УДК 517.9

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ФАЗОВОГО ПОЛЯ

В. Е. Федоров, М. А. Сагадеева

В работе методами теории уравнений соболевского типа исследованы вопросы существования экспоненциальных дихотомий, ограниченных, а также периодических решений начально-краевой задачи для линеаризованной системы уравнений фазового поля.

В данной работе полученные ранее авторами результаты, касающиеся необходимых и достаточных условий существования ограниченных, а также периодических решений линейных уравнений соболевского типа первого порядка в банаховых пространствах, использованы при исследовании начально-краевой задачи для линеаризованной системы уравнений фазового поля.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $\lambda, \alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = \overline{1, m}$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\theta(x,0) + \varphi_1(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial n}(x,t) + \lambda\theta(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{2}$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}(x,t) + \lambda\varphi_i(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \quad i = \overline{1,m}, \tag{3}$$

для системы уравнений

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial\varphi_1}{\partial t}(x,t) = \Delta\theta(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{4}$$

$$\Delta\varphi_1(x,t) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{1j}\varphi_j(x,t) + \theta(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{5}$$

$$\Delta\varphi_i(x,t) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\varphi_j(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \quad i = \overline{2,m}, \tag{6}$$

которая является линеаризацией в нуле квазистационарной системы уравнений фазового поля, описывающих в рамках мезоскопической теории фазовые переходы первого рода. Искомыми функциями в ней являются $\theta(x,t)$, $\varphi_i(x,t)$, $i = \overline{1,m}$. Разрешимость соответствующей нелинейной задачи исследовалась в [1, 2]. Нас будут интересовать вопросы существования зкспоненциальной дихотомии системы (2)–(6) и существования ограниченных, а также периодических решений неоднородной задачи. Они будут исследованы методами теории уравнений соболевского типа с относительно секториальными операторами [3, 4].

1. Линейные уравнения соболевского типа с относительно p-секториальными операторами

Этот параграф содержит краткое изложение полученных ранее авторами и используемых в дальнейших рассмотрениях результатов.

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ — банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$ (линейный непрерывный), $\ker L \neq \{0\}$, оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U};\mathcal{F})$ (линейный замкнутый с плотной областью определения). Введем обозначения

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})\}, \quad \sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M),$$

$$R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1} L, \quad L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1},$$

$$R^L_{(\lambda,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p} R^L_{\lambda_k}(M), \quad L^L_{(\lambda,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p} L^L_{\lambda_k}(M).$$

Определение 1. Оператор M называется *сильно* (L,p)*-секториальным*, если существуют константы $K > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\theta \in (\pi/2, \pi)$, такие, что $S^L_{a,\theta}(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta\} \subset \rho^L(M)$, причем

(i) для всех $\mu_k \in S^L_{a,\theta}(M)$, $k = \overline{0,p}$,

$$\max\{\|R^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}, \|L^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}\} \leq \frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p} |\mu_k - a|};$$

(ii) существует плотный в $\mathcal{F}$ линеал $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ такой, что при любых $\lambda, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p \in S^L_{a,\theta}(M)$, $f \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}$

$$\|M(\lambda L - M)^{-1} L^L_{(\mu,p)}(M) f\|_{\mathcal{F}} \leq \frac{\mathrm{const}(f)}{|\lambda - a| \prod\limits_{k=0}^{p} |\mu_k - a|}, \tag{7}$$

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})} \leq \frac{K}{|\lambda - a| \prod\limits_{k=0}^{p} |\mu_k - a|}.$$

Рассмотрим линейное однородное уравнение соболевского типа

$$L\,\dot{u}(t) = Mu(t). \tag{8}$$

Решения его будем искать в классе функций $C^1(\mathbb{R};\mathcal{U}) \cap C(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{U})$. Известно [3, 4], что задача Коши для уравнения (8) разрешима не при всех начальных данных, поэтому актуальным является следующее

Определение 2. Замкнутое множество $\mathcal{P} \subset \mathcal{U}$ называется *фазовым пространством* уравнения (8), если

(i) любое решение $u(t)$ уравнения (8) лежит в $\mathcal{P}$ (поточечно);

(ii) для любого u_0 из $\mathcal{P}$ существует единственное решение задачи $u(0) = u_0$ для уравнения (8).

Теорема 1 [3–5]. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален. Тогда*

(i) *существует аналитическая в секторе $\Sigma = \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \theta - \pi/2\}$ разрешающая полугруппа*

$$\left\{U^t = s\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k(p+1)}{t}R^L_{\frac{k(p+1)}{t}}(M)\right)^{k(p+1)} : t \in \Sigma\right\} \tag{9}$$

уравнения (8), *а также полугруппа операторов*

$$\left\{F^t = s\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k(p+1)}{t}L^L_{\frac{k(p+1)}{t}}(M)\right)^{k(p+1)} : t \in \Sigma\right\};$$

(ii) *существуют операторы $U^0 = s\text{-}\lim\limits_{t\to 0+} U^t \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, $F^0 = s\text{-}\lim\limits_{t\to 0+} F^t \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$, при этом $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$,* где $\mathcal{U}^0 = \ker U^0$, $\mathcal{U}^1 = \mathrm{im} U^0$, $\mathcal{F}^0 = \ker F^0$, $\mathcal{F}^1 = \mathrm{im} F^0$;

(iii) *фазовым пространством уравнения* (8) *является множество $\mathcal{U}^1$;*

(iv) *для любого $u_0 \in \mathcal{U}$ существует единственное решение задачи $U^0(u(0) - u_0) = 0$ для уравнения* (8);

(v) $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^k;\mathcal{F}^k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^k;\mathcal{F}^k)$, $k = 0, 1$;

(vi) *существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0;\mathcal{U}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$;*

(vii) *оператор $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0)$ нильпотентен степени не больше p.*

Через M_k (L_k) обозначено сужение оператора M (L) на $\mathrm{dom} M_k = \mathcal{U}^k \cap \mathrm{dom} M$ $(\mathcal{U}^k)$, $k = 0, 1$.

Пусть $\mathcal{P}$ — фазовое пространство уравнения (8). Множество $\mathcal{P}^1 \subset \mathcal{P}$ называется *инвариантным подпространством* этого уравнения, если при любом $u_0 \in \mathcal{P}^1$ существует единственное решение $u = u(t)$ задачи $u(0) = u_0$ для уравнения (8), причем $u(t) \in \mathcal{P}^1$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

Пусть $\mathcal{P}$ — фазовое пространство уравнения (8), причем $\mathcal{P} = \mathcal{P}^1 \oplus \mathcal{P}^2$, где $\mathcal{P}^k$ — инвариантное подпространство, $k = 1, 2$. Пусть, кроме того, при начальных значениях u_0 из $\mathcal{P}^2$ решения задачи $u(0) = u_0$ для уравнения (8) продолжимы на $\mathbb{R}$. Будем говорить, что уравнение (8) имеет *экспоненциальную дихотомию*, если выполняются следующие условия:

(i) $\exists N_1, \nu_1 > 0$ $\|u^1(t)\| \le N_1 e^{-\nu_1(s-t)}\|u^1(s)\|$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$ $\forall s \in [t, +\infty)$;

(ii) $\exists N_2, \nu_2 > 0$, $\|u^2(t)\| \le N_2 e^{-\nu_2(t-s)}\|u^2(s)\|$ $\forall s \in \mathbb{R}$ $\forall t \in [s, +\infty)$,

где решения уравнения $u^k(t) \in \mathcal{P}^k$, $k = 1, 2$.

Теорема 2 [6]. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален и L-спектр оператора M $\sigma^L(M)$ не пересекается с мнимой осью. Тогда уравнение* (8) *имеет экспоненциальную дихотомию.*

Для того, чтобы сформулировать теоремы о существовании ограниченного на всей прямой, а также о существовании периодического решения уравнения

$$L\,\dot{u}(t) = Mu(t) + f(t) \tag{10}$$

с функцией $f : \mathbb{R} \to \mathcal{F}$, введем обозначения $f^1 = F^0 f$, $f^0 = (I - F^0)f$.

Теорема 3 [7]. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален, L-спектр оператора M не пересекается с мнимой осью, а вектор-функция $f : \mathbb{R} \to \mathcal{F}$ такова, что*

(i) *вектор-функция $f^0 \in C^{p+1}(\mathbb{R}, \mathcal{F}^0)$ и все ее производные до порядка p включительно ограничены на $\mathbb{R}$,*

(ii) *вектор-функция $f^1 : \mathbb{R} \to \mathcal{F}$ ограничена на $\mathbb{R}$.*

Если, кроме того, f^1 удовлетворяет условию Гельдера на $\mathbb{R}$ или непрерывна в норме графика оператора $M_1L_1^{-1}$, то уравнение (10) имеет единственное ограниченное на $\mathbb{R}$ решение $u \in C^1(\mathbb{R},\mathcal{U})$.

Теорема 4 [8]. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален, $\frac{2k\pi i}{T} \notin \sigma^L(M)$, $k \in \mathbb{Z}$, T-периодическая вектор-функция $f : \mathbb{R} \to \mathcal{F}^0 \dot{+} L[\mathrm{dom} M_1]$ такова, что $f^0 \in C^{p+1}(\mathbb{R},\mathcal{F}^0)$, а f^1 непрерывна в норме графика оператора $M_1L_1^{-1}$. Тогда уравнение (10) имеет единственное T-периодическое решение $u \in C^1(\mathbb{R},\mathcal{U})$, причем*

$$u(t) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2k\pi i}{T}L_1 - M_1\right)^{-1} e^{\frac{2k\pi i(t-s)}{T}} f^1(s)ds - \sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1} f^{0(q)}(t).$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда множество $\mathbb{K} = \{k \in \mathbb{Z} : \frac{2k\pi i}{T} \in \sigma^L(M)\}$ не пусто. Так как оператор M сильно (L,p)-секториален, то $\mathbb{K}$ — конечное множество. Через f_k^1 обозначим коэффициенты Фурье для f^1 относительно системы функций $\{e^{\frac{2k\pi it}{T}} : k \in \mathbb{Z}\}$ на отрезке $[0,T]$.

Теорема 5 [8]. *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален, $\mathbb{K} \neq \oslash$, T-периодическая вектор-функция $f : \mathbb{R} \to \mathcal{F}^0 \dot{+} L[\mathrm{dom} M_1]$ такова, что $f^0 \in C^{p+1}(\mathbb{R},\mathcal{F}^0)$, а f^1 непрерывна в норме графика оператора $M_1L_1^{-1}$. Тогда уравнение (10) имеет T-периодическое решение $u \in C^1(\mathbb{R},\mathcal{U})$ в том и только в том случае, когда каждое из уравнений*

$$\left(\frac{2k\pi i}{T}L_1 - M_1\right)u_k^1 = f_k^1, \quad k \in \mathbb{K}, \tag{11}$$

имеет хотя бы одно решение $u_k^1 \in \mathcal{U}^1$. При этом

$$u(t) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{K}} \left(\frac{2k\pi i}{T}L_1 - M_1\right)^{-1} e^{\frac{2k\pi i(t-s)}{T}} f^1(s)ds+$$

$$+\sum_{k\in\mathbb{K}} \widetilde{u}_k^1 e^{\frac{2k\pi it}{T}} - \sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1} f^{0(q)}(t),$$

где $\widetilde{u}_k^1$, $k \in \mathbb{K}$, — какие-либо решения уравнений (11).

2. Линеаризованная система уравнений фазового поля

Редуцируем задачу (2)–(6) к уравнению (8). Сначала сделаем замены $\theta(x,t)+\varphi_1(x,t) = v(x,t)$, $\varphi_i(x,t) = w_i(x,t)$, $i = \overline{1,m}$. Тогда задача (1)–(6) примет вид

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{12}$$

$$\frac{\partial v}{\partial n}(x,t) + \lambda v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{13}$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial n}(x,t) + \lambda w_i(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \quad i = \overline{1,m}, \tag{14}$$

$$v_t(x,t) = \Delta v(x,t) - \Delta w_1(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{15}$$

$$\Delta w_1(x,t) + (\alpha_{11} - 1)w_1(x,t) + \sum_{j=2}^{m} \alpha_{1j} w_j(x,t) + v(x,t) = 0, \ (x,t) \in \Omega \times (0,T), \tag{16}$$

$$\Delta w_i(x,t)+\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}w_j(x,t)=0,\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T),\quad i=\overline{2,m}. \tag{17}$$

Возьмем $\mathcal{U}=\mathcal{F}=(L_2(\Omega))^{m+1}$,

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix} \Delta & -\Delta & 0 & \dots & 0\\ 1 & \alpha_{11}-1+\Delta & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m}\\ 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22}+\Delta & \dots & \alpha_{2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mm}+\Delta\end{pmatrix},$$

$\operatorname{dom} M=\{(v,w_1,\dots,w_m)\in(H^2(\Omega))^{m+1}:\left(\frac{\partial}{\partial n}+\lambda\right)v(x)=\left(\frac{\partial}{\partial n}+\lambda\right)w_i(x)=0,\ x\in\partial\Omega, i=\overline{1,m}\}$. Тем самым определены операторы $L\in\mathcal{L}(\mathcal{U})$, $M\in\mathcal{C}l(\mathcal{U})$. При этом $\ker L=\{0\}\times(L_2(\Omega))^m$.

Обозначим $Az=\Delta z$, $\operatorname{dom}A=H^2_{\frac{\partial}{\partial n}+\lambda}(\Omega)=\{z\in H^2(\Omega):\frac{\partial z}{\partial n}(x)+\lambda z(x)=0,\ x\in\partial\Omega\}$. Через $\{\varphi_k:k\in\mathbb{N}\}$ обозначим ортонормированные в смысле скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в $L_2(\Omega)$ собственные функции оператора A, занумерованные по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k:k\in\mathbb{N}\}$ с учетом их кратности. Кроме того, введем в рассмотрение оператор $B:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$, задаваемый матрицей

$$B=\begin{pmatrix} 1-\alpha_{11} & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1m}\\ -\alpha_{21} & -\alpha_{22} & \dots & -\alpha_{2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -\alpha_{m1} & -\alpha_{m2} & \dots & -\alpha_{mm}\end{pmatrix}.$$

Теорема 6. *Пусть $\sigma(A)\cap\sigma(B)=\oslash$. Тогда оператор M является сильно $(L,0)$-секториальным.*

Доказательство. Имеем оператор

$$\mu L-M=\begin{pmatrix} \mu-A & A & 0 & \dots & 0\\ -1 & 1-\alpha_{11}-A & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1m}\\ 0 & -\alpha_{21} & -\alpha_{22}-A & \dots & -\alpha_{2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & -\alpha_{m1} & -\alpha_{m2} & \dots & -\alpha_{mm}-A\end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\Lambda_\mu^k=\begin{pmatrix} \mu-\lambda_k & \lambda_k & 0 & \dots & 0\\ -1 & 1-\alpha_{11}-\lambda_k & -\alpha_{12} & \dots & -\alpha_{1m}\\ 0 & -\alpha_{21} & -\alpha_{22}-\lambda_k & \dots & -\alpha_{2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & -\alpha_{m1} & -\alpha_{m2} & \dots & -\alpha_{mm}-\lambda_k\end{pmatrix},$$

Λ^k — матрица Λ_μ^k с вычеркнутыми первой строкой и первым столбцом, $\Lambda_{i,j}^k$ — матрица Λ_μ^k с вычеркнутыми первой и i-й строками и первым и j-м столбцом, $i,j=\overline{2,m+1}$. Тогда определитель $|\Lambda_\mu^k|=(\mu-\lambda_k)|\Lambda^k|+\lambda_k|\Lambda_{2,2}^k|$. Используя

разложение по базису $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ в $L_2(\Omega)$, нетрудно получить

$$(\mu L - M)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{|\Lambda^k_\mu|} & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{-\lambda_k|\Lambda^k_{2,2}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{|\Lambda^k_\mu|} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k|\Lambda^k_{m+1,2}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-1)^m|\Lambda^k_\mu|} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k_{2,2}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{|\Lambda^k_\mu|} & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu-\lambda_k)|\Lambda^k_{2,2}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{|\Lambda^k_\mu|} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu-\lambda_k)|\Lambda^k_{m+1,2}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-1)^{m+1}|\Lambda^k_\mu|} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k_{2,m+1}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-1)^{m+1}|\Lambda^k_\mu|} & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu-\lambda_k)|\Lambda^k_{2,m+1}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-1)^{m+1}|\Lambda^k_\mu|} & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

В силу условия $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \oslash$ имеем для всех $k \in \mathbb{N}$ $|\Lambda^k| \neq 0$. Обозначим $\mu_k = \lambda_k(1 - |\Lambda^k|^{-1}|\Lambda^k_{2,2}|)$, тогда $\sigma^L(M) = \{\mu_k : k \in \mathbb{N}\}$,

$$R^L_\mu(M) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{\mu-\mu_k} & 0 & \ldots & 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k_{2,2}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{|\Lambda^k|(\mu-\mu_k)} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k_{2,m+1}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-1)^{m+1}|\Lambda^k|(\mu-\mu_k)} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

$$L^L_\mu(M) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{\mu-\mu_k} & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{-\lambda_k|\Lambda^k_{2,2}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{|\Lambda^k|(\mu-\mu_k)} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k|\Lambda^k_{m+1,2}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-1)^m|\Lambda^k|(\mu-\mu_k)} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

$$R^L_\mu(M)(\nu L - M)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(\mu-\mu_k)(\nu-\mu_k)} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k|\Lambda^k_{m+1,2}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-1)^m|\Lambda^k|(\mu-\mu_k)(\nu-\mu_k)} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k_{2,2}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{|\Lambda^k|(\mu-\mu_k)(\nu-\mu_k)} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k|\Lambda^k_{2,2}||\Lambda^k_{m+1,2}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-1)^m|\Lambda^k|^2(\mu-\mu_k)(\nu-\mu_k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}|\Lambda^k_{2,m+1}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{|\Lambda^k|(\mu-\mu_k)(\nu-\mu_k)} & \ldots & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k|\Lambda^k_{2,m+1}||\Lambda^k_{m+1,2}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{-|\Lambda^k|^2(\mu-\mu_k)(\nu-\mu_k)} \end{pmatrix}.$$

В условиях теоремы $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}}|\Lambda^k| > 0$ в силу дискретности спектра $\sigma(A)$, а поскольку он сгущается к $-\infty$, то

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_k|\Lambda^k_{i,i}|}{|\Lambda^k|} = -1, \ \ i = \overline{2, m+1}, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_k|\Lambda^k_{i,j}|}{|\Lambda^k|} = 0, \ \ i \neq j,$$

и поэтому

$$\max_{i,j=\overline{2,m+1}} \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \frac{\lambda_k|\Lambda^k_{i,j}|}{|\Lambda^k|} \right| < \infty, \quad a = \sup_{k\in\mathbb{N}} \mu_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k \left(1 - \frac{|\Lambda^k_{2,2}|}{|\Lambda^k|}\right) < +\infty.$$

Поэтому существует $K > 0$, что для всех $\mu \in S^L_{a,\theta}(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu-a)| < \theta\}$, где $\theta \in (\pi/2, \pi)$ любое,

$$\max\left\{\|R^L_\mu(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}, \|L^L_\mu(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}\right\} \leq \frac{K}{|\mu - a|},$$

$$\|R^L_\mu(M)(\nu L-M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \le \frac{K}{|\mu-a||\nu-a|}.$$

Отсюда в силу гильбертовости пространств следует также выполнение неравенства (7) на плотном линеале $\overset{\circ}{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^0 \dot{+} L[\mathrm{dom}M]$ (см. [5]). Таким образом, оператор M сильно $(L,0)$-секториален.

Теорема доказана.

Замечание 1. Полугруппу системы (13)–(17) можно найти по формуле (9):

$$\Big((n/t)R^L_{n/t}(M)\Big)^n = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(1-\mu_k t/n)^n} & 0 & \dots & 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k_{2,2}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{|\Lambda^k|(1-\mu_k t/n)^n} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k_{2,m+1}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-1)^{m+1}|\Lambda^k|(1-\mu_k t/n)^n} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$U^t = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \exp\left(t\lambda_k\left(1-\frac{|\Lambda^k_{2,2}|}{|\Lambda^k|}\right)\right)\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k & 0 & \dots & 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k_{2,2}|\exp\;\; t\lambda_k\;\; 1-\frac{|\Lambda^k_{2,2}|}{|\Lambda^k|}\;\;\;\; \langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{|\Lambda^k|} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\Lambda^k_{2,m+1}|\exp\;\; t\lambda_k\;\; 1-\frac{|\Lambda^k_{2,2}|}{|\Lambda^k|}\;\;\;\; \langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-1)^{m+1}|\Lambda^k|} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что эта полугруппа, а потому и все решения задачи (12)–(17) аналитичны по t во всей правой полуплоскости. Аналогично получим

$$F^t = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{t\mu_k}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{e^{t\mu_k}\lambda_k|\Lambda^k_{2,2}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{-|\Lambda^k|} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{e^{t\mu_k}\lambda_k|\Lambda^k_{m+1,2}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-1)^m|\Lambda^k|} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

В силу теоремы 2 справедлива следующая

Теорема 7. *Пусть* $\sigma(A)\cap\sigma(B)=\oslash$, *для всех* $k\in\mathbb{N}$ *выполняется* $\lambda_k\ne 0$ *и* $|\Lambda^k|\ne|\Lambda^k_{2,2}|$. *Тогда задача (13)–(17) имеет экспоненциальную дихотомию.*

Для начально-краевой задачи (12)–(14) для неоднородной системы уравнений

$$v_t(x,t) = \Delta v(x,t) - \Delta w_1(x,t) + f(x,t), \quad (x,t)\in\Omega\times(0,T), \tag{18}$$

$$\Delta w_1(x,t)+(\alpha_{11}-1)w_1(x,t)+\sum_{j=2}^{m}\alpha_{1j}w_j(x,t)+v(x,t)+g_1(x,t)=0,\ (x,t)\in\Omega\times(0,T), \tag{19}$$

$$\Delta w_i(x,t)+\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}w_j(x,t)+g_i(x,t)=0, \quad (x,t)\in\Omega\times(0,T), \quad i=\overline{2,m}, \tag{20}$$

сформулируем теорему разрешимости.

Теорема 8. *Пусть* $\sigma(A)\cap\sigma(B)=\oslash$, *функции* $f,g_i\in C^1(\mathbb{R};L_2(\Omega))$, $i=\overline{1,m}$. *Тогда для любого* $v_0\in L_2(\Omega)$ *существует единственное решение начально-краевой задачи (12)–(14) для системы (18)–(20).*

Доказательство. Начальное условие (12) для рассматриваемой системы можно записать в виде $U^0(u(0)-u_0)=0$. Из теоремы 1 (iv) следует требуемое.

Теорема доказана

Теорема 3 влечет следующее утверждение.

Теорема 9. *Пусть $\sigma(A)\cap\sigma(B)=\oslash$, для всех $k\in\mathbb{N}$ выполняется $\lambda_k\neq 0$ и $|\Lambda^k|\neq|\Lambda^k_{2,2}|$, функции $f,g_i\in C^1(\mathbb{R};L_2(\Omega))$ ограничены, $i=\overline{1,m}$. Тогда существует единственное ограниченное решение задачи (13), (14) для системы (18)–(20).*

Теорема 10. *Пусть $\sigma(A)\cap\sigma(B)=\oslash$, для всех $k\in\mathbb{N}$ выполняется $\lambda_k\neq 0$ и $|\Lambda^k|\neq|\Lambda^k_{2,2}|$, T-периодические функции $g_i\in C^1(\mathbb{R};L_2(\Omega))$, $i=\overline{1,m}$, а T-периодическая функция f непрерывна в норме графика оператора $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu_k\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k$. Тогда система (18)–(20) имеет одно и только одно T-периодическое решение класса $C^1(\mathbb{R};(L_2(\Omega))^{m+1})$, которое имеет вид*

$$\begin{pmatrix} v(x,t)\\ w_1(x,t)\\ \vdots\\ w_m(x,t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \int\limits_0^T\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{l=-\infty}^{+\infty}\frac{\exp\left(\frac{2l\pi i(t-s)}{T}\right)\langle f(\cdot,s),\varphi_k(\cdot)\rangle\varphi_k(x)}{2l\pi i-\mu_kT}\,ds\\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{|\Lambda^k_{i+1,2}|\langle g_i(\cdot,t),\varphi_k(\cdot)\rangle\varphi_k(x)}{(-1)^i|\Lambda^k|}\\ \vdots\\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{|\Lambda^k_{i+1,m+1}|\langle g_i(\cdot,t),\varphi_k(\cdot)\rangle\varphi_k(x)}{(-1)^{i+m-1}|\Lambda^k|}\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Построим оператор M_0^{-1}. Имеем подпространства $\mathcal{U}^0=\{0\}\times(L_2(\Omega))^m$, $\mathcal{F}^0=\left\{\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{\lambda_k|\Lambda^k_{i+1,2}|\langle g_i,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-1)^{i+1}|\Lambda^k|},g_1,\dots,g_m\right):g_i\in L_2(\Omega),\ i=\overline{1,m}\right\}$, изоморфные $(L_2(\Omega))^m$. Возьмем вектор из $\mathcal{U}^0$ вида $(0,w_1,\dots,w_m)$, подействуем на него оператором M и приравняем к вектору из $\mathcal{F}^0$. Тогда при k-той собственной функции φ_k получим систему уравнений для коэффициентов Фурье

$$\begin{cases} -\langle w_1,\varphi_k\rangle=\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{|\Lambda^k_{i+1,2}|\langle g_i,\varphi_k\rangle}{(-1)^{i+1}|\Lambda^k|}\\ (\alpha_{11}-1+\lambda_k)\langle w_1,\varphi_k\rangle+\sum\limits_{i=2}^{m}\alpha_{1i}\langle w_i,\varphi_k\rangle=\langle g_1,\varphi_k\rangle\\ (\alpha_{22}+\lambda_k)\langle w_2,\varphi_k\rangle+\sum\limits_{i=1,\ i\neq 2}^{m}\alpha_{2i}\langle w_i,\varphi_k\rangle=\langle g_2,\varphi_k\rangle\\ \dots\\ (\alpha_{mm}+\lambda_k)\langle w_m,\varphi_k\rangle+\sum\limits_{i=1}^{m-1}\alpha_{mi}\langle w_i,\varphi_k\rangle=\langle g_m,\varphi_k\rangle.\end{cases}$$

Выразим $w_1,\dots,w_m$ через $g_1,\dots,g_m$. Получим оператор

$$M_0^{-1}=\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|\Lambda^k_{2,2}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{-|\Lambda^k|} & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|\Lambda^k_{3,2}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{|\Lambda^k|} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|\Lambda^k_{m+1,2}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-1)^m|\Lambda^k|}\\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|\Lambda^k_{2,3}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{|\Lambda^k|} & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|\Lambda^k_{3,3}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{-|\Lambda^k|} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|\Lambda^k_{m+1,3}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-1)^{m+1}|\Lambda^k|}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|\Lambda^k_{2,m+1}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-1)^m|\Lambda^k|} & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|\Lambda^k_{3,m+1}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(-1)^{m+1}|\Lambda^k|} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{|\Lambda^k_{m+1,m+1}|\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{-|\Lambda^k|}\end{pmatrix}.$$

Теперь построим операторы L_1 и M_1. Возьмем вектор u из подпространства

$$\mathcal{U}^1=\left\{\left(\sum_{k=1}^{\infty}v_k\varphi_k,\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\Lambda_{2,2}^k|v_k\varphi_k}{|\Lambda^k|},\dots,\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\Lambda_{2,m+1}^k|v_k\varphi_k}{(-1)^{m+1}|\Lambda^k|}\right)\in(L_2(\Omega))^{m+1}:\{v_k\}\in l_2\right\},$$

изоморфного пространству $L_2(\Omega)$, подействуем на него операторами L и M и получим $Lu=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k\varphi_k,0,\dots,0\right)$, $Mu=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k(1-|\Lambda^k|^{-1}|\Lambda_{2,2}^k|)v_k\varphi_k,0,\dots,0\right)$. Учитывая равенство $\mathcal{F}^1=L_2(\Omega)\times\{0\}\times\dots\times\{0\}$, можно считать, что $L_1=I$, $M_1=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu_k\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k$. Осталось воспользоваться теоремой 4.

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь общий случай, когда множество $\mathbb{L}=\{l\in\mathbb{Z}:\frac{2l\pi i}{T}\in\sigma^L(M)\}$ не пусто. В силу вещественности относительного спектра $\sigma^L(M)$ рассматриваемой системы возможен лишь вариант, что $\mathbb{L}=\{0\}$. В силу теоремы 5 справедлива следующая

Теорема 11. *Пусть $\sigma(A)\cap\sigma(B)=\varnothing$, функции $g_i\in C^1(\mathbb{R};L_2(\Omega))$, $i=\overline{1,m}$ являются T-периодическими, а T-периодическая функция f непрерывна в норме графика оператора $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu_k\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k$. Тогда система* (18)–(20) *имеет T-периодическое решение класса $C^1(\mathbb{R},\mathcal{U})$ в том и только в том случае, когда система уравнений*

$$-\mu_k\int\limits_0^T\langle v(\cdot,t),\varphi_k(\cdot)\rangle dt=\int\limits_0^T\langle f(\cdot,t),\varphi_k(\cdot)\rangle dt,\quad k\in\mathbb{N},\tag{21}$$

имеет хотя бы одно решение $v\in L_2(\Omega)$. При этом

$$\begin{pmatrix}v(x,t)\\ w_1(x,t)\\ \vdots\\ w_m(x,t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\int\limits_0^T\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{\exp\left(\frac{2l\pi i(t-s)}{T}\right)\langle f(\cdot,s),\varphi_k(\cdot)\rangle\varphi_k(x)}{2l\pi i-\mu_kT}\,ds+\widetilde{v}\\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{|\Lambda_{i+1,2}^k|\langle g_i(\cdot,t),\varphi_k(\cdot)\rangle\varphi_k(x)}{(-1)^i|\Lambda^k|}\\ \vdots\\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{|\Lambda_{i+1,m+1}^k|\langle g_i(\cdot,t),\varphi_k(\cdot)\rangle\varphi_k(x)}{(-1)^{i+m-1}|\Lambda^k|}\end{pmatrix},$$

где $\widetilde{v}$ — какое-либо решение системы (21).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Плотников П. И., Старовойтов В. Н.* Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел модели фазового поля // Диффер. уравн. 1993. Т. 29, № 3. С. 461–471.
2. *Плотников П. И., Клепачева А. В.* Уравнения фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 3. С. 651–669.
3. *Свиридюк Г. А., Федоров В. Е.* О единицах аналитических полугрупп операторов с ядрами // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 3. С. 604–616.
4. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.

5. *Федоров В. Е.* Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 8. С. 131–160.

6. *Сагадеева М. А.* Экспоненциальные дихотомии решений одного класса уравнений соболевского типа // Вестн. Челяб. ун-та. Сер. 3. Математика. Механика. Информатика. 2003. № 1. С. 136–145.

7. *Федоров В. Е., Сагадеева М. А.* Об ограниченных на прямой решениях линейных уравнений соболевского типа с относительно секториальными операторами // Изв. вузов. Математика. 2005. № 4. С. 81–84.

8. *Федоров В. Е., Сагадеева М. А.* Периодические решения линейных уравнений соболевского типа // Вестн. МаГУ. Математика. Вып. 4. Магнитогорск: МаГУ, 2003. С. 223–236.

Федоров Владимир Евгеньевич
Россия, Челябинск, Челябинский государственный университет
`kar@csu.ru`

Сагадеева Минзиля Алмасовна
Россия, Челябинск, Челябинский государственный университет
`sam@csu.ru`