УДК 517.95

ПОЛНОТА КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА – БИЦАДЗЕ

Т. Ш. Кальменов, Б. Д. Кошанов, У. А. Искакова

В работе изучены спектральные свойства уравнений смешанного типа, в частности, в случае симметрической области для уравнения Лаврентьева – Бицадзе доказана полнота корневых векторов задачи Трикоми.

1. Бесконечномерность корневого подпространства задачи Трикоми

Ввиду большой теоретической и прикладной важности спектральные вопросы задачи Трикоми представляют большой научный интерес, а из-за отсутствия методов исследования эта проблема начала изучаться сравнительно недавно. Отметим, что спектральные вопросы уравнений смешанного типа впервые были сформулированы А. В. Бицадзе [1] в начале 70-х годов прошлого столетия. Далее, в работе [2] впервые с помощью нового принципа экстремума доказана непустота спектра задачи Трикоми, а в работах [3, 4] спектральная задача Трикоми сведена к сложной нелинейной спектральной задаче для эллиптических уравнений.

Пусть $\Omega \subset R^2$ — конечная область, ограниченная при $y > 0$ кривой σ, а при $y < 0$ — характеристиками $AC: \ x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = -1$, $BC: \ x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = 1$ уравнения

$$Lu = -yu_{xx} - u_{yy} = f. \tag{1.1}$$

Спектральная задача Трикоми. Найти собственные и присоединенные функции уравнения (1.1), удовлетворяющие краевому условию

$$u|_{\sigma \cup AC} = 0. \tag{1.2}$$

В дальнейшем будем предполагать, что кривая σ оканчивается малыми дугами нормальной кривой $\sigma_0: \ x^2 + \frac{4}{9}y^3 = \frac{1}{4}$.

Имеет место

Теорема 1.1. *Собственные и присоединенные функции (корневые функции) задачи Трикоми образуют бесконечномерное корневое подпространство.*

Доказательство. Через L_T и L_{T^*} обозначим замыкание оператора (1.1) в $L_2(\Omega)$ соответственно на подмножествах функций $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $u|_{\sigma \cup AC} = 0$ и $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $v|_{\sigma \cup BC} = 0$. Обратимость операторов L_T и L_{T^*} на всем $L_2(\Omega)$ и полная непрерывность их обратных L_T^{-1} и $L_{T^*}^{-1}$ доказана в [5]. Под *корневыми функциями* задачи (1.1), (1.2) будем понимать корневые векторы оператора L_T.

Пусть число корневых векторов оператора L_T $\{u_i\}$, соответствующих собственным значениям $\{\lambda_i\}$, конечно, то есть $i = 1, 2, \ldots, N$. В дальнейшем будем использовать разложение пространства $L_2(\Omega)$ в виде [6]

$$L_2 = L_{\lambda,T^*} \oplus L_{\lambda,T^*}^{\perp}, \quad L_2 = L_{\lambda,T} \oplus L_{\lambda,T}^{\perp},$$

где L_{λ,T^*}, $L_{\lambda,T}$ — корневые пространства L_{T^*} и L_T соответственно, то есть линейные векторные пространства, натянутые на корневые векторы $\{u_i\}$, $\{v_i\}$, а $L^{\perp}_{\lambda,T^*}$, $L^{\perp}_{\lambda,T}$ — их ортогональные дополнения в $L_2(\Omega)$.

Имеет место

Лемма 1.1. *Корневые векторы u_i оператора L_T принадлежат $C^\infty(\Omega)\cap C^\gamma(\overline{\Omega})$, $0<\gamma<\frac{1}{6}$.*

Пользуясь свойствами сингулярных интегральных уравнений [5], можно установить неравенства

$$\|u\|_{C^{\gamma+\varepsilon}(\overline{\Omega})} \le C\|f\|_{C^\gamma(\overline{\Omega})}, \quad 0<\gamma+\varepsilon<\frac{1}{6}, \tag{1.3}$$

$$\|u\|_{C^{l+\gamma}(\overline{\Omega}_1)} \le C\|f\|_{C^l(\overline{\Omega}_1)}, \quad 0<\gamma<\frac{1}{6}, \quad l=0,1,\dots, \tag{1.4}$$

Ω_1 — произвольная внутренняя область Ω с гладкой границей $\partial\overline{\Omega}_1\subset\Omega$, $\partial\Omega_1\in C^\infty$. Справедливость леммы следует из неравенств (1.3), (1.4).

Лемма 1.2. *Пусть $u_i(x)$ — произвольный корневой вектор оператора L_T, а область $\Omega_0\subset\Omega$ такова, что $\overline{\Omega}_0\subset\Omega$, $\partial\Omega_0\subset C^\infty$. Тогда существует продолжение $\tilde u_i(x)$ функции $u_i(x)$ из $\Omega\setminus\Omega_0$ в Ω_0, определяемое формулой*

$$\tilde u_i(x) = \begin{cases} u_i(x), & x\in\Omega\setminus\Omega_0,\\ u_i^+(x), & x\in\Omega_0,\end{cases}$$

такое, что

$$\|L_T^k\tilde u_i\|_{L_2(\Omega)} \le CM^k, \quad k=0,1,\dots,S, \tag{1.5}$$

где постоянная M зависит от абсолютных величин собственных значений λ_1, λ_2, …, λ_N и от нормы корневых векторов u_1, …, u_N.

Отметим, что в качестве u_i^+ можно взять решение следующей задачи Дирихле

$$(-\Delta+M_0I)^{2(S+1)}u_i^+ = f_i^+, \quad x\subset\Omega_0,$$

$$\frac{\partial^j}{\partial n^j}u_i^+\Big|_{\partial\Omega_0} = \frac{\partial^j}{\partial n^j}u_i\Big|_{\partial\Omega_0}, \quad j=0,\dots,S.$$

Неравенство (1.5) является обобщением антиаприорных оценок для корневых векторов, введенных В. А. Ильиным [7].

Имеет место

Лемма 1.3. *Существуют элементы c_i такие, что $\sum\limits_{i=1}^{N}|c_i|\ne 0$ и функция, задаваемая формулой*

$$\tilde u(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i\tilde u_i(x),$$

удовлетворяет соотношениям

$$L^k\tilde u\in L^{\perp}_{\lambda,T^*}, \quad (L_T^k\tilde u, v_j)=0,$$

$$\|L^k\tilde u\|_0 \le CM^k, \quad k=0,1,\dots,S. \tag{1.6}$$

Здесь $v_j(x)$ — корневые векторы сопряженного оператора L_{T^*}.

Пользуясь вольтерровой инвариантностью оператора L_T на $L^{\perp}_{\lambda,T^*}$ и неравенством (1.6), из соотношения

$$\tilde u = L_T^{-k}L_T^k\tilde u$$

в силу произвольности Ω_0 и числа k можно показать, что $\tilde{u} \equiv 0$, $u_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Это показывает, что оператор L_T не может иметь конечного числа корневых векторов, что и доказывает теорему.

Пусть теперь $\Omega \subset R^2$ — конечная область, ограниченная при $y > 0$ гладкой кривой $\sigma_0 : \{x^2 + y^2 = 1\}$, а при $y < 0$ — характеристиками $AC :\ x + y = -1$, $BC :\ x - y = 1$ уравнения Лаврентьева – Бицадзе

$$Lu \equiv -\operatorname{sgn} y\, u_{xx} - u_{yy} = f(x, y). \qquad (1.7)$$

Пусть угол подхода кривой σ к оси $y = 0$ меньше, чем $\frac{\pi}{4}$.

Через L_T и L_{T^*} обозначим замыкания дифференциального выражения (1.7) в $L_2(\Omega)$ соответственно на подмножествах функций $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $u|_{\sigma\cup AC} = 0$ и $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $v|_{\sigma\cup BC} = 0$.

Имеет место

Теорема 1.2. *Корневые векторы u_i оператора L_T полны в $L_2(\Omega)$ тогда и только тогда, когда их следы $u_j|_{BC}$ полны в пространстве $L_2(BC)$.*

Доказательство. Необходимость условия теоремы 1.2 доказана в [8]. Пусть $L_{\lambda,T}$ и L_{λ,T^*} — корневые подпространства операторов L_T и L_{T^*} соответственно. Пусть оператор $L_{S,T}$ задается формулой

$$L_{S,T} = \frac{L_T^{-1} - L_{T^*}^{-1}}{2i}.$$

Лемма 1.4. *Пусть* $\operatorname{Ker} L_{S,T}$ *и* $R(L_{S,T})$ *— ядро и область значений оператора* $L_{S,T}$. *Тогда имеет место соотношение*

$$R(L_{S,T}) \subset L_{\lambda,T}. \qquad (1.8)$$

Действительно, если $\tilde{h} = L_{S,T}h = \frac{L_T^{-1} - L_{T^*}^{-1}}{2i}h$ и $(\tilde{h}, Lu_i)_0 = 0$, то непосредственным вычислением убеждаемся в том, что

$$(L\tilde{h}, u_i)_0 - (\tilde{h}, Lu_i)_0 = \int\limits_{BC} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial S}\tilde{u}_i(S)dS = 0.$$

Отсюда в силу полноты $u_j|_{BC}$ в $L_2(BC)$ следует, что $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial S} = 0$. Из единственности решения задачи Трикоми следует $\tilde{h} \equiv 0$, что и доказывает лемму 1.4.

Так как $L_{S,T}$ — самосопряженный оператор, то $R^\perp(L_{S,T}) = \operatorname{Ker} L_{S,T}$. Поэтому из (1.8) следует, что

$$L_{\lambda,T}^\perp \subset Ker\ L_{S,T} = R^\perp(L_{S,T}). \qquad (1.9)$$

Поскольку оператор L_{T^*} вольтерров на $L_{\lambda,T}^\perp$ и в силу соотношения (1.9) самосопряжен на $L_{\lambda,T}^\perp$, то $L_{\lambda,T}^\perp \equiv 0$, что доказывает теорему 1.2.

2. Полнота корневых векторов задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе

Пусть область Ω симметрична относительно оси $x = 0$, а оператор P такой, что

$$(Pf)(x, y) \equiv f(-x, y).$$

Имеет место

Лемма 2.1. *Операторы L_T^{-1} и $L_{T^*}^{-1}$ связаны соотношением*

$$L_{T^*}^{-1} f = P L_T^{-1} P f \tag{2.1}$$

В силу обратимости операторов L_T и L_{T^*} на всем $L_2(\Omega)$ для доказательства леммы 2.1 достаточно применить оператор L_{T^*} к обеим частям равенства (2.1).

Отметим, что формулировку леммы 2.1 авторам впервые сообщил академик АН РК М. Отелбаев.

Теорема 2.1. *Пусть область Ω симметрична относительно оси $x = 0$. Тогда корневые векторы оператора L_T (задачи Трикоми) полны в $L_2(\Omega)$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что система корневых векторов $\{u_n\}$ оператора L_T не полна в $L_2(\Omega)$. Тогда согласно теореме 1.2 следы $\{u_n|_{BC}\}$ не полны в $L_2(BC)$, т. е. существует функция $\Psi(y) \in L_2(y_c, 0)$, где y_c — ордината точки $C(0, y_c)$ такая, что

$$\int\limits_{BC} \Psi(y) u_n(y) dy = \int\limits_{y_c}^{0} \Psi(y) u_n(y) dy = 0.$$

Легко проверить, что решение $v(x, y)$ сопряженной задачи Трикоми

$$Lv = -\operatorname{sgn} y v_{xx} - v_{yy} = 0, \quad v|_\sigma = 0, \quad v|_{BC} = \psi$$

в силу соотношения

$$(Lv, u_n)_0 - (v, Lu_n)_0 = \int\limits_{BC} \Psi(y) u_n(y) dy$$

ортогонально ко всем $\{u_n\}$ в $L_2(\Omega)$, т. е. удовлетворяет тождеству

$$(v, u_n)_0 = 0, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Точно так же убеждаемся в том, что четная часть функции $v(x, y)$, определяемая формулой

$$v^+(x, y) = \frac{v(x, y) + Pv(x, y)}{2} = \frac{v(x, y) + v(-x, y)}{2},$$

тоже является ортогональной ко всем $\{u_n\}$ в $L_2(\Omega)$.

Из-за выполнения необходимого условия ортогональности следующая сопряженная задача Трикоми

$$Lv - \lambda v = 0, \quad v|_{BC} = \int\limits_{0}^{y} \Psi(t) dt$$

разрешима при любом комплексном λ, и ее решение ортогонально всем $\{u_n\}$ в $L_2(\Omega)$. Поэтому четная часть $v(x, y)$, определяемая формулой

$$v^+(x, y) = \frac{v(x, y) + v(-x, y)}{2},$$

удовлетворяет соотношениям

$$Lv^+ - \lambda v^+ = 0, \quad v^+|_{AC} = \int\limits_0^y \Psi(t)dt, \quad v^+|_{BC} = \int\limits_0^y \Psi(t)dt. \tag{2.2}$$

Из (2.2) следует

$$\operatorname{Im}(Lv^+, v^+)_0 = \lambda_2(v^+, v^+)_0 = \int\limits_{BC} \Psi(y) \int\limits_0^y \Psi(t)dtdy, \quad \lambda_2 = \operatorname{Im}\lambda. \tag{2.3}$$

Из (2.3) нетрудно показать неравенство

$$\|v^+\|_0 \le \frac{c\|\Psi\|_0}{|\operatorname{Im}\lambda|}.$$

Отсюда в силу произвольности λ следует $v^+(x, y) \equiv 0$, что противоречит предположению $\Psi(y) \neq 0$. Теорема 2.1 доказана.

Авторы благодарят академика РАН В. А. Ильина, академика АН РК М. Отелбаева за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
2. *Кальменов Т. Ш.* О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе // Диффер. уравн. 1977. Т. 15, № 8. С. 1418–1425.
3. *Моисеев Е. И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М., 1988.
4. *Пономарев С. М.* Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева – Бицадзе: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1981.
5. *Кальменов Т. Ш.* О регулярности краевых задач и спектре для уравнения гиперболического и смешанного типов: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1982.
6. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Усп. мат. наук. 1971. Т. 26, № 4. С. 1–41.
7. *Ильин В. А.* Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости тригонометрических рядов спектральных разложений. I, II // Диффер. уравн. 1980. Т. 16, № 5, № 6. С. 13–14, с. 13–20.
8. *Кальменов Т. Ш., Бименов М. А.* Об одном признаке полноты корневых векторов задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе // Диффер. уравн. 2003. Т. 39, № 10. С. 339–343.

Кальменов Тынысбек Шарипович
Казахстан, Алматы, Центр физико-математических исследований МОН РК
t.kalmenov@cpmr.scinet.kz

Кошанов Бакытбек Данебекович
Казахстан, Алматы, Центр физико-математических исследований МОН РК
b.koshanov@cpmr.scinet.kz

Искакова Улзада Асиловна
Казахстан, Алматы, Центр физико-математических исследований МОН РК
u.iskakova@cpmr.scinet.kz