УДК 517.95

О ЗАДАЧАХ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДВУХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОДНОМЕРНОГО ПОЛУЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Ю. Я. Белов, И. В. Фроленков

В работе рассмотрена задача идентификации функции источника и коэффициента при нелинейном члене и задача идентификации коэффициентов при производной по времени и нелинейном члене для одномерного полулинейного параболического уравнения с нелинейностью достаточно общего вида. В случае первой и второй краевых задач доказана однозначная классическая разрешимость указанных задач в "малом" в классе достаточно гладких, ограниченных вместе с соответствующими производными функций. В случае задачи Коши вопросы идентификации двух коэффициентов полулинейного параболического уравнения изучены в [1, 2]. Некоторые задачи идентификации двух коэффициентов см. в [3–6]. Случаи краевых задач также рассматривались в [7].

1. Идентификация функции источника и коэффициента при нелинейном члене

Рассмотрим в области $G_{[0,T]} = \{(t,x,z)|\ 0 \le t \le T,\ 0 \le x \le \pi\}$ первую краевую задачу

$$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + \lambda_1(t)M(t,u(t,x)) + \lambda_2(t)f(t,x), \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \tag{2}$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0. \tag{3}$$

Здесь функции $M(t,y)$, $u_0(x)$, $f(t,x)$ действительнозначные и заданы в $[0,T]\times E_1$, E_1 и $[0,T]\times E_1$ соответственно, E_1 — одномерное евклидово пространство.

Функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ подлежат определению одновременно с решением $u(t,x)$ задачи (1)–(3), удовлетворяющим условиям переопределения

$$u(t,a) = \varphi_1(t), \quad u_x(t,a) = \varphi_2(t) \tag{4}$$

для некоторой фиксированной точки $0 < a < \pi$.

Считаем выполненными условия согласования

$$u_0(a) = \varphi_1(0), \quad \frac{\partial}{\partial x}u_0(a) = \varphi_2(0). \tag{5}$$

Предположим, что функция $M(t,y)$ достаточно гладкая (имеет все непрерывные производные, входящие в следующее ниже соотношение) и

$$|M^{(j)}(t,y)| \le M_0(1+|y|^p), \quad j=0,1,\dots,5, \quad 0\le t\le T, \quad y\in E_1.$$

Здесь M_0 — постоянная, $p \geq 1$ — целое,

$$M^{(j)}(t, y) = \frac{\partial^j}{\partial y^j} M(t, y), \quad M^{(0)}(t, y) = M(t, y).$$

Пусть при $0 \leq t \leq T$

$$|\Delta(t)| \geq \delta > 0, \quad \delta - \text{const}, \tag{6}$$

где

$$\Delta(t) = M(t, \varphi_1(t)) f_x(t, a) - M^{(1)}(t, \varphi_1(t)) \varphi_2(t) f(t, a).$$

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие (имеют все непрерывные производные, входящие в следующие ниже соотношения) и при $(t, x) \in G^*_{[0,T]} = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq T, x \in E_1\}$

$$\left|\frac{d^i}{dt^i} \varphi_1(t)\right| + \left|\frac{d^i}{dt^i} \varphi_2(t)\right| + \left|\frac{d^j}{dx^j} u_0(x)\right| + \left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} f(t, x)\right| \leq C, \quad i = 0, 1, \ j = 0, \ldots, 5. \tag{7}$$

Функции $u_0(x)$ и $f(t, x)$ нечетным образом продолжаются по переменной x на E_1

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \sin kx, \quad f(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(t) \sin kx, \quad \alpha_k - \text{const}, \quad \beta_k(t) \in C[0, T]. \tag{8}$$

Считаем, что постоянная $C > 1$.

Также предполагаем, что справедливо следующее условие при $(t, x) \in G^*_{[0,T]}$

$$M(t, v(t, x)) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k(t) \sin kx \tag{9}$$

для любых $v(t, x)$ таких, что

$$v(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) \sin kx.$$

Здесь коэффициенты $M_k(t)$ могут быть различны и зависят от выбора функции $v(t, x)$.

Используя условия переопределения (4), найдем выражение неизвестных коэффициентов через решение $u(t, x)$

$$\lambda_1(t) = \frac{(\varphi_{1t} - u_{xx}|_{x=a}) f_x(t, a) - (\varphi_{2t} - u_{xxx}|_{x=a}) f(t, a)}{M(t, \varphi_1(t)) f_x(t, a) - M^{(1)}(t, \varphi_1(t)) \varphi_2(t) f(t, a)},$$

$$\lambda_2(t) = \frac{-(\varphi_{1t} - u_{xx}|_{x=a}) M^{(1)}(t, \varphi_1) \varphi_2 + (\varphi_{2t} - u_{xxx}|_{x=a}) M(t, \varphi_1)}{M(t, \varphi_1(t)) f_x(t, a) - M^{(1)}(t, \varphi_1(t)) \varphi_2(t) f(t, a)}.$$

Перепишем выражения для коэффициентов в следующем виде

$$\lambda_1(t) = A_1 + A_2 u_{xx}|_{x=a} + A_3 u_{xxx}|_{x=a}, \quad \lambda_2(t) = B_1 + B_2 u_{xx}|_{x=a} + B_3 u_{xxx}|_{x=a}.$$

Здесь

$$A_1(t) = \frac{\varphi_{1t} f_x|_{x=a} - \varphi_{2t} f|_{x=a}}{\Delta(t)}, \quad A_2(t) = \frac{-f_x|_{x=a}}{\Delta(t)}, \quad A_3(t) = \frac{f|_{x=a}}{\Delta(t)},$$

$$B_1(t) = \frac{\varphi_{2t} M(t,\varphi_1) - \varphi_{1t} M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2}{\Delta(t)}, \quad B_2(t) = \frac{M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2}{\Delta(t)},$$

$$B_3(t) = \frac{-M(t,\varphi_1(t))}{\Delta(t)}$$

— известные функции.

Рассмотрим теперь в $G^*_{[0,T]}$ прямую задачу Коши, которая получается из (1), (2) заменой функций $u_0(x)$ и $f(t,x)$ на их продолжения нечетным образом на всю числовую ось по x (обозначения продолжений оставим прежними).

$$u_t = u_{xx} + [A_1(t) + A_2(t)u_{xx}(t,a) + A_3(t)u_{xxx}(t,a)]\, M(t,u) + \\ + [B_1(t) + B_2(t)u_{xx}(t,a) + B_3(t)u_{xxx}(t,a)]\, f(t,x), \quad (10)$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in E_1. \quad (11)$$

Теперь расщепим данную задачу (см. [8, 9]) и линеаризуем ее сдвигом по времени на $(t - \frac{\tau}{3})$ на втором и третьем дробных шагах

$$u^\tau_t = 3u^\tau_{xx}(t,x), \quad n\tau < t \le \Big(n + \frac{1}{3}\Big)\tau, \quad (12)$$

$$u^\tau_t = 3R^\tau_1(t) M(t, u^\tau(t - \frac{\tau}{3}, x)), \quad \Big(n + \frac{1}{3}\Big)\tau < t \le \Big(n + \frac{2}{3}\Big)\tau, \quad (13)$$

$$u^\tau_t = 3R^\tau_2(t) f(t,x), \quad \Big(n + \frac{2}{3}\Big)\tau < t \le (n+1)\tau, \quad (14)$$

$$u^\tau|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in E_1. \quad (15)$$

Здесь $n = 0, 1, \ldots, N-1$, $\tau N = T$, $u^\tau = u^\tau(t) = u^\tau(t,x)$,

$$R^\tau_1(t) = A_1(t) + A_2(t)u^\tau_{xx}(t - \frac{\tau}{3}, a) + A_3(t)u^\tau_{xxx}(t - \frac{\tau}{3}, a),$$

$$R^\tau_2(t) = B_1(t) + B_2(t)u^\tau_{xx}(t - \frac{\tau}{3}, a) + B_3(t)u^\tau_{xxx}(t - \frac{\tau}{3}, a).$$

Доказано, что для решения расщепленной задачи (12)–(15) $u^\tau(t,x)$ справедливы следующие равномерные по τ оценки при $(t,x) \in G^*_{[0,t^*]}$

$$\Big|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k}{\partial x^k} u^\tau(t,x)\Big| + \Big|\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^k}{\partial x^k} u^\tau(t,x)\Big| \le C, \quad k = 0,1,2,3,$$

здесь t^* — некоторая постоянная, зависящая от констант a (см. (4)), δ (см. (6)) и константы C, ограничивающей начальные данные (см. (7)), такая, что $0 < t^* \le T$.

Рассмотрим уравнение (12) с начальным условием (15). В силу (8) решение данного уравнения при $t \in (0, \frac{\tau}{3}]$ представимо в виде

$$u^\tau(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e^{-3k^2 t} \sin kx,$$

и, следовательно, $u^\tau(t,0) = u^\tau(t,\pi) = 0$ при $t \in (0, \frac{\tau}{3}]$.

Рассмотрим уравнение (13) с начальным условием

$$u^\tau\Big(\frac{\tau}{3}, x\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e^{-k^2\tau} \sin kx.$$

Проинтегрируем уравнение (13) по временной переменной по отрезку $(\frac{\tau}{3}, t]$. В силу (9) решение на временном отрезке $t \in (\frac{\tau}{3}, \frac{2\tau}{3}]$ представимо в виде

$$u^\tau(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\alpha_k e^{-k^2\tau} + \int\limits_{\frac{\tau}{3}}^{t} 3R_1^\tau(\theta) M_k(\theta)\, d\theta \right] \sin kx.$$

Следовательно, $u^\tau(t,0) = u^\tau(t,\pi) = 0$ при $t \in (0, \frac{2\tau}{3}]$.

Аналогично, рассматривая третье уравнение, учитывая, что начальные данные $u^\tau(\frac{2\tau}{3})$ — нечетная функция, представимая в виде разложения в ряд по синусам, а также в силу (8) получим, что $u^\tau(t,0) = u^\tau(t,\pi) = 0$ при $t \in (0, \tau]$.

Проделывая аналогичные рассуждения на следующем целом временном шаге, получим, что $u^\tau(t,0) = u^\tau(t,\pi) = 0$ при $t \in (0, 2\tau]$. Через конечное число шагов

$$u^\tau(t,0) = u^\tau(t,\pi) = 0 \quad \text{при} \quad t \in (0, t^*]. \tag{16}$$

В силу теоремы Арцела о компактности некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x)$ последовательности $u^\tau(t,x)$ решений задачи (12)–(15) сходится вместе с производными по x до третьего порядка включительно к функции $u(t,x) \in C^{1,3}_{t,x}(G^*_{[0,t^*]})$, где

$$C^{1,3}_{t,x}(G^*_{[0,t^*]}) = \Big\{ f(t,x) |\ f, f_t \in C(G^*_{[0,t^*]}),\ \frac{\partial^k}{\partial x^k} f \in C(G^*_{[0,t^*]}),\ k = \overline{0,3} \Big\}.$$

На основании одной теоремы метода слабой аппроксимации (см. [9] § 2.4) $u(t,x)$ есть решение задачи (10), (11). При $(t,x) \in G^*_{[0,t^*]}$ справедливо неравенство

$$\Big| \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(t,x) \Big| \le C, \quad k = \overline{0,3}.$$

В силу (16) для функции $u(t,x)$ выполняется $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ при $t \in (0, t^*]$, и, следовательно, в качестве решения исходной краевой задачи (1)–(3) можно взять сужение на $G_{[0,t^*]}$ решения задачи Коши для уравнения (1) с начальными данными, являющимися указанным в (8) продолжением функции $u_0(x)$, и условиями переопределения (4).

Единственность решения исходной краевой задачи будет следовать из теоремы единственности, доказанной для решения задачи Коши (см. [1, 2])

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (4)–(9)*. Тогда существует решение* $u(t,x)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (1)–(3) *в классе*

$$Z(t^*) = \{u(t,x),\, \lambda_1(t),\, \lambda_2(t) \mid u \in C^{1,3}_{t,x}(G_{[0,t^*]}),\, \lambda_1(t),\, \lambda_2(t) \in C([0,t^*])\},$$

удовлетворяющее соотношению

$$|\lambda_1(t)| + |\lambda_2(t)| + \sum_{k=0}^{3} \Big| \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(t,x) \Big| \le C,\ (t,x) \in G_{[0,t^*]}, \tag{17}$$

Теорема 2. *Решение* $u(t,x)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (1)–(6)*, удовлетворяющее соотношению* (17)*, единственно в классе* $Z(t^*)$.

Из теорем 1, 2 следует

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (4)–(9). *Тогда существует и единственно решение* $u(t,x)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (1)–(3) *в классе* $Z(t^*)$, *удовлетворяющее соотношению* (17).

Замечание. В случае второй краевой задачи (1), (2), (18), где

$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, \tag{18}$$

при выполнении условий

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos kx, \quad f(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(t) \cos kx, \quad \alpha_k - \mathrm{const}, \quad \beta_k(t) \in C[0,T], \tag{19}$$

$$M(t,v) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k(t) \cos kx \ \text{ для любой } \ v(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) \cos kx, \tag{20}$$

справедливы аналогичные теоремы.

2. Идентификация коэффициентов при производной по времени и нелинейном члене

Рассмотрим в области $G_{[0,T]} = \{(t,x) \mid 0 \le t \le T,\ 0 \le x \le \pi\}$ первую краевую задачу

$$\lambda_1(t) u_t(t,x) = u_{xx} + \lambda_2(t) M(t, u(t,x)) + f(t,x), \tag{21}$$

$$u(0,x) = u_0(x). \tag{22}$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0. \tag{23}$$

Функции $M(t,y)$, $u_0(x)$, $f(t,x)$ действительнозначные и заданы в $[0,T] \times E_1$, E_1 и $[0,T] \times E_1$ соответственно.

Функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ подлежат определению одновременно с решением $u(t,x)$ задачи (21)–(23), удовлетворяющим условиям переопределения (4). Пусть выполняются условия согласования (5).

Предположим, что функция $M(t,y)$ достаточно гладкая (имеет все непрерывные производные, входящие в следующее ниже соотношение) и

$$|M^{(j)}(t,y)| \le M_0(1 + |y|^p), \quad j = 0,1,\dots,5, \quad 0 \le t \le T, \quad y \in E_1,$$

при $t \in [0,T]$ выполняется условие

$$|D(t)| \ge \delta > 0, \quad \delta - \mathrm{const}, \tag{24}$$

где

$$D(t) = \frac{d}{dt}(\varphi_1(t)) M^{(1)}(t, \varphi_1(t)) \varphi_2(t) - \frac{d}{dt}(\varphi_2(t)) M(t, \varphi_1(t)).$$

Входные данные достаточно гладкие и удовлетворяют условиям (7) – (9).

Пусть также выполняется следующее условие при $t \in [0,T]$

$$A_1(t) + A_2(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0(a) + A_3(t) \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_0(a) \ge \delta, \tag{25}$$

где

$$A_1(t) = \frac{f(t,a) M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 - f_x(t,a) M(t,\varphi_1)}{D(t)}, \quad A_2(t) = \frac{M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2}{D(t)},$$

$$A_3(t) = -\frac{M(t,\varphi_1)}{D(t)}, \quad B_1(t) = \frac{f(t,a)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_2 - f_x(t,a)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1}{D(t)}, \quad B_2(t) = \frac{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_2}{D(t)},$$

$$B_3(t) = -\frac{\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1}{D(t)}$$

— известные функции.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* (4), (5), (7)–(9), (24), (25). *Тогда существует решение* $u(t,x)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (21)–(23) *в классе*

$$Z(t^*) = \{u(t,x),\, \lambda_1(t),\, \lambda_2(t)|\ u \in C^{1,3}_{t,x}(G_{[0,t^*]}),\ \lambda_1(t),\ \lambda_2(t) \in C([0,t^*])\},$$

удовлетворяющее соотношению (17).

Теорема 5. *Решение* $u(t,x)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (21)–(23), (4), (5), (24), (25), *удовлетворяющее соотношению* (17), *единственно в классе* $Z(t^*)$.

Из теорем 4, 5 следует

Теорема 6. *Пусть выполняются условия* (4), (5), (7)–(9), (24), (25). *Тогда существует и единственно решение* $u(t,x)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (1)–(3) *в классе* $Z(t^*)$, *удовлетворяющее соотношению* (17).

Замечание. В случае второй краевой задачи (21), (22), (18) при выполнении условий (19), (20) также справедливы аналогичные теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белов Ю. Я., Фроленков И. В.* О задаче идентификации двух коэффициентов параболического полулинейного уравнения // Вестн. КрасГУ. Физ.-мат. науки. 2004. Вып. 1. С. 140–149.
2. *Белов Ю. Я., Фроленков И. В.* О задаче идентификации коэффициента при производной по времени в полулинейном параболическом уравнении // Вычисл. технол. 2004. Т. 9. С. 281–288.
3. *Lorenzi A., Paparoni E.* Identification of two unknown coefficients in an integrodifferential hyperbolic equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1993. V. 1, N 4. P. 331–348
4. *Lorenzi A., Paparoni E.* Identification problems for pseudohyperbolic integrodifferential operator eqations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1998. V. 5, N 6. P. 523–548.
5. *Anikonov Yu.E.* Constructive approaches to multidimensional inverse problems of determining two or more coefficients of evolutionary equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1999. V. 7, N 5. P. 435–452.
6. *Romanov V.G.* On the well-posedness of inverse problems with the data support treated at the domain boundary // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1993. V. 1, N 2. P. 155–167.
7. *Іванчов М.І.* Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами. К., 1996. (Препринт/ ІСДО).
8. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
9. *Белов Ю.Я., Кантор С.А.* Метод слабой аппроксимации. Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 1999.

Белов Юрий Яковлевич
Россия, Красноярск, Красноярский государственный университет
`belov@lan.krasu.ru`

Фроленков Игорь Владимирович
Россия, Красноярск, Красноярский государственный университет
`fiv@krw.ru`