УДК 517.95

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ ПО ВРЕМЕНИ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Б. Е. Кангужин

В работе изучается одна нелокальная задача для уравнения теплопроводности. Установлено, что единственность в этой задаче связана с полнотой некоторой системы собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования.

В работах [1, 2] изучаются новые типы нелокальных задач для уравнения теплопроводности. В настоящей работе продолжается изучение нелокальных задач для уравнения теплопроводности. В частности, единственность в подобной задаче, оказывается, связана с полнотой некоторой системы собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования.

Фиксируем натуральное $n \geq 1$ и вещественное число $T > 0$. Рассмотрим задачу о нахождении функции $u(x,t)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, $0 \leq t \leq T$, из соотношений

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j^2}, \tag{1}$$

$$u(x,0) - \int\limits_0^T u_t(x,t)\sigma(t)dt = \varphi(x), \tag{2}$$

где $\sigma(t)$ — произвольная функция из пространства $L_2[0,T]$. Происхождение условия (2) объясняется тем, что оно обобщает как аналогичное граничное условие из работы [1], так и нелокальное условие из работы [2]. К примеру, если $\sigma(t)$ — кусочно-постоянная на отрезке $[0,T]$ функция, то приходим к нелокальному граничному условию из работы [2].

При заданной функции $\varphi(x)$ *решением* нелокальной задачи (1), (2) назовем функцию $u(x,\, t)$ из класса $C^{2,1}(R^n \times (0,T)) \cap C^{0,1}(R^n \times [0,T])$, удовлетворяющую уравнению (1) при $x \in R^n$, $0 < t < T$ и соотношению (2). При $\varphi(x) \equiv 0$ получаем решение соответствующей однородной задачи.

Отметим, что с задачей (1), (2) тесно связана следующая задача на собственные значения

$$\begin{aligned} &y'(t) = \lambda y(t), \quad 0 < t < T, \\ &y(0) = \int\limits_0^T y'(t)\sigma(t)dt. \end{aligned} \tag{3}$$

Известно [3], что характеристическая функция

$$\Delta(\lambda) = 1 - \lambda \int\limits_0^T e^{\lambda t}\sigma(t)dt$$

имеет счетное число нулей тогда и только тогда, когда $\sigma \neq \sigma_c$ при любом $c \in [0,T]$, где

$$\sigma_c = \{ \begin{array}{lll} -1 & \text{при} & 0 \le t \le c\,, \\ 0 & \text{при} & c \le t \le T. \end{array}$$

Пусть $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots$ — нули аналитической функции $\Delta(\lambda)$, где каждое λ_n имеет кратность m_n $(m_n \in N)$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$, $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le |\lambda_3| \le \dots$ Нетрудно убедиться, что функция вида

$$u(x,\,t) = \exp(\operatorname{Re}\sqrt{\lambda_k}\,x_j + \operatorname{Re}\lambda_k\,t + i(\operatorname{Im}\sqrt{\lambda_k}\,x_j + \operatorname{Im}\lambda_k\,t)) \quad \forall j \in \{1,\dots,\,n\}$$

является решением задачи (1), (2) при $\varphi(x) = 0$. Будем считать, что $\lambda_k \in \Omega$, т. е. вне некоторого сектора с биссектрисой $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

Обозначим через $\mu_0 = \inf\{|\operatorname{Re}\sqrt{\lambda_1}|, |\operatorname{Re}\sqrt{\lambda_2}|, \dots\}$. Ясно, что $\mu_0 > 0$, поскольку $\lambda_k \in \Omega$. Обозначим класс решений задачи (1), (2), подчиненных условиям

$$|u(x,t)| \le \exp(\mu|x|), \quad x \in R^n, \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

где $\mu < \mu_0$.

Теорема. *Задача* (1), (2) *в классе* (4) *имеет единственное решение тогда и только тогда, когда система собственных и присоединенных функций сопряженной к* (3) *задачи полна в* $L_2[0,T]$.

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся биортогональной системой [4] к системе корневых функции задачи (3)

$$h_{kn} = \frac{1}{(m_n-k-1)!}\lim_{\lambda\to\lambda_n}\frac{d^{m_n-1-k}}{d\lambda^{m_n-1-k}}\left(\frac{(\lambda-\lambda_n)^{m_n}}{\Delta(\lambda)}H(x,\lambda)\right)$$

при $\lambda = \lambda_n$, $k = 0,1,\dots,m_n-1$, $n \ge 1$, где $H(x,\lambda) = \sigma(x) + \lambda\int_x^T e^{\lambda(t-x)}\sigma(t)dt$.

Введем обозначение $\omega_{kn}(x) = \int_0^T u(x,t)h_{kn}(t)dt$ и предварительно рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}
\Delta\int_0^T u(x,t)H(t,\lambda)dt &= \int_0^T u_t(x,t)H(t,\lambda)dt \\
&= \int_0^T u_t(x,t)\left[\sigma(t) + \lambda\int_t^T e^{\lambda(\tau-t)}\sigma(\tau)d\tau\right]dt \\
&= \int_0^T u_t(x,t)\sigma(t)dt + \lambda\int_0^T u_t(x,t)\int_t^T e^{\lambda(\tau-t)}\sigma(\tau)d\tau dt \\
&= u(x,0) - \lambda u(x,0)\int_0^T e^{\lambda\tau}\sigma(\tau)d\tau + \lambda\int_0^T u(x,t)\left[\sigma(t) + \lambda\int_t^T e^{\lambda(\tau-t)}\sigma(\tau)d\tau\right]dt \\
&= u(x,0)\left(1 - \lambda\int_0^T e^{\lambda\tau}\sigma(\tau)d\tau\right) + \lambda\int_0^T u(x,t)H(t,\lambda)dt \\
&= u(x,0)\Delta(\lambda) + \lambda\int_0^T u(x,t)H(t,\lambda)dt.
\end{aligned}$$

В силу оценки (4) и результатов работы [1] при $\mu < \mu_0$ получаем $\omega_{kn}(x) \equiv 0$.

Таким образом, имеем

$$\Delta \int_0^T u(x,t)H(t,\lambda)dt = u(x,0)\Delta(\lambda) + \lambda \int_0^T u(x,t)H(t,\lambda)dt. \tag{5}$$

Умножив обе части (5) на $\frac{1}{(m_n-k-1)!}\frac{(\lambda-\lambda_n)^{m_n}}{\Delta(\lambda)}$ и продифференцировав $m_n - 1 - k$ раз по λ, затем переходя к пределу при $\lambda \to \lambda_n$, имеем

$$\Delta \int_0^T u(x,t)h_{kn}(t) = \frac{1}{(m_n-k-1)!} u(x,0) \lim_{\lambda \to \lambda_n} \frac{d^{m_n-1-k}}{d\lambda^{m_n-1-k}} \left(\frac{(\lambda-\lambda_n)^{m_n}}{\Delta(\lambda)} \cdot \Delta(\lambda) \right) + \lambda_n \int_0^T u(x,t)h_{kn}(t)dt.$$

Следовательно,

$$\Delta\omega_{kn}(x) = \lambda_n \omega_{kn}(x) \quad \text{при} \quad k = 0, 1, \ldots, m_n - 1.$$

В силу оценки (4) и результатов работы [1] при $\mu < \mu_0$ получаем $\omega_{kn}(x) \equiv 0$, т. е.

$$\int_0^T u(x,t)h_{kn}(t)dt = 0, \ \ k = \overline{0, m_n - 1}, \ \ n \geq 1\,. \tag{6}$$

Если система $\{h_{kn}(t)\}$ полна в $L_2[0,T]$, то из соотношении (6) следует $u(x,t) \equiv 0$. Что и доказывает единственность решения задачи (1), (2). Обратно, если задача (1), (2) имеет единственное решение, то система $\{h_{kn}(t)\}$ полна в $L_2[0,T]$. Остается заметить, что $\{h_{kn}(t)\}$ является системой собственных и присоединенных функции сопряженной задачи к задаче (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов И. В., Попов А. Ю.* Экспоненциальные классы единственности в задачах теплопроводности // Докл. РАН. 2003. Т. 389, № 4. С. 465–467.

2. *Берикханова Г. Е., Кангужин Б. Е., Сарыбаева Ж. М.* Нелокальная задача для уравнения теплопроводности // Докл. НАН РК. 2004. N 4. С. 14–17.

3. *Кожатаева М. Ж.* Спектральный анализ оператора дифференцирования: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Алматы, 1999.

4. *Кангужин Б. Е.* Вычислительные аспекты биортогональных разложений // Вычисл. технол. 2004. Т. 9. С. 70–75.

Кангужин Балтабек Есматович

Казахстан, Алматы, Казахский национальный университет им. аль-Фараби

kanbal@mail.ru