УДК 517.95

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

И. Е. Егоров, А. П. Львов

В работе исследована разрешимость нелокальной краевой задачи для неклассических уравнений математической физики нечетного порядка с меняющимся направлением времени. Доказаны теоремы о существовании регулярного решений поставленной задачи для уравнений третьего и высокого порядка по времени при соблюдении некоторых условий на коэффициенты этих уравнений.

1. Разрешимость краевой задачи для уравнения третьего порядка

Рассмотрим уравнение

$$Lu\equiv\sum_{i=1}^{3}k_i(x,t)D_t^iu-\Delta u+C(x)u=f(x,t) \tag{1.1}$$

в цилиндрической области $Q=\Omega\times(0,T)$ с боковой границей $S_T=S\times(0,T)$, где $\Omega\subset R^n$ — ограниченная область с гладкой границей S. Коэффициент перед старшей производной может менять знак внутри области, поэтому уравнение (1.1) является уравнением с меняющимся направлением времени [1, 2]. Считаем, что коэффициенты уравнения (1.1) являются достаточно гладкими функциями.

Локальные краевые задачи для уравнения такого типа рассматривались в работах И. Е. Егорова, В. Е. Федорова [1], А. В. Чуешева [2].

Ищем решение уравнения (1.1), для которого выполняются следующие краевые условия

$$u|_{S_T}=0, \tag{1.2}$$

$$u|_{t=0}=u|_{t=T}=0, \tag{1.3}$$

$$u_t|_{t=0}=\alpha(x)u_t|_{t=T},\ \text{при}\ -k_3(x,0)>0,\ -k_3(x,T)>0,\ x\in\overline{\Omega}, \tag{1.4}$$

где $\alpha(x)$ — непрерывная функция в $\overline{\Omega}$.

Определим C_L как класс гладких функций, удовлетворяющих условиям (1.2)–(1.4). Заметим, что подобная нелокальная краевая задача с постоянным коэффициентом α в условии (1.4) рассматривалась в работе [3]. Введем весовые функции $\sigma_j(t)=t^{1+j}(T-t)^{1+j}$, где $j=\overline{1,4}$. Определим гильбертово пространство $H_L(Q)=\{u:\ u,u_t,u_{x_i},\sqrt{\sigma_1}u_{tt},\sqrt{\sigma_2}u_{tx_i},\sqrt{\sigma_3}u_{ttt},\sqrt{\sigma_4}u_{ttx_i},\sqrt{\sigma_4}\Delta u\in L_2(Q),i=\overline{1,n}\}$ с нормой $\|u\|_{H_L}^2=\int\limits_Q[u^2+u_t^2+\sum\limits_{i=1}^{n}u_{x_i}^2+\sigma_1u_{tt}^2+\sigma_2\sum\limits_{i=1}^{n}u_{tx_i}^2+\sigma_3u_{ttt}^2+\sigma_4((\Delta u)^2+\sum\limits_{i=1}^{n}u_{ttx_i}^2)]dQ$, H_1 — пространство, полученное замыканием C_L по норме $\|u\|_{H_1}=$

Работа выполнена при поддержке гранта № 8425 Вневедомственной научной программы “Развитие научного потенциала высшей школы” на 2005 г.

$\int\limits_Q (u^2 + u_t^2 + \sum\limits_{i=1}^n u_{x_i}^2) dQ$, $L_2(\Omega)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением $(u, v)_0 = \int\limits_Q uvdx$ [4, 5]. Также имеет место следующая лемма из [6].

Лемма 1.1 *Пусть коэффициент* $C(x) > 0$ *достаточно большой,* $-k_3(x, 0) > 0$, $-k_3(x, T) > 0$, $-k_2 + \frac{3}{2} k_{3,t} \geqslant \delta > 0$ *и* $|\alpha(x)| \leqslant \sqrt{\dfrac{k_3(x,T)}{k_3(x,0)}}$.

Тогда для любой функции $u(x, t) \in C_L$ *имеет место оценка*

$$C_1 ||u||_{1,1} \leqslant ||Lu||, \quad C_1 > 0.$$

Заметим, что постоянная C_1 не зависит от функции $u(x, t)$.

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия леммы* 1.1 *и* $-k_2 - \dfrac{|k_{3,t}|}{2} \geqslant \delta_1 > 0$.

Тогда для любой функции f *из* $L_2(Q)$, $f_t \in L_2(Q)$, *существует, и притом единственное решение краевой задачи* (1.1)–(1.4) $u(x, t)$ *из* $H_1(Q)$ *такое, что* $u_t, u_{ttt} \in H_1(Q_\eta)$, *где* $Q_\eta = \Omega \times (\eta, T - \eta)$, $0 < \eta < T$.

Доказательство. Для $\varepsilon > 0$ положим

$$L_\varepsilon u = \varepsilon u_{tttt} + Lu.$$

Введем фундаментальную систему $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ в $W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, ортонормированную в $L_2(\Omega)$, такую, что $\varphi_l(x)$ является решением спектральной задачи

$$-\triangle \varphi_l = \lambda_l \varphi_l,$$

$$\varphi_l|_S = 0.$$

Приближенное решение

$$u^{N,\varepsilon}(x, t) \equiv \omega = \sum_{l=1}^N C_l^{N,\varepsilon}(t) \varphi_l(x)$$

ищем как решение следующей краевой задачи

$$(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon}, \varphi_l)_0 = (f, \varphi_l)_0, \tag{1.5}$$

$$C_l^{N,\varepsilon}(0) = C_l^{N,\varepsilon}(T) = 0, \tag{1.6}$$

$$C_{lt}^{N,\varepsilon}(0) = \sum_{k=1}^N C_{kt}^{N,\varepsilon}(T) \beta_{kl}, \tag{1.7}$$

$$C_{ltt}^{N,\varepsilon}(T) = \sum_{k=1}^N C_{ktt}^{N,\varepsilon}(0) \beta_{kl}, \tag{1.8}$$

где $\beta_{kl} = \int\limits_\Omega \alpha(x) \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx$, $k, l = \overline{1, N}$.

Умножим (1.5) на $C_l^{N,\varepsilon}$, просуммируем по l от 1 до N и проинтегрируем полученное равенство по t от 0 до T с учетом краевых условий (1.6)–(1.8). Используя равенство

$$\int\limits_\Omega [\omega_{tt}(x, T) \omega_t(x, T) - \omega_{tt}(x, 0) \omega_t(x, 0)] dx = 0,$$

которое справедливо в силу условий (1.7), (1.8) и ортонормированности функций $\varphi_k(x)$, получим

$$(f,\omega)=\varepsilon\int\limits_Q \omega_{tt}^2 dQ+(L\omega,\omega).$$

Из нее в силу леммы 1.1 получим следующую априорную оценку

$$\varepsilon||\omega_{tt}||^2+||\omega||^2_{1,1}\leqslant C_2||f||^2,\quad C_2>0. \tag{1.9}$$

Отсюда, в частности, следует однозначная разрешимость системы (1.5)–(1.8) для любого f из $L_2(Q)$.

Пусть числа t_0, T_0 выбраны так, чтобы $-k_3(x,t)\geqslant k_0>0$ при $0\leqslant t\leqslant t_0$, $T_0\leqslant t\leqslant T$ и любого x из $\overline{\Omega}$. А числа t_1, T_1 и r удовлетворяют условиям $0<t_1<t_0<T_0<T_1<T$, $0<4r<t_1$, $t_1+r<t_0$, $T_1+4r<T$.

Возьмем неотрицательные функции $\xi_i(t)$, $\eta_i(t)$ из $C_0^\infty(0,T)$ такие, что

$$\xi_i(t)=\begin{cases}0, & t\in[0,t_1-2(3-i)r]\bigcup[T_1+2(3-i)r,T]\bigcup[t_0,T_0],\\ 1, & t\in I_i\bigcup J_i,\end{cases}$$

$$\eta_i(t)=\begin{cases}0, & t\in[0,t_1-(5-2i)r]\bigcup[T_1+(5-2i)r,T],\\ 1, & t\in V_i,\end{cases}$$

$i=\overline{1,2}$, где $V_1=[t_1-2r,T_1+2r]$, $V_2=[t_1,T_1]$, $I_1=[t_1-3r,t_1]$, $I_2=[t_1-r,t_1]$, $J_1=[T_1,T_1+3r]$, $J_2=[T_1,T_1+r]$.

Умножим (1.5) на $\xi_1\dfrac{\partial C_l^{N,\varepsilon}}{\partial t}$, просуммируем по l от 1 до N и проинтегрируем по t

$$\begin{aligned}(f,\xi_1\omega_t)&=\varepsilon\int\limits_Q[\frac{3}{2}\xi_{1,t}\omega_{tt}^2-\frac{1}{2}\xi_{1,ttt}\omega_t^2]dQ-\int\limits_Q k_3\xi_1\omega_{tt}^2dQ\\ &+\frac{1}{2}\int\limits_Q[(k_3\xi_1)_{tt}-(k_2\xi_1)_t+2k_1\xi_1]\omega_t^2dQ-\int\limits_Q[\xi_{1,t}\sum_{i=1}^n\omega_{x_i}^2+\frac{1}{2}(C(x)\xi_1)_t\omega^2]dQ.\end{aligned}$$

Отсюда с учетом неравенства (1.9) получим

$$\int\limits_{I_1\bigcup J_1}\|\omega_{tt}\|_0^2(t)dt\leqslant C_3\|f\|^2,\quad C_3>0. \tag{1.10}$$

Далее, имеем равенство

$$\begin{aligned}-(f,\eta_1\omega_{tt})&=\varepsilon\int\limits_Q\eta_1\omega_{ttt}^2dQ-\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_Q\eta_{1,tt}\omega_{tt}^2dQ+\int\limits_Q\eta_1(-k_2+\frac{k_{3,t}}{2})\omega_{tt}^2dQ\\ &+\int\limits_Q\left\{\frac{k_3\eta_{1,t}}{2}\omega_{tt}^2+\frac{1}{2}[(k_1\eta_1)_t+C(x)\eta_1]\omega_t^2-\frac{1}{2}(C(x)\eta_1)_{tt}\omega^2\right\}dQ\\ &+\int\limits_Q\left[\eta_1\sum_{i=1}^n\omega_{tx_i}^2-\frac{\eta_{1,tt}}{2}\sum_{i=1}^n\omega_{x_i}^2\right]dQ.\end{aligned}$$

Отсюда из $\operatorname{supp}\eta_{1,t}(t)\subseteq I_1\bigcup J_1$ и неравенств (1.9), (1.10) получаем

$$\varepsilon\int\limits_{V_1}\|\omega_{ttt}\|_0^2(t)dt+\int\limits_{V_1}[\|\omega_{tt}\|_0^2+\|\omega_t\|_1^2]dt\leqslant C_4\|f\|^2,\quad C_4>0. \tag{1.11}$$

Рассмотрим теперь

$$-(f,\xi_2\omega_{ttt})=\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_Q \xi_{2,t}\omega_{ttt}^2dQ-\int\limits_Q k_3\xi_2\omega_{ttt}^2dQ$$
$$+\int\limits_Q\Big\{\Big[\frac{1}{2}(k_2\xi_2)_t+k_1\xi_2\Big]\omega_{tt}^2-\frac{3}{2}(C(x)\xi_2)_t\omega_t^2+(C(x)\xi_2)_{ttt}\omega^2\Big\}dQ$$
$$+\int\limits_Q\Big[-\frac{3}{2}\xi_{2,t}\sum_{i=1}^n\omega_{tx_i}^2+\frac{\xi_{2,ttt}}{2}\sum_{i=1}^n\omega_{x_i}^2\Big]dQ.$$

Тогда из неравенств (1.9)–(1.11) вытекает

$$\int\limits_{I_2\bigcup J_2}\|\omega_{ttt}\|_0^2(t)dt\leqslant C_5\|f\|^2,\quad C_5>0. \tag{1.12}$$

Для получения последней априорной оценки рассмотрим равенство

$$(f,\eta_2\omega_{tttt})=\varepsilon\int\limits_Q\eta_2\omega_{tttt}^2dQ-\frac{1}{2}\int\limits_Q k_3\eta_{2,t}\omega_{ttt}^2dQ$$
$$+\int\limits_Q\eta_2\Big(-k_2-\frac{k_{3,t}}{2}\Big)\omega_{ttt}^2dQ+\frac{1}{2}\int\limits_Q[(k_2\eta_2)_{tt}-3(k_1\eta_2)_t]\omega_{tt}^2dQ$$
$$+\int\limits_Q\Big\{\eta_2\sum_{i=1}^n\omega_{ttx_i}^2-2\eta_{2,tt}\sum_{i=1}^n\omega_{tx_i}^2+\eta_{2,tttt}\sum_{i=1}^n\omega_{x_i}^2\Big\}dQ$$
$$+\int\limits_Q\Big[C(x)\eta_2\omega_{tt}^2-2(C(x)\eta_2)_{tt}\omega_t^2+\frac{1}{2}(C(x)\eta_2)_{tttt}\omega^2\Big]dQ.$$

В силу неравенств (1.9)–(1.12) получим следующую оценку

$$\varepsilon\int\limits_{V_2}\|\omega_{tttt}\|_0^2(t)dt+\int\limits_{V_2}[\|\omega_{ttt}\|_0^2+\|\omega_{tt}\|_1^2]dt\leqslant C_6[\|f\|^2+\|f_t\|^2],\quad C_6>0. \tag{1.13}$$

Для любого $0<\eta<T$ существуют t_1, T_1, удовлетворяющие вышеуказанным свойствам, такие, что $0<t_1<\eta,\ T-\eta<T_1$. Переходя к предельному элементу $u(x,t)$ некоторой подпоследовательности $u^{N,\varepsilon}(x,t)$, получим утверждение теоремы. При этом полученное решение принимает граничные условия (1.2), (1.3) в среднем. Теорема доказана.

Возьмем весовые функции

$$\psi_i(t)=\begin{cases} t^{1+i}\zeta(t), & 0\leqslant t\leqslant t_1+r,\\ (T-t)^{1+i}\zeta(t), & T_1-r\leqslant t\leqslant T,\end{cases}$$

где $i=1,2$, причем неотрицательная функция

$$\zeta(t)=\begin{cases} 1, & 0\leqslant t\leqslant t_1,\ T_1\leqslant t\leqslant T,\\ 0, & t_1+r\leqslant t\leqslant T_1-r,\end{cases}$$

принадлежит классу $C^\infty[0,T]$.

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1.

Тогда для любой функции f *из* $L_2(Q)$ *такой, что* $f_t \in L_2(Q)$, *существует и притом единственное решение краевой задачи* (1.1)–(1.4) $u(x,t)$ *из* $H_L(Q_T) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$.

Доказательство. Как и в теореме 1.1 для $\varepsilon > 0$ положим

$$L_\varepsilon u = \varepsilon u_{tttt} + Lu.$$

Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — специальный базис, введенный в доказательстве предыдущей теоремы. Приближенное решение

$$u^{N,\varepsilon}(x,t) \equiv \omega = \sum_{l=1}^{N} C_l^{N,\varepsilon}(t)\varphi_l(x)$$

ищем как решение системы (1.5)–(1.8)

Умножим (1.5) на $\psi_1 \dfrac{\partial C_l^{N,\varepsilon}}{\partial t}$, просуммируем по l от 1 до N и проинтегрируем по t

$$(f, \psi_1\omega_t) = \varepsilon \int\limits_Q \frac{3}{2}\psi_{1,t}\omega_{tt}^2 dQ + \varepsilon \int\limits_Q \psi_{1,tt}\omega_{tt}\omega_t dQ - \int\limits_Q k_3\psi_1\omega_{tt}^2 dQ$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_Q [(k_3\psi_1)_{tt} - (k_2\psi_1)_t + 2k_1\psi_1]\omega_t^2 dQ - \int\limits_Q \left[\psi_{1,t}\sum_{i=1}^{n}\omega_{x_i}^2 + \frac{1}{2}(C(x)\psi_1)_t\omega^2\right] dQ.$$

Так как

$$\varepsilon \Big| \int\limits_Q \psi_{1,tt}\omega_{tt}\omega_t dQ \Big| \leqslant \varepsilon C[\|\omega_{tt}\|^2 + \|\omega_t\|^2]$$

в силу неравенства Коши, то, учитывая (1.9) на интервале $[0, t_1]$, получим неравенство

$$\int\limits_0^{t_1} \|\sqrt{\psi_1}\omega_{tt}\|_0^2 dt \leqslant C_7\|f\|^2, \quad C_7 > 0. \tag{1.14}$$

Аналогично на $[T_1, T]$ получим

$$\int\limits_{T_1}^{T} \|\sqrt{\psi_1}\omega_{tt}\|_0^2 dt \leqslant C_8\|f\|^2, \quad C_8 > 0. \tag{1.15}$$

Рассмотрим равенство

$$-(f, \psi_2\omega_{tt} - \frac{1}{2}\psi_{2,t}\omega_t) = \varepsilon\int\limits_Q \psi_2\omega_{ttt}^2 dQ + \frac{\varepsilon}{4}\int\limits_Q \psi_{2,tt}\omega_{tt}^2 dQ + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_Q \psi_{2,ttt}\omega_{tt}\omega_t dQ$$
$$+ \int\limits_Q \psi_2(-k_2 + \frac{k_{3,t}}{2})\omega_{tt}^2 dQ + \frac{1}{2}\int\limits_Q [-(k_3\psi_{2,t})_t + k_2\psi_{2,t}]\omega_{tt}\omega_t dQ$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_Q (-k_{1,t}\psi_2 + C(x)\psi_2)\omega_t^2 dQ + \int\limits_Q \left[\psi_2\sum_{i=1}^{n}\omega_{tx_i}^2 - \frac{3\psi_{2,tt}}{4}\sum_{i=1}^{n}\omega_{x_i}^2\right] dQ.$$

В силу неравенств (1.9), (1.14), (1.15), условий теоремы и системы (1.5)–(1.8), используя неравенство Коши, получим неравенство

$$\varepsilon\|\sqrt{\psi_2}\omega_{ttt}\|^2+\int\limits_Q \psi_2(\omega_{tt}^2+\sum_{i=1}^n \omega_{tx_i}^2)dQ\leqslant C_9\|f\|^2,\quad C_9>0. \tag{1.16}$$

Далее, имеем следующее равенство

$$-(f,\psi_3\omega_{ttt})=\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_Q \psi_{3,t}\omega_{ttt}^2dQ-\int\limits_Q \psi_3 k_3\omega_{ttt}^2dQ$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_Q[k_2\psi_{3,t}+\psi_3(k_{2,t}+2k_1)]\omega_{tt}^2dQ+\frac{1}{2}\int\limits_Q[-(k_1\psi_3)_{tt}-3(C(x)\psi_3)_t]\omega_t^2dQ$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_Q(C(x)\psi_3)_{ttt}\omega^2dQ+\frac{3}{2}\int\limits_Q\left(\psi_{3,t}\sum_{i=1}^n\omega_{tx_i}^2-\frac{\psi_{3,ttt}}{2}\sum_{i=1}^n\omega_{x_i}^2\right)dQ.$$

Из оценок (1.9), (1.11), (1.14), (1.16) в силу неравенства Коши на интервале $[0,t_1]$ имеем следующую оценку

$$\int\limits_0^{t_1}\|\sqrt{\psi_3}\omega_{ttt}\|_0^2dt\leqslant C_{10}\|f\|^2,\quad C_{10}>0. \tag{1.17}$$

Аналогично рассуждая для интервала $[T_1,T]$, получим

$$\int\limits_{T_1}^{T}\|\sqrt{\psi_3}\omega_{ttt}\|_0^2dt\leqslant C_{11}\|f\|^2,\quad C_{11}>0. \tag{1.18}$$

Рассмотрим следующее равенство

$$(f,\psi_4\omega_{tttt}+\frac{\psi_{4,t}}{2}\omega_{ttt})=\varepsilon\int\limits_Q\psi_4\omega_{tttt}^2dQ+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_Q\psi_{4,t}\omega_{tttt}\omega_{ttt}dQ$$
$$+\int\limits_Q\psi_4(-k_2-\frac{k_{3,t}}{2})\omega_{ttt}^2dQ+\int\limits_Q\psi_4(-k_{2,t}-k_1)\omega_{ttt}\omega_{tt}dQ+\int\limits_Q\frac{(-k_2\psi_{4,t})}{2}\omega_{ttt}\omega_{tt}dQ$$
$$+\int\limits_Q\psi_4(-k_{1,t}-C(x))\omega_{ttt}\omega_tdQ+\int\limits_Q\frac{(-k_1\psi_{4,t})}{2}\omega_{ttt}\omega_tdQ+\int\limits_Q\frac{(-C(x)\psi_{4,t})}{2}\omega_{ttt}\omega dQ$$
$$+\int\limits_Q\left\{\psi_4\sum_{i=1}^n\omega_{ttx_i}^2+\frac{\psi_{4,tt}}{4}\sum_{i=1}^n\omega_{tx_i}^2+\frac{\psi_{4,tttt}}{4}\sum_{i=1}^n\omega_{x_i}^2\right\}dQ.$$

В силу неравенств (1.9)–(1.18), теорем вложений из [4] и условий теоремы имеем

$$\varepsilon\|\sqrt{\psi_4}\omega_{tttt}\|^2+\int\limits_Q\psi_4(\omega_{ttt}^2+\sum_{i=1}^n\omega_{ttx_i}^2)dQ\leqslant C_{12}[\|f\|^2+\|f_t\|^2],\quad C_{12}>0. \tag{1.19}$$

Теперь умножим (1.5) на $\psi_4\lambda_l C_l^{N,\varepsilon}$ и просуммируем по l от 1 до N. Получим

$$-(L_\varepsilon\omega,\psi_4\Delta\omega)_0=-(f,\psi_4\Delta\omega)_0.$$

Проинтегрировав его по t от 0 до T, получим неравенство

$$\int\limits_{Q} \psi_4(\Delta\omega)^2 dQ \leqslant C_{13}[\|f\|^2 + \|f_t\|^2],\ C_{13} > 0. \tag{1.20}$$

Из оценок (1.14)–(1.20) в силу теоремы 1.1 и невырожденности весовых функций $\sigma_j(t)$ следует, что $u(x,t) = \lim\limits_{N\to\infty} u^{N,\varepsilon}(x,t)$ является решением краевой задачи (1.1)–(1.4) из $H_L(Q_T)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$. При этом единственность решения краевой задачи (1.1)–(1.4) следует из леммы 1.1. Теорема доказана.

2. Разрешимость краевой задачи для уравнения высокого порядка

Теперь в той же области Q рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{2s+1} k_i(x,t) D_t^i u + Mu = f(x,t), \tag{2.1}$$

где $Mu = (-1)^m \sum\limits_{|\alpha|,|\beta|=m} D_x^\alpha(a_{\alpha\beta}(x) D_x^\beta u) + a_0(x)u$ — сильно эллиптический оператор, $D_t^i u = \dfrac{\partial^i u}{\partial t^i}$, $D_x^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i$. Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (2.1) бесконечно дифференцируемы в $\overline{Q}$ и выполнены условия $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, $\sum\limits_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta \geqslant \nu|\xi|^{2m}$ для любых $\xi \in R^n$, $\nu > 0$. Через $n = (n_1, ..., n_n, n_0)$ обозначим вектор внутренней нормали к ∂Q. В анизотропном пространстве Соболева $W_2^{m,s}$ введем скалярное произведение

$$(u,v)_{m,s} = \int\limits_Q \Big[\sum_{|\alpha|\leqslant m} D^\alpha u D^\alpha v + D_t^s u D_t^s v\Big] dQ, \quad u,v \in W_2^{m,s}(Q),$$

причем $(u,v)_{0,0} = (u,v) = \int\limits_Q uv dQ$ для функций $u,v \in L^2(Q)$, $\|u\|^2 = (u,u) = \int\limits_0^T (u,u)_0 dt$.

Далее, будем искать решение уравнения (2.1) в Q такое, что

$$\frac{\partial^i u}{\partial n^i}\Big|_{S_T} = 0, \quad i = \overline{0, m-1}, \tag{2.2}$$

$$D_t^j u|_{t=0,t=T} = 0, \quad j = \overline{0, s-1}, \tag{2.3}$$

$$D_t^s u|_{t=0} = \alpha(x) D_t^s u|_{t=T} \text{ при } (-1)^s k_{2s+1}(x,0) > 0,\ (-1)^s k_{2s+1}(x,T) > 0,\ x \in \overline{\Omega}. \tag{2.4}$$

Пусть C_L — класс гладких функций, удовлетворяющих условиям (2.2)-(2.4). Имеет место следующая лемма.

Лемма 1.1 *Пусть коэффициент $C(x) > 0$ достаточно большой,*

$$(-1)^s[k_{2s} - \frac{(2s+1)}{2} k_{2s+1,t}] \geqslant \delta > 0,$$

$$|\alpha(x)| \leqslant \sqrt{\frac{k_{2s+1}(x,T)}{k_{2s+1}(x,0)}} \text{ при } (-1)^s k_{2s+1}(x,0) > 0, \quad (-1)^s k_{2s+1}(x,T) > 0.$$

Тогда для любой функции $u(x,t)\in C_L$ имеет место оценка

$$C_1||u||_{m,s}\leqslant ||Lu||, \quad C_1>0.$$

Доказательство. Лемма доказывается по аналогии с леммой 1.1.

Определим весовые функции $\sigma_j(t)=t^{1+j}(T-t)^{1+j}$, где $j=\overline{1,2s+2}$, и гильбертово пространство $H_L(Q)=\{u:D_x^\alpha u, D_t^{j-1}u,\ \sqrt{\sigma_{2j}}D_t^j(D_x^\alpha u),\ \sqrt{\sigma_{2s+2}}Mu,$ $\sqrt{\sigma_i}D_t^{s+[\frac{i+1}{2}]}u\in L_2(Q)$, $|\alpha|\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant s+1$, $1\leqslant i\leqslant 2s+1\}$ с нормой $\|u\|^2_{H_L}=\int\limits_Q\{u^2+\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}(D_x^\alpha u)^2+\sum\limits_{j=2}^{s+1}(D_t^{j-1}u)^2+\sum\limits_{j=1}^{s+1}\sigma_{2j}\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}(D_t^j(D_x^\alpha u))^2+\sigma_{2s+2}(Mu)^2+\sum\limits_{i=1}^{2s+1}\sigma_i(D_t^{s+[\frac{i+1}{2}]}u)^2\}dQ$, H_1 — пространство, полученное замыканием C_L по норме $\|u\|_{H_1}=\int\limits_Q\{(D_t^s u)^2+\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}(D_x^\alpha u)^2\}dQ$.

Теорема 2.1. *Пусть $C(x)>0$ достаточно большой,*

$$(-1)^s k_{2s+1}(x,0)>0,\ (-1)^s k_{2s+1}(x,T)>0,\ (-1)^s[k_{2s}+\frac{(2i-2s-1)}{2}k_{2s+1,t}]\geqslant\delta>0,$$

$$|\alpha(x)|\leqslant\sqrt{\frac{k_{2s+1}(x,T)}{k_{2s+1}(x,0)}}.$$

Тогда для любой функции f из $L_2(Q)$, $f_t\in L_2(Q)$, существует, и притом единственное решение краевой задачи (2.1)–(2.4) $u(x,t)$ из $H_1(Q)$ такое, что $D_t^{s+1}u\in H_1(Q_\eta)$, где $Q_\eta=\Omega\times(\eta,T-\eta)$, $0<\eta<T$.

Доказательство. Для $\varepsilon>0$ положим

$$L_\varepsilon u=\varepsilon D_t^{2s+2}u+Lu.$$

Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ — фундаментальная система в $W_2^{2m}(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$, ортонормированная в $L_2(\Omega)$, такая, что $\varphi_k(x)$ является решением спектральной задачи

$$P\varphi_k=(-1)^m\bigtriangleup^m\varphi_k=\lambda_k\varphi_k,$$

$$\frac{\partial^i\varphi_k}{\partial n^i}|_S=0\quad i=\overline{0,m-1}.$$

Приближенное решение

$$u^{N,\varepsilon}(x,t)\equiv\omega=\sum_{k=1}^N C_k^{N,\varepsilon}(t)\varphi_k(x)$$

ищем как решение следующей краевой задачи

$$(L_\varepsilon u^{N,\varepsilon},\varphi_l)_0=(f,\varphi_l)_0, \tag{2.5}$$

$$D_t^iC_l^{N,\varepsilon}(0)=D_t^iC_l^{N,\varepsilon}(T)=0,\quad l=\overline{1,N},\quad i=\overline{0,s-1} \tag{2.6}$$

$$D_t^sC_l^{N,\varepsilon}(0)=\sum_{k=1}^N D_t^sC_k^{N,\varepsilon}(T)\beta_{kl}, \tag{2.7}$$

$$D_t^{s+1}C_l^{N,\varepsilon}(T)=\sum_{k=1}^{N}D_t^{s+1}C_k^{N,\varepsilon}(0)\beta_{kl}, \tag{2.8}$$

где $\beta_{kl}=\int\limits_{\Omega}\alpha(x)\varphi_k(x)\varphi_l(x)dx$, $k,l=\overline{1,N}$.

Однозначная разрешимость задачи (2.5)–(2.8) следует из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Умножим (2.5) на $C_l^{N,\varepsilon}$, просуммируем по l от 1 до N и проинтегрировав полученное равенство по t от 0 до T с учетом краевых условий (2.6)–(2.8) получим

$$(f,\omega)=\varepsilon\|D_t^{s+1}\omega\|^2+(L\omega,\omega).$$

Из нее в силу леммы 2.1 следует априорная оценка

$$\varepsilon\|D_t^{s+1}\omega\|^2+\|\omega\|_{m,s}^2\leqslant C_2\|f\|^2,\quad C_2>0. \tag{2.9}$$

Выберем числа t_0, T_0 так, чтобы $(-1)^s k_{2s+1}(x,t)\geqslant k_0>0$ при $0\leqslant t\leqslant t_0$, $T_0\leqslant t\leqslant T$ и любого x из $\overline{\Omega}$. А числа t_1, T_1 и r удовлетворяют условиям $0<t_1<t_0<T_0<T_1<T$, $0<2(s+1)r<t_1$, $t_1+r<t_0$, $T_0<T_1-r$, $T_1+2(s+1)r<T$. Положим (см. [1, стр. 75]) $I_k=[t_1-(2s+3-2k)r,t_1]$, $J_k=[T_1,T_1+(2s+3-2k)r]$, $V_k=[t_1-2(s+1-k)r,T_1+2(s+1-k)r]$, $k=\overline{0,s+1}$.

Найдутся неотрицательные функции $\xi_k(t)$, $\eta_k(t)$ из $C_0^\infty(0,T)$ такие, что

$$\xi_k(t)=\begin{cases}0, & t\in[0,t_1-2(s+2-k)r]\bigcup[T_1+2(s+2-k)r,T]\bigcup[t_0,T_0],\\ 1, & t\in I_k\bigcup J_k,\end{cases}$$

$$\eta_k(t)=\begin{cases}0, & t\in[0,t_1-(2s+3-2k)r]\bigcup[T_1+(2s+3-2k)r,T],\\ 1, & t\in V_k.\end{cases}$$

Докажем, что справедливы неравенства

$$\int\limits_{I_k\bigcup J_k}\|D_t^{s+k}\omega\|_0^2dt\leqslant C_3\|f\|^2,\quad C_3>0,\quad k=\overline{0,s+1}, \tag{2.10}$$

$$\varepsilon\int\limits_{V_k}\|D_t^{s+k+1}\omega\|_0^2dt+\int\limits_{V_k}[\|D_t^{s+k}\omega\|_0^2+\|D_t^k\omega\|_m^2]dt$$
$$\leqslant C_4\begin{cases}\|f\|^2, & k=\overline{0,s},\\ \|f\|^2+\|f_t\|^2, & k=s+1.\end{cases} \tag{2.12}$$

Доказательство неравенств (2.10), (2.11) проведем с помощью математической индукции. Справедливость этих неравенсть при $k=0$ следует из (2.9).

Пусть неравенства (2.10), (2.11) имеют место при $k\leqslant j-1$.

Интегрируя по t, из (2.5)–(2.8) установим, что

$$(-1)^{j-1}(f,\xi_jD_t^{2j-1}\omega)=\varepsilon\Big(s+\frac{3}{2}-j\Big)\int\limits_{V_j-1}\xi_{jt}\|D_t^{s+j}\omega\|_0^2dt$$
$$-\Big(j-\frac{1}{2}\Big)\int\limits_{V_j-1}\xi_{jt}\int\limits_{\omega}\Big[\sum_{|\alpha|,|\beta|=m}a_{\alpha\beta}D^{\alpha,j-1}\omega D^{\beta,j-1}\omega+C(x)(D_t^{j-1}\omega)^2\Big]dx$$
$$+(-1)^s\int\limits_{Q}k_{2s+1}\xi_j(D_t^{s+j}\omega)^2dQ+...,$$

$$D^{\alpha,i}\omega = D_x^\alpha D_t^i\omega.$$

Отсюда в силу предположений следует неравенство (2.10). Аналогично имеем равенство

$$(-1)^j(f,\eta_j D_t^{2j}\omega) = \varepsilon\int_0^T \eta_j\|D_t^{s+1+j}\omega\|_0^2dt + \frac{(-1)^s}{2}\int_Q \eta_j[2k_{2s}+(2j-2s-1)k_{2s+1,t}](D_t^{s+j}\omega)^2dQ + \int_Q \eta_j\Big[\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}D^{\alpha,j}\omega D^{\beta,j}\omega + C(x)(D_t^j\omega)^2\Big]dQ + (-1)^{s+1}\Big(s-j+\frac{1}{2}\Big)\int_Q k_{2s+1}\eta_{jt}(D_t^{s+j}\omega)^2dQ + \ldots$$

Заметим, что $\operatorname{supp}\eta_{j,t}(t)\subseteq I_j\bigcup J_j$. Тогда на основании неравенства (2.10) при $k=j$ и предположений индукции из последнего равенства получим, что верно неравенство (2.11) при $k=j$.

Переходя к предельному элементу $u(x,t)$ некоторой подпоследовательности $\{u^{N,\varepsilon}(x,t)\}$, получим утверждение теоремы. При этом полученное решение принимает граничные условия (2.2)–(2.4) в среднем.

Возьмем весовые функции

$$\psi_i(t) = \begin{cases} t^{1+i}\zeta(t), & 0\leqslant t\leqslant t_1+r,\\ (T-t)^{1+i}\zeta(t), & T_1-r\leqslant t\leqslant T,\end{cases}$$

где $i=\overline{1,2s+2}$, причем неотрицательная функция

$$\zeta(t) = \begin{cases} 1, & 0\leqslant t\leqslant t_1,\ T_1\leqslant t\leqslant T,\\ 0, & t_1+r\leqslant t\leqslant T_1-r\end{cases}$$

принадлежит классу $C^\infty[0,T]$.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1.

Тогда для любой функции f из $L_2(Q)$, $f_t\in L_2(Q)$, существует и притом единственное решение краевой задачи (2.1)–(2.4) *$u(x,t)$ из $H_L(Q_T)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^{m,s}(Q_T)$.*

Доказательство. Единственность решения краевой задачи (2.1)–(2.4) следует из леммы 2.1.

Рассуждая как в теоремах 1.2 и 2.1 получим следующие априорные оценки

$$\int_0^{t_1}\Big\|\sqrt{\psi_{2[\frac{i+1}{2}]-1}}D_t^{s+[\frac{i+1}{2}]}\omega\Big\|_0^2dt\leqslant C_5\|f\|^2,\quad C_5>0,\quad i=\overline{1,2s+2},$$

$$\int_{T_1}^{T}\Big\|\sqrt{\psi_{2[\frac{i+1}{2}]-1}}D_t^{s+[\frac{i+1}{2}]}\omega\Big\|_0^2dt\leqslant C_6\|f\|^2,\ C_6>0,\ i=\overline{1,2s+2},$$

$$\varepsilon\Big\|\sqrt{\psi_{2[\frac{i+1}{2}]}}D_t^{s+1+[\frac{i+1}{2}]}\omega\Big\|^2 + \int_Q \psi_{2[\frac{i+1}{2}]}\Big\{\delta(D_t^{s+[\frac{i+1}{2}]}\omega)^2 + \sum_{|\alpha|=m}(D^{\alpha,[\frac{i+1}{2}]}\omega)^2\Big\}dQ \leqslant C_7\begin{cases}\|f\|^2, & i=\overline{1,2s+1},\\ \|f\|^2+\|f_t\|^2, & i=2s+2,\end{cases}$$

$$\int\limits_Q \psi_{2s+2}(M\omega)^2 dQ \leqslant C_8[\|f\|^2 + \|f_t\|^2], \quad C_8 > 0.$$

На основании этих неравенств следует утверждение вышеприведенной теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егоров И. Е., Федоров В. Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1995.

2. *Чуешев А. В.* Об одном нелинейном уравнении смешанного типа нечетного порядка // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 45, № 2. С. 354–472.

3. *Львов А. П.* Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения третьего порядка с меняющимся направлением времени // Мат. заметки ЯГУ. 2002. Т. 9, вып. 2. С. 91–95

4. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.

5. *Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. Г.* Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.

6. *Львов А. П.* Разрешимость нелокальной краевой задаче для уравнения третьего порядка по времени с меняющимся направлением эволюции // VII Лаврентьевские чтения: научн. конф. студентов и молодых ученых. Секция математика, механика, физика. Сб. статей. Т. 1. Якутск, 2003. С. 87–92

Егоров Иван Егорович
Россия, Якутск, Институт математики и информатики ЯГУ
`niipmi@sitc.ru`

Львов Антон Павлович
Россия, Якутск, Институт математики и информатики ЯГУ
`lvovap@yandex.ru`