УДК 517.95

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА И ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА

С. Н. Глазатов

В работе приведен обзор результатов о разрешимости вариационных неравенств, связанных с нелинейными псевдогиперболическими операторами и получены новые результаты о разрешимости вариационных неравенств, связанных с некоторыми нелинейными псевдопараболическими операторами в нецилиндрических областях.

В настоящее время имеется достаточно большое количество работ, посвященных исследованию начально-краевых задач для многомерных нелинейных уравнений третьего порядка, называемых в литературе псевдогиперболическими (см. [1–8]). В этих работах рассмотрены задача Коши и первая начально-краевая задача в цилиндрических по переменной t областях для различных частных случаев уравнения

$$A_0 u \equiv u_{tt} - \sum_{i=1}^{n} (\sigma_i(\nabla_x u))_{x_i} - \sum_{i=1}^{n} (w_i(\nabla_x u_t))_{x_i} + F(x, t, u, u_t, \nabla_x u) = f(x, t) \quad (0.1)$$

либо его модификаций таких, как, например, уравнение

$$u_{tt} - (\sigma(u_x, u_{xt}))_x = f(x, t),$$

которое рассмотрено в работе [3].

Так, например, хорошо изучен случай, когда $F \equiv 0$, $w_i(\xi) = \xi_i$ (см. [4–8]).

В монографии [2, гл. 2, п. 1.2] исследовано несколько модифицированное уравнение (0.1) общего вида, а именно, третье слагаемое представлено как $\sum\limits_{i=1}^{n} (w_i(x, t, u, \nabla_x u))_{x_i t}$.

Во всех этих работах, кроме [2], предполагалось условие гиперболичности оператора, составленного из первых двух слагаемых в (0.1) и монотонность по u_t оператора, определяемого третьим слагаемым. В таком случае уравнение (0.1) получило название сильно возмущенного гиперболического или псевдогиперболического уравнения. При дополнительных условиях на рост и гладкость функций $\sigma_i(\xi)$, $w_i(\xi)$ и $F(x, t, \eta_1, \eta_2, \xi)$, входящих в (0.1), в цитированных работах доказаны существование и единственность решений рассмотренных задач в различных классах функций. В [2] получено регулярное решение первой начально-краевой задачи для модифицированного уравнения, при этом второе слагаемое не обязано быть эллиптическим оператором. В одномерном случае оно представляется в виде суммы эллиптического оператора и слагаемого, в некотором смысле подчиненного функции w_1. В многомерном же случае вместо условия эллиптичности требуется условие $|\frac{\partial \sigma_i(\xi)}{\partial \xi_j}| \leq C_0$ для всех $\xi \in R^n$, $i, j = 1, \dots, n$.

Что же касается вариационных неравенств, связанных с уравнениями вида (0.1), то здесь можно указать работы [9, 10]. В [9] при $F \equiv 0$ рассмотрена задача

с препятствием на решение $u(x,t)$ для линейного многомерного уравнения (0.1). Сами постановки задач в форме вариационных неравенств, связанных с (0.1), и типы ограничений представляются достаточно прозрачными, хотя бы исходя из многочисленных работ по гиперболическим вариационным неравенствам. Автор рассмотрел некоторые вариационные неравенства для уравнения типа уравнения (0.1) в работе [10].

Отметим также то, что имеются работы (см. [11–14]), где начально-краевые задачи для псевдогиперболических уравнений вида (0.1) рассматривались в нецилиндрических областях. При этом различные авторы предлагали для решения этих задач различную технику. В работах [11, 12], где были рассмотрены лишь линейные уравнения вида (0.1) с $F \equiv 0$, для доказательства обобщенной разрешимости поставленных краевых задач использовались методы теории полугрупп и теория интерполяции функциональных пространств. В работах [13, 14] были поставлены краевые задачи для нелинейных уравнений вида (0.1) и для их исследования предложен иной метод — метод "выпрямления" границы, который позволил получить более регулярные, чем в [11, 12] решения.

Значительно меньшее количество работ (см., например, монографию [2, гл. 2, п. 1.1] и статьи [15, 16], а также имеющуюся там библиографию) посвящено изучению различных постановок задач для нелинейных псевдопараболических уравнений, а именно, уравнений вида

$$A_1 u \equiv u_t - \sum_{i=1}^{n} (\sigma_i(\nabla_x u))_{x_i} - \sum_{i=1}^{n} (w_i(\nabla_x u_t))_{x_i} = f(x,t), \tag{0.2}$$

хотя актуальность таких задач обусловлена их физическим смыслом, а их математическая трудность определяется, в числе прочего, и тем, что уравнения вида (0.2) не разрешены относительно старшей (в данном случае первой) производной по переменной t.

Уравнение (0.2) имеет физический смысл. А именно, если в (0.1) вместо слагаемого u_{tt} фигурирует $\rho_0 u_{tt}$, где $\rho_0 > 0$ имеет физический смысл плотности среды в начальном состоянии процесса (как раз такое уравнение рассмотрено в работе [4]), то при $\rho_0 \to 0$ мы имеем дело со средой с другими свойствами (очень малой плотностью). Если при этом $F(\cdot, u_t, \nabla_x u) \equiv u_t$, то мы получаем при $\rho_0 = 0$ уравнение вида (0.2). Если же $F \equiv 0$, то такой случай при $\rho_0 = 0$ рассмотрен в работе [15], где $w_i(\xi) = \xi_i$.

Если же $\rho_0 = 0$, $n = 1$, а $F = u_t + u u_x$, то (0.1) превращается в регуляризованное уравнение Бюргерса.

Вариационные неравенства и задачи в нецилиндрических областях для уравнений вида (0.2) не исследованы вовсе. В настоящую работу включены недавно полученные результаты автора, посвященные этим вопросам.

1. Нелинейные псевдогиперболические уравнения и вариационные неравенства

Рассматривается уравнение

$$B_0 u \equiv k(u) u_{tt} - \Delta_x u - \sum_{i=1}^{n} (w_i(\nabla_x u_t))_{x_i} + f(u_t) = g(x,t) \tag{1.1}$$

в цилиндрической области $Q_T = D \times (0,T)$, где $0 < T < +\infty$, а $D \subset R^n$ — односвязная ограниченная область с гладкой границей γ, $S = \gamma \times (0,T)$.

Присоединим к уравнению (1.1) начально-краевые условия

$$u|_{t=0} = u_0(x), \tag{1.2}$$

$$u_t|_{t=0} = u_1(x), \tag{1.3}$$

$$u|_S = 0. \tag{1.4}$$

Отметим, что в монографии [2, гл. 2, п. 1.1] рассматривалась начально-краевая задача для модифицированного (см. введение) уравнения вида (1.1). Подробно изучен случай $n = 1$, $f(u_t) = u_t$, при этом предполагалось, что w_1 зависит лишь от u_x и $w_1(u_x) = u_x$. В то же время, второе слагаемое могло быть нелинейным, а условия на функцию $k(s)$ несколько отличались от тех, которые накладываем мы. Отметим также, что и метод доказательства в настоящей работе несколько отличается от [2].

В дальнейшем будем предполагать выполненными следующие условия для коэффициентов (1.1): функция $k(s) \in C^1(R)$, $k(s) \geq \delta > 0$ для всех $s \in R$, $|k'(s)| \leq C_0$, функции $w_i(\xi) \in C(R^n)$ и для всех $\xi \in R^n$ справедливы неравенства $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i(\xi)\xi_i \geq C_1|\xi|^p - C_2$, $(C_1 > 0, C_2 \geq 0)$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} |w_i(\xi)| \leq C_3(1 + |\xi|^{p-1})$ $(C_3 > 0,\ p \geq 2)$. Далее, предположим, что поле $\{w_i(\xi)\}_{i=1}^n$ является потенциальным, то есть существует скалярная функция $W(\xi) \in C^1(R^n)$ такая, что $\nabla_\xi W = (w_1(\xi), \ldots, w_n(\xi))$ и для $W(\xi)$ справедлива оценка $C_3|\xi|^p - C_4 \leq W(\xi) \leq C_5(1 + |\xi|^p)$ $(C_3 > 0,\ C_5 > 0,\ C_4 \geq 0)$.

Предположим также, что оператор $\Lambda : \overset{\circ}{W}{}^1_p(D) \to W^{-1}_{p'}(D)$, действующий по формуле $< \Lambda\varphi, \psi > = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_D w_i(\nabla_x\varphi)\psi_{x_i}dx$, является монотонным.

Относительно функции $f(s) \in C^1(R)$ будем предполагать, что $|f(s)| \leq C_6 \times (1 + |s|^\alpha)$ для всех $s \in R$, $(\alpha > 1)$.

Будем обозначать через $< u, v >$ отношение двойственности между пространствами $\overset{\circ}{W}{}^1_p(D)$ и $W^{-1}_{p'}$, обозначим также $a(u, v) = \int\limits_D \nabla_x u \nabla_x v dx$.

Определение. Назовем функцию $u(x,t) \in L^\infty(0,T;\ \overset{\circ}{W}{}^1_p(D))$ такую, что $u_t \in L^\infty(0,T;\ \overset{\circ}{W}{}^1_p(D))$ и $u_{tt} \in L^2(Q_T)$, *обобщенным решением начально-краевой задачи* (1.1)–(1.4), если она удовлетворяет начально-краевым условиям (1.2)–(1.4), и если для любой функции $v(x,t) \in L^\infty(0,T;\ \overset{\circ}{W}{}^1_p(D))$ выполнено равенство

$$\Phi(u,v) \equiv \int\limits_0^T \int\limits_D k(u)u_{tt}v\,dxdt + \int\limits_0^T a(u,v)dt + \int\limits_0^T < \Lambda u_t, v > dt + \int\limits_0^T \int\limits_D f(u_t)v\,dxdt = \int\limits_0^T \int\limits_D gv\,dxdt. \tag{1.5}$$

Теорема 1.1. *Пусть выполнены все вышеуказанные условия для коэффициентов уравнения* (1.1)*. Тогда при условии* $p > \max(3, n, \alpha+1)$ *для любых функций* $u_0(x)$, $u_1(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(D)$ *и для любой функции* $g(x,t) \in L^2(Q_T)$ *существует обобщенное решение начально-краевой задачи* (1.1)–(1.4).

При $n = 1$ *это решение единственно.*

Доказательство этой теоремы достаточно традиционно. Оно основывается на методах Галеркина, компактности и монотонности. Некоторой модификации

по сравнению с гиперболическими уравнениями требует способ получения априорных оценок. Полностью доказательство опубликовано в [10].

Замечание. Заметим, что в случае $n = 1$ можно отказаться от очень жесткого ограничения $|k'(s)| \le C_0$ для всех $s \in R$. Но тогда и метод доказательства будет несколько иным, а именно, таким, как в работе [17], где использовались некоторый итерационный процесс и метод сжатых отображений.

Полученный результат можно применить к изучению вариационных неравенств для операторов третьего порядка вида (1.1).

При изучении вариационных неравенств для оператора вида (1.1) все условия на функции $k(s)$ и $f(s)$, перечисленные ранее, остаются без изменений, а условия на рост функций $w_i(\xi)$ и $W(\xi)$ несколько ослабляются, а именно: пусть для любого $\xi \in R^n$ выполнены следующие оценки $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i(\xi)\xi_i \ge C_7$, $\sum\limits_{i=1}^{n} |w_i(\xi)| \le C_8(1 + |\xi|^{p-1})$, $C_9 \le W(\xi) \le C_{10}(1 + |\xi|^p)$, где $p \ge 2$, $C_8 > 0$, $C_{10} > 0$, C_7 и C_9 — некоторые константы. Пусть, кроме того, выполнено условие монотонности оператора Λ, введенного ранее.

Выберем теперь целое неотрицательное число s так, что $4s+4 > \max(p, 3, n, \alpha+1)$, и обозначим $p_0 = 4s + 4$.

Введем выпуклое, замкнутое множество ограничений $\mathcal{K} = \{z(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p_0}(D) : |\nabla_x z| \le 1 \text{ п. в. в } D\}$.

Теорема 1.2. *Пусть выполнены все вышеуказанные условия для коэффициентов оператора B_0. Тогда для любых функций $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p_0}(D)$, $u_1 \in \mathcal{K}$ и для любой функции $g(x,t) \in L^2(Q_T)$ существует функция $u(x,t) \in L^\infty \in (0,T; \overset{\circ}{W}{}^1_{p_0}(D))$ такая, что $u_t \in L^\infty(0,T; \overset{\circ}{W}{}^1_{p_0}(D))$ и $u_{tt} \in L^2(Q_T)$, обладающая следующими свойствами:*

(а) *$u(x,t)$ удовлетворяет начально-краевым условиям* (1.2)–(1.4)*;*

(б) *для п. в. $t \in [0,T]$ выполнено включение $u_t(\cdot,t) \in \mathcal{K}$;*

(в) *для любой функции $\varphi(x,t) \in L^\infty(0,T; \overset{\circ}{W}{}^1_{p_0}(D))$ такой, что для п. в. $t \in [0,T]$ $\varphi(\cdot,t) \in \mathcal{K}$ справедливо неравенство*

$$\int_0^t \int_D k(u)u_{\tau\tau}\varphi dx d\tau + \int_0^t a(u,\varphi)d\tau + \int_0^t < \Lambda u_\tau, \varphi > d\tau + \int_0^t \int_D f(u_\tau)\varphi dx d\tau$$
$$\ge \int_0^t \int_D g(\varphi - u_\tau) dx d\tau + \int_0^t \int_D k(u)u_{\tau\tau}u_\tau dx d\tau + \int_0^t a(u,u_\tau)d\tau$$
$$+ \int_0^t < \Lambda u_\tau, u_\tau > d\tau + \int_0^t \int_D f(u_\tau)u_\tau dx d\tau$$

для любого $t \in [0,T]$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение со штрафом

$$B_0^\varepsilon u^\varepsilon \equiv k(u^\varepsilon)u^\varepsilon_{tt} - \Delta_x u^\varepsilon - \sum_{i=1}^{n}(w_i(\nabla_x u^\varepsilon_t))_{x_i} + f(u^\varepsilon_t)$$
$$- \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}([(1 - -|\nabla_x u^\varepsilon_t|^2)^-]^{2s+1} u_{x_i t})_{x_i} = g(x,t) \quad (1.6)$$

и начально-краевые условия (1.2)–(1.4).

Здесь $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $h^- = \max(0, -h)$, а число s выбрано нами ранее. Несложно проверить, что оператор $\beta : v \to -\sum\limits_{i=1}^{n}([(1-|\nabla_x v|^2)^-]^{2s+1} v_{x_i})_{x_i}$ действует из пространства $\overset{\circ}{W}{}^1_{p_0}(D)$ в пространство $W^{-1}_{p_0'}(D)$ и является оператором штрафа, связанным с множеством ограничений (по поводу определения и свойств оператора штрафа см. [18, гл. 3, п. 5.2]).

В условиях теоремы для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует $u^\varepsilon(x,t)$ — обобщенное решение начально-краевой задачи (1.6), (1.2)–(1.4). В самом деле, заметим, что функции $w_i^\varepsilon(\xi) = w_i(\xi) + \varepsilon^{-1}[(1-|\xi|^2)^-]^{2s+1}\xi_i$ порождают потенциальное поле с потенциалом $W^\varepsilon(\xi) = W(\xi) + \varepsilon^{-1} W_0(\xi)$, где

$$W_0(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } |\xi| \le 1, \\ \frac{(|\xi|^2-1)^{2s+2}}{2(2s+2)} & \text{при } |\xi| \ge 1. \end{cases}$$

Для функций $w_i^\varepsilon(\xi)$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $W^\varepsilon(\xi)$ выполнены все условия теоремы 1.1 на рост с показателем p_0 и, что существенно, при этом все константы в оценках этих функций снизу можно выбрать не зависящими от ε при $\varepsilon \le \varepsilon_0$. В силу монотонности оператора штрафа и условий теоремы, оператор $\Lambda^\varepsilon : \overset{\circ}{W}{}^1_{p_0}(D) \to W^{-1}_{p_0'}(D)$, действующий по формуле $< \Lambda^\varepsilon u, v >= \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_D w_i^\varepsilon(\nabla_x u) v_{x_i} dx$, также является монотонным.

Решая задачу (1.6), (1.2)–(1.4) методом Галеркина как при доказательстве теоремы 1.1 и используя равномерные по ε оценки снизу функций $w_i^\varepsilon(\xi)$ и $W^\varepsilon(\xi)$, можно получить необходимые оценки семейства $\{u^\varepsilon\}$ обобщенных решений задачи (1.6), (1.2)–(1.4) с теми же константами, не зависящими от ε, а также оценку оператора штрафа

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^T \int\limits_D [(1-|\nabla_x u_t^\varepsilon|^2)^-]^{2s+1} (u^\varepsilon_{x_i t})^2 dxdt \le \varepsilon C_{11}. \tag{1.7}$$

Итак, получено семейство функций $(u^\varepsilon)_{\varepsilon \le \varepsilon_0}$ таких, что для любой функции $v(x,t) \in L^\infty(0,T; \overset{\circ}{W}{}^1_{p_0}(D))$ и для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ выполнено равенство

$$\Phi^\varepsilon(u^\varepsilon, v) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^T \int\limits_D gv dxdt. \tag{1.8}$$

Для доказательства свойств (а), (б) и (в), сформулированных в теореме нужно использовать схему доказательства теоремы 7.1 из [18, гл. 3, п. 7.1]. На основании полученных равномерных по ε оценок, можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ и получить функцию $u(x,t)$ с требуемыми свойствами гладкости. Нетрудно видеть, что эта функция удовлетворяет начально-краевым условиям (1.2)–(1.4).

Затем, используя оценку (1.7) и монотонность оператора штрафа в точности так же, как и в доказательстве упомянутой теоремы 7.1 из [18], можно установить, что $u_t(\cdot, t) \in \mathcal{K}$ для п. в. $t \in [0,T]$.

Для доказательства справедливости утверждения (в) надо в равенство (1.8) подставить функцию

$$v(x,t) = \begin{cases} \varphi(x,\tau) - u^\varepsilon_\tau(x,\tau), & 0 \le \tau \le t, \\ 0, & t < \tau \le T, \end{cases}$$

где $\varphi(x,t) \in L^\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_0}(D))$ — произвольная функция такая, что $\varphi(\cdot,t) \in \mathcal{K}$ п. в. на $[0,T]$, а $t \in [0,T]$ — произвольная точка. Используя монотонность оператора штрафа, можно вывести неравенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_D k(u^\varepsilon) u^\varepsilon_{\tau\tau} \varphi dx d\tau + \int\limits_0^t a(u^\varepsilon, \varphi) d\tau + \int\limits_0^t < \Lambda u^\varepsilon_\tau, \varphi > d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_D f(u^\varepsilon_\tau) \varphi dx d\tau$$
$$\geq \int\limits_0^t \int\limits_D g(\varphi - u^\varepsilon_\tau) dx d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_D k(u^\varepsilon) u^\varepsilon_{\tau\tau} u^\varepsilon_\tau dx d\tau + \int\limits_0^t a(u^\varepsilon, u^\varepsilon_\tau) d\tau$$
$$+ \int\limits_0^t < \Lambda u^\varepsilon_\tau, u^\varepsilon_\tau > d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_D f(u^\varepsilon_\tau) u^\varepsilon_\tau dx d\tau. \quad (1.9)$$

Теперь нужно взять нижний предел левой и правой частей этого неравенства при $\varepsilon \to 0$, используя при этом некоторые известные приёмы и псевдомонотонность оператора Λ (по поводу определения и критериев псевдомонотонности см. [18, гл. 2, п. 2.4]). В нашем случае оператор Λ является псевдомонотонным, поскольку он монотонный, семинепрерывный и ограниченный как оператор из $\overset{\circ}{W}{}^1_{p_0}(D)$ в $W^{-1}_{p_0'}(D)$. В результате этого предельного перехода устанавливается справедливость требуемого неравенства.

Пусть теперь $n = 1$, а $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — две функции, для которых справедливы все утверждения теоремы. Нетрудно проверить, что для любого $\lambda^2 > 0$ и для любой функции $\varphi(x,t) \in L^\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_0}(D))$ такой, что $\varphi(\cdot,t) \in \mathcal{K}$ справедливы неравенства, которые мы запишем в следующем компактном виде (математический смысл такой записи вполне понятен из контекста и формулировки теоремы)

$$\int\limits_0^t (B_0 u_1 - g, \varphi - u_{1\tau}) e^{-\lambda^2 \tau} d\tau \geq 0$$

и

$$\int\limits_0^t (B_0 u_2 - g, u_{2\tau} - \varphi) e^{-\lambda^2 \tau} d\tau \leq 0.$$

Подставим теперь в первое неравенство функцию

$$\varphi(x,\tau) = \begin{cases} u_{2\tau}(x,\tau), & 0 \leq \tau \leq t, \\ u_{1\tau}(x,\tau), & t < \tau \leq T, \end{cases}$$

а во второе — функцию

$$\varphi(x,\tau) = \begin{cases} u_{1\tau}(x,\tau), & 0 \leq \tau \leq t, \\ u_{2\tau}(x,\tau), & t < \tau \leq T \end{cases}$$

и вычтем из второго неравенства первое. В результате этого получим

$$\int\limits_0^t \int\limits_D (k(u_2) u_{2\tau\tau} - k(u_1) u_{1\tau\tau}) u_\tau e^{-\lambda^2 \tau} dx d\tau + \int\limits_0^t a(u, u_\tau) e^{-\lambda^2 \tau} d\tau$$
$$+ \int\limits_0^t < (\Lambda(u_{2\tau}) - \Lambda(u_{1\tau})), u_\tau > e^{-\lambda^2 \tau} d\tau$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_D(f(u_{2\tau})-f(_{1\tau}))u_\tau e^{-\lambda^2\tau}dxd\tau\le 0 \qquad (\text{здесь}\ \ u=u_2-u_1).$$

Действуя так же, как и при доказательстве единственности при $n=1$ в теореме 1.1, получим, что $u\equiv 0$ п. в. в Q_T.

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим в области Q_T уравнение

$$B_1u\equiv k(u_t)u_{tt}-\Delta_x u-\sum_{i=1}^n(w_i(\nabla_x u_t))_{x_i}+f(u_t)=g(x,t) \tag{1.10}$$

с начально-краевыми условиями (1.2)–(1.4).

Пусть выполнены все условия для функций $f(s)$ и $w_i(\xi)$, сформулированные в случае начально-краевой задачи (1.1)–(1.4), а функция $k(s)$ удовлетворяет следующим условиям: $k(s)\in C(R)$, $k(s)\ge\delta>0$, удовлетворяет условию Липшица на каждом компакте $\mathcal{M}\subset R$ (с константой, в общем случае зависящей от $\mathcal{M}$). Пусть функция $K(s)=\int\limits_0^s k(\sigma)\sigma d\sigma$ удовлетворяет для всех $s\in R$ оценке $K(s)\ge C_{12}|s|^q-C_{13}$, $q>1$, $C_{12}>0$.

Совершенно аналогично предыдущему случаю определяется обобщенное решение начально-краевой задачи (1.10), (1.1)–(1.4).

Теорема 1.3. *Пусть выполнены все вышеуказанные условия для коэффициентов* (1.10). *Тогда при условии* $p>\max\,(n,\alpha+1)$ *для любых функций* $u_0,u_1\in\overset{\circ}{W}{}^1_p(D)$ *и для любой функции* $g(x,t)\in L^2(Q_T)$ *существует обобщенное решение начально-краевой задачи* (1.10), (1.2)–(1.4).

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично доказательству теоремы 1.1.

Заметим, что первая начально-краевая задача для модифицированного (см. введение) уравнения (1.10) также рассматривалась в [2, гл. 2, п. 1.2].

Пусть теперь выполнены все условия для функций $f(s)$ и $w_i(\xi)$ $(i=1,\dots,n)$, сформулированные при рассмотрении вариационного неравенства, связанного с (1.1), а функция $k(s)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.3 и, кроме того, $K(s)$ является выпуклой функцией. Определим числа s и p_0, а также множество ограничений $\mathcal{K}$ в точности так же, как и в предыдущем случае.

Теорема 1.4. *При выполнении всех условий для коэффициентов оператора* B_1, *сформулированных выше, для любых функций* $u_0\in\overset{\circ}{W}{}^1_p(D)$, $u_1\in\mathcal{K}$ *и для любой функции* $g(x,t)\in L^2(Q_T)$ *существует функция* $u(x,t)\in L^\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_0}(D))$ *такая, что* $u_t\in L^\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_0}(D))$ *и* $u_{tt}\in L^2(Q_T)$, *обладающая свойствами* (а), (б) *и* (в) *из формулировки теоремы* 1.2 (*с естественной заменой оператора* B_0 *на оператор* B_1).

Доказательство теоремы 1.4 совершенно аналогично доказательству теоремы 1.2. Некоторое отличие состоит в процедуре предельного перехода при $\varepsilon\to 0$ в тех слагаемых в неравенстве аналогичном неравенству (1.9), которые содержат $k(u_t^\varepsilon)$. Для обоснования предельного перехода в этих слагаемых надо использовать рассуждения, имеющиеся в работе [19].

2. Нелинейные псевдопараболические уравнения в нецилиндрических областях и вариационные неравенства

В этой части мы уделим основное внимание двумерному случаю, поскольку он является наиболее показательным в смысле техники доказательства соответствующего результата (доказательство в многомерном случае ничем не отличается). Кроме того, описание области с "криволинейной" границей наиболее интересно именно в двумерном случае, поскольку "боковая" граница в отличие от многомерного случая здесь, вообще говоря, имеет две компоненты связности.

Итак, на плоскости переменных (x, t) рассмотрим область Q, которая ограничена отрезками прямых $t = 0$ и $t = T$ $(0 < T < +\infty)$ и двумя кривыми γ_1 и γ_2, которые задаются соответственно уравнениями $\varphi_1(x) - A_1 t = 0$ и $\varphi_1(x) - A_2 t = 0$. Здесь $\varphi_1 \in C^1(R)$ и строго монотонно убывает, $\varphi_2 \in C^1(R)$ и строго монотонно возрастает, A_i принимают одно из двух значений: либо 0, либо 1. Если $A_i = 0$, то это соответствует случаю, когда γ_i есть отрезок прямой, параллельной оси Ot, а равенство $\varphi_i(x) = 0$ соответствует равенству $x = \varphi_i^{-1}(0)$, то есть уравнению упомянутой прямой. Обозначим $\alpha = \varphi_1^{-1}(0)$, $\beta = \varphi_2^{-1}(0)$ и потребуем, чтобы $\alpha \le \beta$ в случае $A_1^2 + A_2^2 > 0$ и $\alpha < \beta$ в случае $A_1 = A_2 = 0$. Введем также обозначения $a = \varphi_1^{-1}(T)$, $b = \varphi_2^{-1}(T)$. Очевидно, что $a \le \alpha$ и $\beta \le b$, причем равенство возможно лишь в случае, когда соответствующий участок границы прямолинейный.

В области Q рассмотрим уравнение

$$B_2 u \equiv u_t - (a(u_x))_x - u_{xxt} = f(x, t). \tag{2.1}$$

К нему присоединим начально-краевые условия

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (\alpha, \beta), \tag{2.2}$$

$$u|_{\gamma_1} = u|_{\gamma_2} = 0. \tag{2.3}$$

Если $\alpha = \beta$, то условие (2.2) отсутствует.

Функция $a(\xi) : R \to R$ удовлетворяет следующим условиям: $a \in C(R)$, $|a(\xi)| \le C_1(1 + |\xi|^{p-1})$ для всех $\xi \in R$, $p > 1$, $a(\xi)$ не убывает на R и $a(0) = 0$.

Введем целое неотрицательное число s так, чтобы $4s + 4 > p$, и обозначим $q = 4s + 4$.

Далее будем обозначать через I_τ пересечение области Q и прямой $t = \tau$. Введем множество ограничений $\mathcal{K}_t = \{z(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_q(I_t) : |z_x| \le 1$ п. в. на $I_t\}$.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены все вышеуказанные условия на область Q и на коэффициенты уравнения (2.1). Тогда для любой функции $f(x, t) \in L^2(Q)$ и для любой функции $u_0(x) \in \mathcal{K}_0$ существует единственная функция $u(x, t) \in L^\infty(0, T; \mathcal{K}_t)$ такая, что $u_t \in L^2(0, T; W_2^1(I_t))$, удовлетворяющая начально-краевым условиям (2.2), (2.3) и такая, что для любого $t \in [0, T]$ и для любой функции $v(x, t) \in L^\infty(0, T; \mathcal{K}_t)$ выполняется неравенство*

$$\int_0^t \int_{I_\tau} u_\tau (v - u)\,dxd\tau + \int_0^t \int_{I_\tau} a(u_x)(v_x - u_x)\,dxd\tau + \int_0^t \int_{I_\tau} u_{x\tau}(v_x - u_x)\,dxd\tau \ge \int_0^t \int_{I_\tau} f(v - u)\,dxd\tau.$$

Доказательство. Приведем здесь лишь его схему, отметив наиболее важные моменты. Построим цилиндрическую область Q_T, ограниченную отрезками

прямых $t=0$ и $t=T$ и отрезками прямых $x=a$ и $x=b$. Очевидно, что $Q \subseteq Q_T$. Проведем доказательство лишь для случая, когда $A_1 = A_2 = 1$, (то есть обе компоненты связности боковой границы являются криволинейными). Остальные случаи значительно проще. Обозначим $G = Q_T \setminus \overline{Q}$, обозначим через G_1 ту компоненту G, частью границы которой является γ_1, а через G_2 ту компоненту G, частью границы которой является γ_2.

Введем в рассмотрение функцию

$$\theta(x,t) = \begin{cases} \varphi_1(x) - t, & (x,t) \in G_1, \\ 0, & (x,t) \in Q, \\ \varphi_2(x) - t, & (x,t) \in G_2. \end{cases}$$

Очевидно, что $\theta \in L^\infty(Q_T) \cap W_2^1(Q_T)$ и $\theta(x,t) > 0$ при $(x,t) \in G$.

В области Q_T рассмотрим уравнение, содержащее два “штрафных” слагаемых

$$B_2^\varepsilon u^\varepsilon \equiv u_t^\varepsilon - (a(u_x^\varepsilon))_x - u_{xxt}^\varepsilon - \varepsilon^{-1}([(1-(u_x^\varepsilon)^2)^-]^{2s+1} u_x)_x + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\theta(x,t)u^\varepsilon = \widetilde{f}(x,t). \quad (2.4)$$

Здесь число s уже выбрано нами раннее, функция $\theta(x,t)$ тоже построена ранее и выполняет роль “штрафа на область”,

$$\widetilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & (x,t) \in Q, \\ 0, & (x,t) \in G. \end{cases}$$

Построим также функцию

$$\widetilde{u}_0(x) = \begin{cases} u_0(x), & x \in I_0, \\ 0, & x \in [a,b] \setminus I_0. \end{cases}$$

Очевидно, что $\widetilde{u}_0 \in \overset{\circ}{W}{}_q^1(a,b)$.

Присоединим к (2.4) начально-краевые условия

$$u(x,0) = \widetilde{u}_0(x), \quad x \in (a,b), \quad (2.5)$$

$$u_{x=a} = u|_{x=b} = 0. \quad (2.6)$$

Будем решать начально-краевую задачу (2.4)–(2.6) методом Галеркина, получая в процессе этого также и оценки, равномерные по параметру штрафа ε.

Рассмотрим $\{\omega_i(x)\}_{i=1}^\infty$ — базис в $\overset{\circ}{W}{}_q^1(a,b)$. Без ограничения общности можно считать, что функции $\omega_i(x)$ ортонормированы в $W_2^1(a,b)$. Ищем приближенные решения в виде $u^m(x,t) = \sum\limits_{k=1}^m c_{km}(t)\omega_k(x)$.

Рассмотрим задачу Коши

$$(B_2^\varepsilon u^{m,\varepsilon}, \omega_k)_0 = (\widetilde{f}, \omega_k)_0, \quad k = 1, \ldots, m, \quad (2.7)$$

$$c_{km}(0) = \widetilde{u}_{0k}, \quad (2.8)$$

где через $\widetilde{u}_{0k}$ обозначены коэффициенты в разложении $\widetilde{u}_0$ по базису $\{\omega_i(x)\}_{i=1}^n$. В силу отмеченного нами свойства базиса система (2.7), (2.8) приводится к нормальному виду, и задача Коши (2.7), (2.8) разрешима на интервале $[0, t_m)$. В дальнейшем будет ясно, что $t_m = T$ для всех m.

Умножим каждое уравнение (2.7) на $c_{km}(\tau)$, просуммируем по k от 1 до m и проинтегрируем полученное от 0 до $t \leq T$.

В итоге получим равенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_a^b B_2^\varepsilon u^{m,\varepsilon}u^{m,\varepsilon}dxd\tau=\int\limits_0^t\int\limits_a^b \widetilde{f}u^{m,\varepsilon}dxd\tau.$$

В результате интегрирования по частям получаем априорные оценки, равномерные по m и ε,

$$||u^{m,\varepsilon}||_{L^\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b))}\le C_2, \tag{2.9}$$

$$\int\limits_0^T\int\limits_a^b([1-(u_x^{m,\varepsilon})^2]^-)^{2s+1}(u_x^{m,\varepsilon})^2dxdt\le\varepsilon C_3, \tag{2.10}$$

$$0\le\int\limits_0^T\int\limits_a^b\theta(u^{m,\varepsilon})^2dxdt\le\sqrt{\varepsilon}C_4. \tag{2.11}$$

Далее, умножая каждое уравнение (2.7) на $c'_{km}(\tau)$, суммируя и интегрируя, получим равенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_a^b B_2^\varepsilon u^{m,\varepsilon}u_\tau^{m,\varepsilon}dxd\tau=\int\limits_0^t\int\limits_a^b \widetilde{f}u_\tau^{m,\varepsilon}dxd\tau.$$

Используя специальный выбор s, а также свойства функции $\theta(x,t)$, в результате интегрирования по частям получаем следующие априорные оценки, равномерные по m,ε

$$||u^{m,\varepsilon}||_{L^\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}_q^1(a,b))}\le C_5, \tag{2.12}$$

$$||u_t^{m,\varepsilon}||_{L^2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b))}\le C_6. \tag{2.13}$$

Далее, с использованием оценок (2.12), (2.13), методов компактности и монотонности, осуществляем в равенстве (2.7) предельный переход при $m\to\infty$ (на некоторой подпоследовательности $\{m_l\}_{l=1}^\infty$).

Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ получено обобщенное решение задачи (2.4)–(2.6), а именно, функция $u^\varepsilon\in L^\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}_q^1(a,b))$ такая, что $u_t^\varepsilon\in L^2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b))$. Начально-краевые условия (2.5), (2.6) удовлетворяются очевидным образом. Оценка (2.10) остается справедливой для семейства $\{u^\varepsilon\}$ с той же константой C_3 в силу свойств выпуклых функционалов, а оценка (2.11) — в силу априорных оценок и теоремы Лебега. Также для вышеуказанного семейства остаются справедливыми оценки (2.12) и (2.13).

Таким образом, мы получаем в результате предельного перехода при $\varepsilon\to0$ (на некоторой подпоследовательности) функцию $u(x,t)\in L^\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}_q^1(a,b))$ такую, что $u_t\in L^2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b))$.

Теперь покажем, что $u(x,t)$ удовлетворяет условиям (2.2), (2.3). По построению функции $u(x,t)$ очевидно, что $u(x,0)=\widetilde{u}_0(x)$ для п. в. $x\in(a,b)$, а значит $u(x,0)=u_0(x)$ для п. в. $x\in(\alpha,\beta)$. Далее, из оценки (2.11) для семейства $\{u^\varepsilon\}$, оценок (2.12), (2.13), теорем компактности и теоремы Лебега получаем, что $\int\limits_0^t\int\limits_a^b\theta u^2dxdt=0$, а это означает, что $u(x,t)\equiv0$ п. в. в G. Далее, на каждом сечении $\tau=t_0$ имеем $u(x,t_0)\in\overset{\circ}{W}{}_q^1(a,b)$, и в силу теоремы вложения $u(x,t_0)\in C[a,b]$.

Значит, в силу непрерывности, на всей границе γ_1 и на всей границе γ_2 функция $u(x,t) \equiv 0$. То есть краевое условие (2.3) также выполняется.

Теперь нужно показать, что $u(x,t) \in L^\infty(0,T;\mathcal{K}_t)$. Это делается стандартным способом с использованием уравнения (2.4) (которому удовлетворяет в обобщенном смысле $u^\varepsilon(x,t)$), а также оценки (2.11), монотонности и семинепрерывности оператора штрафа.

Теперь зафиксируем $t \in [0,T]$ и рассмотрим произвольную функцию $v(x,\tau) \in L^\infty(0,T;\mathcal{K}_\tau)$. Очевидно, что

$$\widetilde{v}(x,t) = \begin{cases} v(x,t), & (x,t) \in Q, \\ 0, & (x,t) \in G \end{cases}$$

такова, что $\widetilde{v} \in L^\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_q(a,b)$. Теперь подставим в уравнение (2.4) в качестве пробной функции

$$\varphi(x,\tau) = \begin{cases} \widetilde{v}(x,\tau) - u^\varepsilon(x,\tau), & 0 \le \tau \le t, \\ 0, & t < \tau \le T. \end{cases}$$

Используя свойства операторов штрафа, получаем неравенство

$$\int_0^t \int_a^b u^\varepsilon_\tau(\widetilde{v} - u^\varepsilon)dxd\tau + \int_0^t \int_a^b a(u^\varepsilon_x)(\widetilde{v}_x - u^\varepsilon_x)dxd\tau + \int_0^t \int_a^b u^\varepsilon_{x\tau}(\widetilde{v}_x - u^\varepsilon_x)dxd\tau \ge \int_0^t \int_a^b \widetilde{f}(\widetilde{v} - u^\varepsilon)dxd\tau.$$

Пользуясь псевдомонотонностью оператора, определяемого вторым слагаемым в уравнении (2.1), в результате предельного перехода получаем неравенство

$$\int_0^t \int_a^b u_\tau(\widetilde{v} - u)dxd\tau + \int_0^t \int_a^b a(u_x)(\widetilde{v}_x - u_x)dxd\tau + \int_0^t \int_a^b u_{x\tau}(\widetilde{v}_x - u_x)dxd\tau \ge \int_0^t \int_a^b \widetilde{f}(\widetilde{v} - u)dxd\tau, \quad (2.14)$$

но поскольку $\widetilde{v} = u \equiv 0$ п. в. в G, то это неравенство является как раз тем, которое фигурирует в формулировке теоремы.

Теперь докажем единственность полученного решения. Пусть $u_1(x,t) \in L^\infty(0,T;\mathcal{K}_t)$ и $u_2(x,t) \in L^\infty(0,T;\mathcal{K}_t)$ — два решения неравенства, удовлетворяющие условиям (2.2), (2.3). Пусть

$$\widetilde{u}_i(x,t) = \begin{cases} u_i(x,t), & (x,t) \in Q, \\ 0, & (x,t) \in G, \end{cases}$$

$i = 1, 2$.

Очевидно, что $\widetilde{u}_i(x,t)$ удовлетворяют неравенству (2.14) для тех функций $\widetilde{v}(x,t)$, которые построены выше. Это обстоятельство, способ построения $\widetilde{u}_i$ и стандартные в этом случае рассуждения позволяют вывести, что $\widetilde{u}_i \equiv \widetilde{u}_2$ п. в. в Q_T, а значит $u_1 \equiv u_2$ п. в. в Q.

Теорема доказана полностью.

Теперь рассмотрим многомерное уравнение

$$B_3 u \equiv u_t - \operatorname{div}(\mathbf{a}(\nabla_x u)) - \Delta_x u_t = f(x,t), \tag{2.15}$$

где $\mathbf{a} : R^n \to R^n$ — непрерывное векторное поле. Требуется, чтобы оно было потенциальным, то есть существует гладкая скалярная функция $A : R^n \to R$, такая, что $\nabla_\xi A = (a_1(\xi), \ldots, a_n(\xi))$. Эта функция должна удовлетворять оценке $|A(\xi)| \le C_7(1 + |\xi|^p)$ для всех $\xi \in R^n$, $p > 1$, а для самих функций $a_i(\xi)$ должно выполняться неравенство $\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i(\xi)| \le C_8(1+|\xi|^{p-1})$ для всех $\xi \in R^n$. Кроме того, пусть $\mathbf{a}(0) = 0$.

Теперь опишем область Q, в которой будем искать решение соответствующего неравенства. Эта область ограничена участками гиперплоскостей $t = 0$ и $t = T$ и некоторой гладкой поверхностью Γ, которая описывается уравнением $\varphi(x) - At = 0$, где $\varphi : R^n \to R$ — гладкая функция, а параметр A может принимать два значения: либо $A = 1$, либо $A = 0$. Последний случай соответствует цилиндрической области Q. Кроме того, поверхность Γ такова, что для любого $t \in (0,T]$ множество D_t — пересечение Q и гиперплоскости $\tau = t$ есть ограниченная односвязная область с гладкой границей, а D_0 есть либо ограниченная односвязная область с гладкой границей, либо одноточечное множество $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$.

Кроме того, требуется, чтобы область Q “расширялась” с ростом t, т. е. для любых $t_1, t_2 \in [0,T]$ если $t_1 < t_2$, то $D_{t_1} \subseteq D_{t_2}$.

Введем целое неотрицательное число s так, чтобы $4s + 4 > \max(p,n)$, и обозначим $q_0 = 4s + 4$.

Также необходимо, чтобы оператор $\Lambda_1 : \overset{\circ}{W}{}^1_{q_0}(D_T) \to W^{-1}_{q_0'}(D_T)$, действующий по правилу $< \Lambda_1 u, v >= \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{D_T} a_i(\nabla_x u) v_{x_i} dx$, являлся монотонным (здесь через $< \cdot, \cdot >$ обозначено отношение двойственности в соответствующих функциональных пространствах).

Присоединим к (2.15) начально-краевые условия

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in D_0, \tag{2.16}$$

$$u|_\Gamma = 0. \tag{2.17}$$

Если D_0 – одноточечное множество, то условие (2.16) отсутствует.

Введем множество ограничений $\mathcal{M}_t = \{z(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{q_0}(D_t) : |\nabla_x z| \le 1 \text{ п. в. в } D_t\}$.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены все вышеуказанные условия на область Q и на коэффициенты уравнения (2.15). Тогда для любой функции $f(x,t) \in L^2(Q)$ и для любой функции $u_0(x) \in \mathcal{M}_0$ существует единственная функция $u(x,t) \in L^\infty(0,T;\mathcal{M}_t)$ такая, что $u_t \in L^2(0,T;W^1_2(D_t))$, удовлетворяющая начально-краевым условиям (2.16), (2.17) и такая, что для любого $t \in [0,T]$ и для любой функции $v(x,t) \in L^\infty(0,T;\mathcal{M}_t)$ выполняется неравенство*

$$\int\limits_0^t \int\limits_{D_\tau} u_\tau (v-u) dx d\tau + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^t \int\limits_{D_\tau} a_i(\nabla_x u)(v_{x_i} - u_{x_i}) dx d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_{D_\tau} \nabla_x u_\tau (\nabla_x v - \nabla_x u) dx d\tau \ge \int\limits_0^t \int\limits_{D_\tau} f(v-u) dx d\tau.$$

Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 1.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ларькин Н. А., Новиков В. А., Яненко Н. Н.* Нелинейные уравнения переменного типа. Новосибирск: Наука, 1983.
2. *Кожанов А. И.* Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. Новосибирск: НГУ, 1990.
3. *Dafermos C. M.* The mixed initial-boundary value problem for the equations of nonlinear one-dimensional viscoelasticity // J. Differ. Equations. 1969. V. 6, N 1. P. 71–86.
4. *Greenberg J. M., MacCamy R. C., Mizel V. J.* On existence, uniqueness and stability of solutions of the equation $\sigma(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xxt} = \rho_0 u_{tt}$ // J. Math. Mech. 1969. V. 17, N 7. P. 707–728.
5. *Clements J. C.* On the existence and uniqueness of solutions of of the equation $u_{tt} - (\sigma_i(u_{x_i}))_{x_i} - \Delta_N u_t = f$ // Can. Math. Bull. 1975. V. 18, N 2. P. 181–187.
6. *Pecher H.* On global regular solutions of third order partial differential equations // J. Math. Anal. Appl. 1980. V. 73, N 1. P. 278–299.
7. *Yamada Y.* Quasilinear wave equations and related nonlinear evolution equations // Nagoya Math. J. 1981. V. 84, N 1. P. 31–83.
8. *Engler H.* Existence of radially symmetric solutions of strongly damped wave equations // Lect. Notes in Math. 1985. V. 1248. P. 40–51.
9. *Yarušek J., Málek J., Nečas J., Šverák V.* Variational inequality for a viscous drum vibrating in the presence of an obstacle // Rend. Mat. 1992. V. 12, N 4. P. 943–958.
10. *Глазатов С. Н.* Некоторые задачи для нелинейных уравнений третьего порядка. Новосибирск, 1992. (Препринт/ РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 7).
11. *Cannarsa P., Da Prato G., Zolezio S. - P.* The damped wave equations in a moving domain // J. Differ. Equations. 1990. V. 85, N 1. P. 1–16.
12. *Da Prato G., Grisvard P.* The damped wave equation in a noncylindrical domain // Differ. Integral Equ. 1994. V. 7, N 3–4. P. 735–746.
13. *Кожанов А. И.* Об одном многомерном сильно-нелинейном уравнении третьего порядка в нецилиндрических областях // Неклассические уравнения математической физики. Тр. Четвертого Сибирского конгресса по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-2000). Новосибирск: ИМ СО РАН, 2000. С. 107–115.
14. *Кожанов А. И., Ларькин Н. А.* О разрешимости краевых задач для сильно нелинейных уравнений вязкоупругости в нецилиндрических областях // Мат. заметки ЯГУ. Т. 6, № 1. С. 36–45.
15. *Tsutsumi M., Matahashi T.* A certain class of singular nonlinear pseudo-parabolic equations // Funkc. Ekvacioj. 1979. V. 22, N 3. P. 313–325.
16. *Кожанов А. И., Ларькин Н. А., Яненко Н. Н.* Смешанная задача для одного класса уравнений третьего порядка // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, № 6. С. 81–87.
17. *Глазатов С. Н.* Некоторые квазилинейные гиперболические неравенства. Новосибирск, 1990. (Препринт/ АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 2).
18. *Лионс Ж.- Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
19. *Глазатов С. Н.* Об одном классе квазилинейных гиперболических неравенств // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1990. С. 67–90.

Глазатов Сергей Николаевич
Россия, Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
glaz@math.nsc.ru