УДК 517.95

# КРИТЕРИЙ ПОЛНОТЫ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

**Т. Ш. Кальменов, У. А. Искакова**

В работе получен критерий полноты корневых векторов произвольного вполне непрерывного оператора в гильбертовом пространстве.

Пусть $L_T$, $L_{T^*}$ — линейные замкнутые операторы в гильбертовом пространстве $H$ с вполне непрерывными обратными $L_T^{-1}$ и $L_{T^*}^{-1}$ на всем $H$, причем $L_T$, $L_{T^*}$ — фредгольмово сопряженные в $H$. Через $L_{\lambda,T}$ и $L_{\lambda,T^*}$ обозначим корневые подпространства операторов $L_T$ и $L_{T^*}$, а $L_{\lambda,T}^{\perp}$ и $L_{\lambda,T^*}^{\perp}$ соответственно их ортогональные дополнения.

Одним из главных вопросов спектральной теории является вопрос полноты корневых векторов, т. е. полноты $L_{\lambda,T}$ и $L_{\lambda,T^*}$ в $H$. Отметим, что для операторов общего вида вопрос полноты корневых векторов устанавливается методом оценки резольвента, предложенным М. В. Келдышем [1], а все остальные известые методы являются некоторыми видоизмениями этого метода.

Ниже мы даем новый критерий полноты корневых векторов.

Определим оператор

$$L_S^{-1} = \frac{L_T^{-1} - L_{T^*}^{-1}}{2i}$$

и обозначим через $R(L_S^{-1})$ и $\operatorname{Ker} L_S^{-1}$ область значений и ядро вполне непрерывного самосопряженного оператора $L_S^{-1}$.

Имеет место

**Теорема.** *Корневые векторы оператора $L_T$ полны в $H$ тогда и только тогда, когда выполняется соотношение*

$$R(L_S^{-1}) \subseteq L_{\lambda,T} \tag{1}$$

Доказательство. Если $L_{\lambda,T} = H$ (т. е. корневые векторы $L_T$ полны), то соотношение (1) всегда выполняется.

Теперь докажем достаточность условии теоремы. Из замкнутости корневого подпространства $L_{\lambda,T}$ следует, что

$$\overline{R\left(L_S^{-1}\right)} \subseteq L_{\lambda,T}. \tag{2}$$

С учетом тождества [2, стр. 282]

$$H = \overline{R\left(L_S^{-1}\right)} \oplus Ker L_S^{-1},$$

переходя к ортогональным дополнениям в соотношении (2), имеем

$$\overline{R(L_S^{-1})}^{\perp} \supseteq L_{\lambda,T}^{\perp},$$

т. е.

$$\operatorname{Ker} L_S^{-1} \supseteq L_{\lambda,T}^{\perp}. \tag{3}$$

Известно, что оператор $L_{T^*}^{-1}$ (см. [1]) вольтеррово инвариантен на $L_{\lambda,T}^{\perp}$. В силу соотношения (3) если $f \in \mathrm{L}_{\lambda,\mathrm{T}}^{\perp}$, то $f \in \operatorname{Ker} L_S^{-1}$, т. е.

$$L_S^{-1} f = \frac{L_T^{-1} - L_{T^*}^{-1}}{2i} f \quad .$$

Отсюда получим, что

$$L_T^{-1} f = L_{T^*}^{-1} f.$$

Из последнего соотношения следует, что вольтеррово инвариантный оператор $L_{T^*}^{-1}$ на $L_{\lambda,T}^{\perp}$ является и самосопряженным. Таким образом, имеем $L_{\lambda,T}^{\perp} = 0$. Тем самым доказано, что $L_{\lambda,T} \equiv H$. Теорема доказана.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Усп. мат. наук. 1971. Т. 26, № 4. С. 1–41.
2. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М.: Наука, 1967.



*Кальменов Тынысбек Шарипович*
*Казахстан, Алматы, Центр физико-математических исследований МОН РК*
t.kalmenov@cpmr.scinet.kz

*Искакова Улзада Асиловна*
*Казахстан, Алматы, Центр физико-математических исследований МОН РК*
u.iskakova@cpmr.scinet.kz