15), удовлетворяет уравнению (1) и однородным условиям (*).

Таким образом, однозначная разрешимость задачи G_1 доказана.

3. Решение задачи G_2

Опираясь на результаты, полученные в предыдущем пункте, легко получить представление решения задачи G_2 в виде

$$\begin{aligned}u(\xi_1,\eta_1)=\alpha w_x(l,\eta_1;\xi_1,\eta_1)\varphi_3(\eta_1)+\beta w_y(\xi_1,0;\xi_1,\eta_1)\psi_1(\xi_1)-\int\limits_{\xi_1}^{l}[\beta w(x,0;\xi_1,\eta_1)\psi_2^{'}(x)\\ +c(x,0)w(x,0;\xi_1,\eta_1)\psi_2(x)+\overline{A}(x;\xi_1,\eta_1)\psi_1^{'}(x)+\overline{B}(x;\xi_1,\eta_1)\psi_1(x)]dx\\ +\int\limits_{0}^{\eta_1}[\alpha w(l,y;\xi_1,\eta_1)\varphi_4^{'}(y)+a(l,y)w(l,y;\xi_1,\eta_1)\varphi_4(y)+\overline{A}_1(y;\xi_1,\eta_1)\varphi_3^{'}(y)\\ +\overline{B}_1(y;\xi_1,\eta_1)\varphi_3(y)]dy+\int\limits_{\xi_1}^{l}\int\limits_{\eta_1}^{h}w(x,y;\xi_1,\eta_1)f(x,y)dxdy,\end{aligned}$$

где $w(x,y;\xi_1,\eta_1)$ — функция Римана, которая определяется следующими условиями

$$M^*w=0,$$

$$w(\xi_1,y;\xi_1,\eta_1)=w_1(\xi_1,y),\quad w_x(\xi_1,y;\xi_1,\eta_1)=\exp\left(-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{\eta_1}^{y}a(\xi_1,t)dt\right),$$

$$w(x,\eta_1;\xi_1,\eta_1)=w_2(x,\eta_1),\quad w_y(x,\eta_1;\xi_1,\eta_1)=\exp\left(-\frac{1}{\beta}\int\limits_{\xi_1}^{x}c(t,\eta_1)dt\right),$$

где $w_1(\xi_1,y)$ и $w_2(x,\eta_1)$ являются решениями следующих задач Коши соответственно

$$\beta w_{1yy}(\xi_1,y)-b(\xi_1,y)w_{1y}(\xi_1,y)+a_1(\xi_1,y)w_1(\xi_1,y)=0,$$
$$w_1(\xi_1,y)\mid_{y=\eta_1}=0,\quad \beta w_{1y}(\xi_1,y)\mid_{y=\eta_1}=1,$$

$$\alpha w_{2xx}(x,\eta_1)-b(x,\eta_1)w_{2x}(x,\eta_1)+b_1(x,\eta_1)w_2(x,\eta_1)=0,$$
$$w_2(x,\eta_1)\mid_{x=\xi_1}=0,\quad \alpha w_{2x}(x,\eta_1)\mid_{x=\xi_1}=1,\quad (19)$$

а $\overline{A}(x;\xi_1,\eta_1)$, $\overline{B}(x;\xi_1,\eta_1)$, $\overline{A}_1(y;\xi_1,\eta_1)$, $\overline{B}_1(y;\xi_1,\eta_1)$ — известные функции, выражающиеся через $w(x,y;\xi_1,\eta_1)$ и коэффициенты уравнения (1).

Из построения функций Римана $v(x,y;\xi,\eta)$ и $w(x,y;\xi_1,\eta_1)$ характеристических задач G_1 и G_2 непосредственно следует (см. [5]), справедливость следующих утверждений.

Лемма 1. *Если*

$$a_1(x,y)<0,\quad b_1(x,y)<0\quad \forall(x,y)\in D,\qquad (20)$$

то функции $v(x,y;\xi,\eta)$, $w(x,y;0,\eta_1)$ *удовлетворяют неравенствам*

$$v(x,\eta;l,\eta)<0\ \ \forall x\in[0,l),\quad \alpha v_x(0,\eta;l,\eta)>1,$$
$$w(x,\eta_1;0,\eta_1)>0\ \ \forall x\in(0,l],\quad \alpha w_x(l,\eta_1;0,\eta_1)>1.\qquad (21)$$

Доказательство. Рассмотрим задачу

$$\alpha v_{xx}(x,\eta;l,\eta)-b(x,\eta)v_x(x,\eta;l,\eta)+b_1(x,\eta)v(x,\eta;l,\eta)=0,\qquad (22)$$

$$v(\xi,\eta;l,\eta)\mid_{x=l}=0,\quad \alpha v_x(\xi,\eta;l,\eta)\mid_{x=l}=1;\qquad (23)$$

Уравнение (22) запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\alpha p(x;l,\eta)\frac{\partial v_x(x,\eta;l,\eta)}{\partial x}\right]+q(x,\eta)v(x,\eta;l,\eta)=0,\qquad (24)$$

где

$$p(x;l,\eta)=\exp\left[\int\limits_x^l b(t,\eta)dt\right],\quad q(x,\eta)=p(x;l,\eta)b_1(x,\eta).$$

Пусть $v=v(x,\eta;l,\eta)$, $0\le x<l$, решение уравнения (24), определяемое условиями (23). Тогда в силу принципа максимума из (24) получим $v(x,\eta;l,\eta)<0$ $\forall x\in[0,l)$.

Интегрируя уравнение (24) в пределах от 0 до l и учитывая (23), имеем

$$\alpha p(x;l,\eta)v_x(0,\eta;l,\eta)=1+\int\limits_0^l q(t,\eta)v(t,\eta;l,\eta)dt.$$

Так как $v(x,\eta;l,\eta) < 0$ и $b_1(x,\eta) < 0$, то из последного равенства получим $\alpha v_x(0,\eta;l,\eta) > 1$.

Аналогично доказывается справедливость неравенств (21). Они следуют из задачи (19).

Лемма 2. *Если выполнены условия* (20) *леммы* 1, *то функции* $v(x,y;\xi,\eta)$, $w(x,y;\xi_1,\eta_1)$ *удовлетворяют неравенствам*

$$v(\xi,y;\xi,h) < 0 \quad \forall y \in [0,h), \quad \beta v_y(\xi,0;\xi,h) > 1,$$

$$w(\xi_1,y;\xi_1,0) > 0 \quad \forall y \in (0,h], \quad \beta w_y(\xi_1,h;\xi_1,0) > 1.$$

Лемма 2 доказывается так же, как лемма 1.

4. Решение нелокальной задачи

Рассмотрим теперь нелокальную задачу (2), (4), (5) для уравнения (1). Справедлива следующая теорема разрешимости нелокальной задачи.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (6), (7) *теоремы* 1 *и*

$$\psi_i(x) \in C^2[0,l], \quad \lambda_i(y) \in C^2[0,h] \quad (i=1,2), \quad \varphi_5(y),\ \varphi_6(y) \in C^2[0,h].$$

Тогда нелокальная задача (1), (2), (4), (5) *имеет единственное регулярное решение.*

Доказательство. Для доказательства существования и единственности решения нелокальной задачи исследуем вспомогательную задачу Гурса для уравнения (1) с начальными условиями (2) и граничными условиями

$$u(0,y) = \mu_1(y), \qquad u_x(0,y) = \mu_2(y), \qquad 0 \le y \le h, \tag{25}$$

где $\mu_i(y)$ $(i=1,2)$ — пока неизвестные функции.

Выше мы показали, что если функции $\psi_i(x) \in C^2[0,l]$, $\mu_i(y) \in C^2[0,h]$, $i=1,2$, то решение характеристической задачи (1), (2), (25) существует, единственно и представимо в виде (15). Представление (15) после некоторых преобразований запишем в виде

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta) = {} & [\alpha v_x(0,\eta;\xi,\eta) - A_1(\eta;\xi,\eta)]\mu_1(\eta) - \alpha v(0,\eta;\xi,\eta)\mu_2(\eta) \\ & + [\beta v_y(\xi,0;\xi,\eta) - A(\xi;\xi,\eta)]\psi_1(\xi) - \beta v_x(\xi,0;\xi,\eta)\psi_2(\xi) + \beta v(0,0;\xi,\eta)\psi_2(0) \\ & + \alpha v(0,0;\xi,\eta)\psi_1'(0) + [A_1(0;\xi,\eta) + A(0;\xi,\eta)]\psi_1(0) \\ & + \int\limits_0^\xi [\beta v_x(x,0;\xi,\eta) - c(x,0)v(x,0;\xi,\eta)]\psi_2(x)dx + \int\limits_0^\xi [A_x(x;\xi,\eta) - B(x;\xi,\eta)]\psi_1(x)dx \\ & + \int\limits_0^\eta [\alpha v_y(0,y;\xi,\eta) - a(0,y)v(0,y;\xi,\eta)]\mu_2(y)dy + \int\limits_0^\eta [A_{1y}(y;\xi,\eta) - B_1(y;\xi,\eta)]\mu_1(y)dy \\ & + \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\eta v(x,y;\xi,\eta)f(x,y)dxdy \end{aligned} \tag{26}$$

Таким образом, произвольное решение нелокальной задачи можно представить в виде (26), если найдены непрерывно-дифференцируемые функции $\mu_1(y)$, $\mu_2(y)$.

Для упрощения дальнейших вычислений обозначим

$$F(\xi,\eta)=[\beta v_y(\xi,0;\xi,\eta)-A(\xi;\xi,\eta)]\psi_1(\xi)-\beta v_x(\xi,0;\xi,\eta)\psi_2(\xi)$$
$$+\beta v(0,0;\xi,\eta)\psi_2(0)+\alpha v(0,0;\xi,\eta)\psi_1'(0)+[A_1(0;\xi,\eta)+A(0;\xi,\eta)]\psi_1(0)$$
$$+\int\limits_0^\xi\int\limits_0^\eta v(x,y;\xi,\eta)f(x,y)dxdy+\int\limits_0^\xi[\beta v_x(x,0;\xi,\eta)-c(x,0)v(x,0;\xi,\eta)]\psi_2(x)dx$$
$$+\int\limits_0^\xi[A_x(x;\xi,\eta)-B(x;\xi,\eta)]\psi_1(x)dx$$

В силу нелокальных условий (4) и (5) находим неизвестные функции $\mu_1(y)$, $\mu_2(y)$, удовлетворяющие условиям

$$\mu_1(y)=\lambda_1(y)u(l,y)+\varphi_5(y),\qquad 0\le y\le h, \tag{27}$$

$$\mu_2(y)=\lambda_2(y)u_x(l,y)+\varphi_6(y),\qquad 0\le y\le h. \tag{28}$$

Решение нелокальной задачи полностью свелось к нахождению функций $\mu_1(y)$, $\mu_2(y)$.

Из представления (26) при $\xi=l$ находим, что

$$u(l,\eta)=F(l,\eta)+[\alpha v_x(0,\eta;l,\eta)-A_1(\eta;l,\eta)]\mu_1(\eta)-\alpha v(0,\eta;l,\eta)\mu_2(\eta)$$
$$+\int\limits_0^\eta[\alpha v_y(0,y;l,\eta)-a(0,y)v(0,y;l,\eta)]\mu_2(y)dy+\int\limits_0^\eta[A_{1y}(y;l,\eta)-B_1(y;l,\eta)]\mu_1(y)dy,$$

Умножим последнее выражение на $\lambda_1(\eta)$ и в силу условия (27) получим соотношение между функциями $\mu_1(\eta)$, $\mu_2(\eta)$

$$A_{11}(\eta)\mu_1(\eta)+A_{12}(\eta)\mu_2(\eta)=\int\limits_0^\eta[k_{11}(y,\eta)\mu_1(y)+k_{12}(y,\eta)\mu_2(y)]dy+f_1(\eta), \tag{29}$$

здесь

$$A_{11}(\eta)=1-\lambda_1(\eta)[\alpha v_x(0,\eta;l,\eta)-A_1(\eta;l,\eta)],\qquad A_{12}(\eta)=\lambda_1(\eta)\alpha v(0,\eta;l,\eta),$$
$$k_{11}(y,\eta)=\lambda_1(\eta)[A_{1y}(y;l,\eta)-B_1(y;l,\eta)],$$
$$k_{12}(y,\eta)=\lambda_1(\eta)[\alpha v_y(0,y;l,\eta)-a(0,y)v(0,y;l,\eta)],$$

$f_1(\eta)$ — известная функция.

Вычислим производную от $u(\xi,\eta)$ из (26) по ξ и, полагая $\xi=l$, с учетом условия (28) после ряда преобразований находим

$$A_{21}(\eta)\mu_1(\eta)+A_{22}(\eta)\mu_2(\eta)=\int\limits_0^\eta[k_{21}(y,\eta)\mu_1(y)+k_{22}(y,\eta)\mu_2(y)]dy+f_2(\eta), \tag{30}$$

где

$$A_{21}(\eta)=-\lambda_2(\eta)[\alpha v_{x\xi}(0,\eta;l,\eta)-A_{1\xi}(\eta;l,\eta)],\quad A_{22}(\eta)=1-\lambda_2(\eta)\alpha v_\xi(0,\eta;l,\eta),$$

$$k_{21}(y,\eta) = \lambda_2(\eta)[A_{1y\xi}(y;l,\eta) - B_{1\xi}(y;l,\eta)],$$

$$k_{22}(y,\eta) = \lambda_2(\eta)[\alpha v_{y\xi}(0,y;l,\eta) - a(0,y)v_\xi(0,y;l,\eta)],$$

$f_2(\eta)$ — известная функция.

Таким образом, для определения функций $\mu_1(\eta)$, $\mu_2(\eta)$ получили систему интегральных уравнений. Следовательно, вопрос о разрешимости изучаемой нелокальной задачи редуцирован к вопросу разрешимости системы уравнений (29), (30).

Систему интегральных уравнений (29), (30) перепишем в операторном виде

$$P(\eta)\mu + Q(\eta)\mu = F(\eta),$$

здесь

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1(\eta) \\ \mu_2(\eta) \end{pmatrix}, \quad P(\eta) = \begin{pmatrix} A_{11}(\eta) & A_{12}(\eta) \\ A_{21}(\eta) & A_{22}(\eta) \end{pmatrix},$$

$$Q(\eta) = \begin{pmatrix} \int\limits_0^\eta [k_{11}(y,\eta)\mu_1(y) + k_{12}(y,\eta)\mu_2(y)]dy \\ \int\limits_0^\eta [k_{21}(y,\eta)\mu_1(y) + k_{22}(y,\eta)\mu_2(y)]dy \end{pmatrix},$$

$F(\eta) = \{f_1(\eta), f_2(\eta)\}^{-1}$ — известная вектор-функция.

На основании леммы, доказанной в п. 2, имеем $\det|P(\eta)| \neq 0\ \forall \eta \in [0,h]$.

Поэтому система уравнений (29), (30) является системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода [9], которая имеет единственное решение в классе $\mu_1(\eta)$, $\mu_2(\eta) \in C^2[0,h]$.

Таким образом, искомые функции $\mu_1(\eta)$ и $\mu_2(\eta)$ найдены, и, следовательно, нелокальная задача (1), (4), (5) имеет единственное решение, которое выражается формулой (26).

Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.
2. *Руденко О. В., Солуян С. Н.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
3. *Джураев Т. Д., Попелек Я.* О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Диффер. уравн. 1991. Т. 27, № 10. С. 1734–1745.
4. *Жегалов В. И., Миронов А. Н.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань, 2001.
5. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникаюших при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Диффер. уравн. 1982. Т. 18, № 4. С. 689–699.
6. *Colton D.* Pseudoparabolic equations in one space variable // J. Differ. Equations. 1972. V. 12, N 3. P. 559–565.
7. *Randell W.* The construction of solutions to pseudoparabolic equations in noncylindrical domains // J. Differ. Equations. 1978. V. 27, N 3. P. 394–404.
8. *Джураев Т. Д.* Об одном классе уравнений в частных производных третьего порядка // Тр. междунар. научн. конф. “Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики”, Ташкент, 16–19 ноября 2004 г. Т. 1. С. 61–63.

9. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. М., 1960.

Джураев Тухтамурад Джураевич
Узбекстан, Ташкент, Институт математики АН РУз
mathinst@uzsci.net

Зикиров Обиджан Салижанович
Узбекстан, Ташкент, Институт математики АН РУз
zikirov@yandex.ru