УДК 517.956.225

ОБ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ В ОБЛАСТЯХ НА КОНУСЕ

В. В. Катрахов, С. В. Киселевская

Целью данной работы является изучение сингулярной эллиптической краевой задачи в области на конусе, содержащей его вершину — особую точку. В работе определяются и изучаются новые функциональные пространства, которые совпадают с пространствами Соболева – Никольского – Бесова вне особой точки. Также вводится понятие сигма-следа в особой точке. Основной результат состоит в доказательстве однозначной разрешимости поставленной сингулярной краевой задачи.

В последние десятилетия построена общая теория эллиптических задач в областях, границы которых содержат особенности — углы, конические точки, рёбра. Одной из основных работ здесь является монография С. А. Назарова, Б. А. Пламеневского [1], в которой дано подробное изложение главных разделов теории эллиптических задач в областях с кусочно гладкой границей. В рамках настоящей работы мы изучаем особенности, которые нельзя даже отнести к степенным, поскольку они структурно совпадают с изолированными особенностями аналитических или гармонических функций.

Нами изучена сингулярная эллиптическая краевая задача в области на конусе, содержащей его вершину — особую точку. Вводится понятие σ-следа в особой точке, доказываются прямая и обратная теоремы о σ-следах. Основной результат состоит в доказательстве теоремы об однозначной разрешимости соответствующей краевой задачи.

1. Общая постановка краевой задачи

Обозначим через Q_R, $0 < R \leqslant \infty$, открытый круговой конус с вершиной в точке $\mathcal{O}_Q$, с образующими длиной R и углового размера Φ, при этом под угловым размером понимается раствор сектора, получающийся из конуса путём разрезания его по одной из образующих и последующим развёртыванием в плоский сектор S. Для определённости будем считать, что $\Phi<2\pi$, случай $\Phi=2\pi$ был разобран одним из авторов в работе [2].

Рассмотрим ограниченную область $\Omega_Q \subset Q$, для которой вершина конуса $\mathcal{O}_Q$ является граничной точкой, изолированной от остальной части границы, последнюю мы будем считать гладкой кривой класса C^∞ и обозначать через G_Q.

Обозначим через $\overline{R}$, $0<\overline{R}<\infty$, максимальное расстояние от вершины конуса $\mathcal{O}_Q$ до границы G_Q, а через $R^\circ>0$ — минимальное расстояние от вершины конуса $\mathcal{O}_Q$ до границы G_Q.

В дальнейшем, для определённости, мы будем считать, что операция $\mathcal{R}$ указанного разрезания (с последующим развертыванием) производится по образующей, проходящей через одну из наиболее удалённых от вершины точек границы G_Q.

Положим $\mathcal{R}Q_R = S_R \subset \mathbb{R}^2$, $\Omega = \mathcal{R}\Omega_Q$, $G = \mathcal{R}G_Q$, причём пусть, не ограничивая общности, точка $\mathcal{O} = \mathcal{R}\mathcal{O}_Q$ совпадает с началом координат на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Граница области $\Omega \subset S_{\overline{R}} \subset \mathbb{R}^2$ состоит из трёх частей — точки $\mathcal{O}$, разорванной гладкой кривой G и двух отрезков G', G'', являющихся образами преобразования $\mathcal{R}$ берегов выбранного разреза, причём пусть поворот от G' к G'', происходящий по области Ω, осуществляется против часовой стрелки и пусть отрезок G' лежит на оси абсцисс. Наглядно указанная конфигурация проиллюстрирована на рисунке 1.

Наша исходная цель состоит в постановке и изучении эллиптической краевой задачи в области Ω_Q на конусе, однако, используя преобразование $\mathcal{R}$, мы рассмотрим её сразу в области Ω на плоскости. Обратным преобразованием её можно трансформировать на конус.

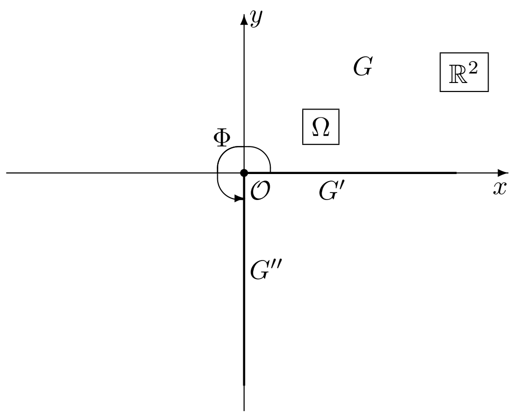

Рис. 1

Введём стандартные полярные координаты $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Оператор Лапласа в полярных координатах имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi^2}.$$

Ниже мы будем изучать краевую задачу вида

$$\Delta u = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u\big|_G = g(x), \quad x \in G, \tag{2}$$

$$\sigma u\big|_{\mathcal{O}} = \Psi(\varphi), \quad \varphi \in [0, \Phi], \tag{3}$$

при дополнительном условии периодичности с периодом Φ (условие П) по угловой переменной φ всех участвующих в этой задаче функций — это, по сути дела, есть краевое условие на частях границы G', G''. Понятие сигма-следа $\sigma u\big|_{\mathcal{O}}$ и смысл условия П будут разъяснены в процессе дальнейших построений.

2. Функциональных пространства

Нам потребуются два класса функциональных пространств, условно называемыми нами сингулярными и регулярными. В сингулярные пространства будут входить функции с сильными особенностями в особой точке, а в регулярные — со слабыми (т. е., условно говоря, регулярными) особенностями. Эти пространства будут последовательно исследованы в одномерной и двумерной ситуациях на базе разработанной ранее теории операторов преобразования.

2.1. Операторы преобразования. Пусть R обозначает положительное число или бесконечность. Через $C^\infty(0,R)$ обозначим множество бесконечно дифференцируемых на интервале $(0,R)$ функций, а через $C^\infty[0,R)$ — подмножество функций из $C^\infty(0,R)$, все производные которых непрерывны вплоть до левого конца. Символ $\overset{\circ}{C}{}^\infty[0,R)$ обозначает подмножество функций из $C^\infty[0,R)$, обращающихся в нуль в окрестности правого конца. Через $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{\{\circ\}}(0,R)$ обозначим подмножество функций из $C^\infty(0,R)$, обращающихся в нуль в окрестности правого конца. Отметим то, что функции из $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{\{\circ\}}(0,R)$ могут иметь произвольную особенность в левом конце. Будем называть функцию f из $\overset{\circ}{C}{}^\infty[0,R)$ *чётной*, если её производные (порядка k) $D^k f$ обращаются в нуле в нуль при всех нечётных значениях k. (Это немного не стандартное определение, смысл его состоит в том, что мы называем функцию чётной, если её продолжение по закону чётности является гладкой функцией. Знак "$+$" всегда будет указывать на чётность, понимаемую возможно в некотором обобщённом смысле). Множество чётных функций из $C^\infty[0,R)$ обозначим через $C^\infty_+[0,R)$.

Пусть $\nu \geqslant 0$ и пусть символ $\overset{\circ}{C}{}^\infty_\nu(0,R)$ обозначает множество всех функций f, допускающих представление $f=\mathcal{P}_\nu g$, в котором $g\in \overset{\circ}{C}{}^\infty[0,R)$, то есть $\overset{\circ}{C}{}^\infty_\nu(0,R)=\mathcal{P}_\nu\,\overset{\circ}{C}{}^\infty[0,R)$, где $\mathcal{S}_\nu$ и $\mathcal{P}_\nu$ являются операторами преобразования, введёнными в [2] и имеющими вид

$$\mathcal{P}_\nu f(r)=\frac{-\sqrt{\pi}r^{-\nu-1/2}}{2^{\nu+1/2}\Gamma(\nu+1)}\int\limits_r^\infty P^\circ_{\nu-1/2}\Big(\frac{\rho}{r}\Big)\frac{df(\rho)}{d\rho}\,d\rho$$

(после интегрирования по частям)

$$=\frac{\sqrt{\pi}r^{-\nu-1/2}}{2^{\nu+1/2}\Gamma(\nu+1)}\bigg(f(r)+(\nu^2-1/4)\int\limits_1^\infty\frac{P^{-1}_{\nu-1/2}(\rho)}{\sqrt{\rho^2-1}}f(r\rho)\,d\rho\bigg),$$

$$\mathcal{S}_\nu f(r)=\frac{-2^{\nu+1/2}\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dr}\int\limits_r^\infty P^\circ_{\nu-1/2}\Big(\frac{r}{\rho}\Big)f(\rho)\rho^{\nu+1/2}\,d\rho$$

(после дифференцирования интеграла по параметру)

$$=\frac{(2r)^{\nu+1/2}\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}}\bigg(f(r)-(\nu^2-1/4)\int\limits_1^\infty\frac{\rho^{\nu+1/2}P^{-1}_{\nu-1/2}(\rho)}{\sqrt{\rho^2-1}}f(r\rho)\,d\rho\bigg),$$

где $P^\circ_{\nu-1/2}$ — функции Лежандра первого рода порядка, $P^{-1}_{\nu-1/2}$ — присоединённые функции Лежандра первого рода порядка $\nu-1/2$ [3].

Операторы $\mathcal{P}_\nu,\mathcal{S}_\nu$ взаимно однозначно отображают пространство $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{\{\circ\}}(0,R)$ на себя и являются на нём взаимно обратными, кроме того, имеют место сплетающие формулы

$$B_\nu\mathcal{P}_\nu=\mathcal{P}_\nu D^2,\quad D^2\mathcal{S}_\nu=\mathcal{S}_\nu B_\nu.$$

Здесь и далее B_ν обозначает сингулярный дифференциальный оператор Бесселя

$$B_\nu=D^2+\frac{2\nu+1}{r}D=\frac{1}{r^{2\nu+1}}Dr^{2\nu+1}D,\quad D=\frac{d}{dr},\quad D^2=\frac{d^2}{dr^2}.$$

2.2. Функциональные пространства в одномерном случае. Пространство $\overset{\circ}{H}{}^s_\nu(0,R)$ для целых $s \geqslant 0$ и $\nu \geqslant -1/2$ определяется как обобщённое замыкание множества $\overset{\circ}{C}{}^\infty_\nu(0,R)$ по норме

$$\|f\|_{\overset{\circ}{H}{}^s_\nu(0,R)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1/2}\Gamma(\nu+1)}\,\|D^s(\mathcal{S}_\nu f)\|_{L_2(0,R)},$$

где $L_2(0,R)$ — лебегово пространство с нормой

$$\|g\|_{L_2(0,R)} = \sqrt{\int\limits_0^R |g(r)|^2 dr}.$$

Эти пространства относятся к сингулярным.

Введём весовую функцию

$$\sigma_\nu(r) = \begin{cases} r^{2\nu}, & \text{если } \nu > 0, \\ -(\ln r)^{-1}, & \text{если } \nu = 0. \end{cases}$$

Известно [2], что если $s \geqslant 1$, $\nu \geqslant 0$, $s+\nu > 1$, то для любой функции $f \in \overset{\circ}{H}{}^s_\nu$ $(0,2R)$ весовой σ_ν-след, определяемый по формуле

$$\sigma_\nu f(r)\Big|_{r=0} \equiv \lim_{r\to+0} \sigma_\nu f(r),$$

существует и для него справедлива оценка

$$\left|\sigma_\nu(r)f(r)\Big|_{r=0}\right| \leqslant C(s,R)(4R)^\nu(\nu+1)^{-s}\|f\|_{\overset{\circ}{H}{}^s_\nu(0,2R)}. \tag{4}$$

Обобщённое замыкание линеала $\overset{\circ}{C}{}^\infty_+[0,R)$ (при чётных s) по норме

$$\|f\|_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\nu,+}(0,R)} = \sqrt{\int\limits_0^R |B_\nu^{s/2} f(r)|^2 r^{2\nu+1} dr}$$

приводит к пространствам И. А. Киприянова $\overset{\circ}{H}{}^s_{\nu,+}(0,R)$, которые мы относим к регулярным.

Для функций $f \in \overset{\circ}{C}{}^\infty_+[0,R)$ справедлива оценка

$$\|f\|_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\nu,+}(0,R)} \leqslant \|f\|_{\overset{\circ}{H}{}^s_\nu(0,R)}. \tag{5}$$

2.3. Функциональные пространства в двумерном случае. Сначала рассмотрим класс регулярных пространств.

Введём функцию гладкой срезки $\chi(r)$, $r \geqslant 0$, — бесконечно дифференцируемую функцию, равную 1 при $0 \leqslant r \leqslant 1$ и нулю при $r \geqslant 2$, и положим $\chi_{_R}(r) = \chi(r/R)$.

Обозначим через $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega\backslash\mathcal{O})$ пространство, состоящее из функций f таких, что при любом $R \in (0, R_\circ)$ функция $(1-\chi_{_R})f$ будет принадлежать пространству $H^s(\Omega)$.

Здесь и далее символ $H^s (\equiv W_2^s)$ обозначает пространство Соболева – Никольского – Бесова.

Наделим пространство $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ топологией, определяемой семейством полунорм $\|f\|_{H^s_{\mathrm{loc}}} = p_{s,R}(f) = \|(1-\chi_{_R})f\|_{H^s(\Omega)}$, $0 < R < R_\circ$. Данная топология

превращает $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ в полное топологическое векторное пространство. Функций из пространства $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ вне любой окрестности вершины сектора устроены так же, как и функции из H^s, а в самой вершине могут иметь произвольную особенность.

Введём преобразование

$$\Pi_\Phi : f(r,\varphi) \mapsto (\Pi_\Phi f)(r,\varphi) = f(r, 2\pi\varphi/\Phi),$$

являющееся заменой угловой переменной. При этом область Ω преобразуется в ограниченную область $\Pi_\Phi \Omega = \Omega_\Pi$ с гладкой границей $\Pi_\Phi G = G_\Pi$.

Обозначим через $C^\infty_\Pi(\overline{\Omega})$ такой линеал, что $\Pi_\Phi C^\infty_\Pi(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega_\Pi})$.

Введём теперь пространство $H^s_\Pi(\Omega)$ как подпространство пространства $H^s(\Omega)$, получаемое замыканием линеала $C^\infty_\Pi(\overline{\Omega})$ по норме пространства $H^s(\Omega)$

$$\|f\|_{H^s(\Omega)} = \sqrt{\sum \int\limits_\Omega |D^l_x D^m_y f|^2 d\Omega} = \sqrt{\sum \|D^l_x D^m_y f\|^2_{L_2(\Omega)}},$$

где частные производные $D^l_x = \partial^l/\partial x^l$, $D^m_y = \partial^m/\partial x^m$ и суммирование осуществляется по всем целым неотрицательным l, m таким, что $l + m \leqslant s$. По сути, пространство $H^s_\Pi(\Omega)$ состоит из функций пространства $H^s(\Omega)$, удовлетворяющих в соответствующем смысле условию периодичности П. (Это означает совпадение на G' и G'' следов самой функции и всех её производных, включая дробные (тех, которые существуют у функции из $H^s(\Omega)$ на границе в зависимости от величины s). Например, при $s = 0$ никаких следов не существует, поэтому никакого условия Π_Φ в таком случае рассматривать не следует).

Обозначим через $H^s_{\Pi,\mathrm{loc}}(\Omega \backslash \mathcal{O})$ пространство, состоящее из функций f таких, что при любом $R \in (0, R_\circ)$ функция $(1 - \chi_R) f$ будет принадлежать пространству $H^s_\Pi(\Omega)$.

Определим теперь пространство $H^s_{\Pi,\Delta}(\Omega)$ как обобщённое замыкание линеала $C^\infty_\Pi(\overline{\Omega})$ в $L_2(\Omega)$ по норме

$$\|f\|_{H^s_{\Pi,\Delta}(\Omega)} = \sqrt{\sum_{l=0}^{s/2} \|\Delta^l f\|^2_{L_2(\Omega)}} \tag{6}$$

при чётных $s \geqslant 0$ и

$$\|f\|_{H^1_{\Pi,\Delta}(\Omega)} = \sqrt{\|f\|^2_{H^{s-1}_{\Pi,\Delta}(\Omega)} + \|D_x \Delta^{(s-1)/2} f\|^2_{L_2(\Omega)} + \|D_y \Delta^{(s-1)/2} f\|^2_{L_2(\Omega)}} \tag{7}$$

при нечётных s.

Покажем, что $H^s_{\Pi,\Delta}$ — гильбертово пространство, непрерывно вложенное в $L_2(\Omega)$. По теореме о существовании обобщённого замыкания (см., например, [4]) достаточно проверить выполнение условия согласования: из того, что последовательность функций $f_n \in C^\infty_\Pi(\overline{\Omega})$ фундаментальна по норме (6) (или (7)) и сходится к нулю по норме пространства $L_2(\Omega)$, должно следовать, что она сходится к нулю и по норме (6) (или (7)).

Действительно, пусть, например, s — чётное. Тогда для любых $l \leqslant s/2$ функции $\Delta^l f_n \in C^\infty_\Pi(\overline{\Omega})$ и образуют фундаментальную в $L_2(\Omega)$ последовательность, в силу полноты $L_2(\Omega)$ она сходится к некоторой функции $g_l \in L_2(\Omega)$. Значит, для любой функции h из $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$ имеем

$$\int\limits_\Omega \Delta^l f_n h \, d\Omega \to \int\limits_\Omega g_l h \, d\Omega.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{\Omega} h\Delta^l f_n \, d\Omega = (-1)^l \int\limits_{\Omega} f_n \Delta^l h \, d\Omega \to \int\limits_{\Omega} 0 \cdot \Delta^l h \, d\Omega = 0,$$

значит, $\int\limits_{\Omega} g_l h d\Omega = 0 \ \forall \varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega)$, а так как линеал $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}(\Omega)$ всюду плотен в пространстве $L_2(\Omega)$, то почти всюду $g_l = 0$. Следовательно, $f_n \overset{H^s_{\Pi,\Delta}(\Omega)}{\longrightarrow} 0$ и выполнение условия согласования доказано.

Перейдём к построению сингулярных пространств.

Рассмотрим задачу Штурма – Лиувилля на отрезке $[0, \Phi]$ с периодическими краевыми условиями

$$\begin{cases} Y''(\varphi) = -\lambda^2 Y, \quad \varphi \in [0, \Phi], \\ Y(0) = Y(\Phi), \\ Y'(0) = Y'(\Phi). \end{cases}$$

Система функций, состоящая из $Y_k^1 = \sqrt{2/\Phi}\sin(\lambda_k\varphi)$ и $Y_k^2 = \sqrt{2/\Phi}\cos(\lambda_k\varphi)$, где $\lambda = \lambda_k = 2\pi k/\Phi$, являющихся решениями данной задачи, образует ортонормированный базис лебегова пространства $L_2(0, \Phi)$.

Введём множество $T^{\infty}_{\Pi}(\Omega)$ функций f из $C^{\infty}_{\Pi}(\overline{\Omega}\backslash\mathcal{O})$, для которых справедливо разложение

$$f = f(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{2} f_{kl}(r) Y_k^l(\varphi),$$

где коэффициенты Фурье

$$f_{kl}(r) = \int\limits_0^{\Phi} f(r, \varphi) Y_k^l(\varphi) d\varphi,$$

при этом предполагается, что натуральное число K своё для каждой функции f и что функции $r^{-\lambda_k}\chi_R(r) f_{kl}(r)$ принадлежат линеалу $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{\lambda_k}(0, 2R_\circ)$.

На $T^{\infty}_{\Pi}(\Omega)$ определим при фиксированном целом $s \geqslant 0$ и всех R, $0 < R < R_\circ$, систему норм

$$\|f\|^2_{s,R} = \sum_k \sum_{l=1}^{2} \|r^{-\lambda_k}\chi_R f_{kl}\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\lambda_k}(0,2R)} + \|(1 - \chi_R) f\|^2_{H^s_{\Pi,\Delta}(\Omega)}. \tag{8}$$

Справедливо вложение $T^{\infty}_{\Pi}(\Omega) \subset H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, и для любой функции f из $T^{\infty}_{\Pi}(\Omega)$ имеет место оценка $\|f\|_{s,R} \geqslant p_{s,R}(f)$. Таким образом, это вложение будет и непрерывным.

Введём основное в рамках настоящей работы функциональное пространство $M^s_{\Pi}(\Omega)$ как замыкание $T^{\infty}_{\Pi}(\Omega)$ по топологии, определяемой системой норм (8) по $0 < R < R_\circ$. Эта топология сильнее топологии пространства $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ и, почти очевидно, выполнено условие согласования, поэтому справедливо вложение $M^s_{\Pi}(\Omega) \subset H^s_{\Pi,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Обозначим через $T^{\infty}_{\Pi,+}(\Omega)$ подмножество функций f из $T^{\infty}_{\Pi}(\Omega)$ таких, что для них коэффициенты Фурье f_{kl} удовлетворяют условию $r^{-\lambda_k} f_{k,l}\chi_R \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}_{+}[0, R)$.

Пусть функция $f \in T^{\infty}_{\Pi,+}(\Omega)$ и s — чётное. Тогда при любом R из $(0, R_\circ)$ функция $\chi_R f$ принадлежит $T^{\infty}_{\Pi,+}(S_{2R})$ и выполняется следующее неравенство

$$\|\chi_R f\|^2_{H^s_{\Pi,\Delta}(S_{2R})} = \int\limits_{\Omega} |\Delta^{s/2}(\chi_R f)|^2 d\Omega$$

$$= \int\limits_{\Omega} \Big|\Delta^{s/2} \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{2} \chi_R f_{kl} Y_k^l\Big|^2 d\Omega = \int\limits_{\Omega} \Big|\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{2} \Delta^{s/2}(\chi_R f_{kl} Y_k^l)\Big|^2 d\Omega$$

(по равенству Парсеваля)

$$= \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{2} \int\limits_0^{2R} |B^{s/2}_{\lambda_k}(r^{-\lambda_k}\chi_R f_{kl})|^2 r^{2\lambda_k+1} dr = \sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{2} \|r^{-\lambda_k}\chi_R f_{k,l}\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\lambda_k,+}(0,2R)}$$

$$\geqslant \mathrm{const} \sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{2} \|r^{-\lambda_k}\chi_R f_{kl}\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\lambda_k}(0,2R)}.$$

Следовательно,

$$\|f\|^2_{s,R} \leqslant \mathrm{const}(\|\chi_R f\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\Pi,\Delta}(S_{2R})} + \|(1-\chi_R)f\|^2_{H^s_{\Pi,\Delta}(\Omega)}).$$

Выражение справа является при любом $R \in (0, R_0)$ квадратом одной из эквивалентных норм пространства $H^s_{\Pi,\Delta}(\Omega)$.

Отсюда и из того, что множество $T^\infty_\Pi(\Omega)$ всюду плотно в $H^s_{\Pi,\Delta}(\Omega)$ вытекает

Теорема 1. *Для любого $s \geqslant 0$ имеет место вложение, понимаемое и в топологическом смысле $H^s_{\Pi,\Delta}(\Omega) \subset M^s_\Pi(\Omega) \subset H^s_{\Pi,\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

Следствие. *Пространство $H^s_{\Pi,\Delta}(\Omega)$ не плотно в $M^s_\Pi(\Omega)$.*

Лемма 1. *Пространство $M^s_\Pi(\Omega)$ — полное счётно-нормируемое топологическое пространство, т. е. пространство Фреше.*

Доказательство. Рассмотрим счётный набор норм $\|\cdot\|_{s,R_m}$, где $m = 1, 2, \ldots,$ и последовательность $R_m \to +0$ при $m \to \infty$, причём, $R_m < R_\circ$. Нетрудно показать, что топология задаваемая этим набором норм будет равносильна исходной. Таким образом, пространство $M^s_\Pi(\Omega)$ — полное счётно-нормируемое топологическое пространство.

Теорема 2. *Пусть $0 \leqslant s_1 < s_2$. Тогда $M^{s_2}_\Pi(\Omega)$ непрерывно вложено в $M^{s_1}_\Pi(\Omega)$.*

Доказательство. Так как для любой функции $g \in \overset{\circ}{C}{}^\infty[0, R)$

$$\|g\|_{\overset{\circ}{H}{}^{s_1}(0,R)} = \|D^{s_1} g\|_{L_2(0,R)} \leqslant c(s_2 - s_1, R)\|g\|_{\overset{\circ}{H}{}^{s_2}(0,R)},$$

то

$$\|\chi_R r^{-\lambda_k} f_{kl}\|_{\overset{\circ}{H}{}^{s_1}_{\lambda_k}(0,2R)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1/2}\Gamma(\nu+1)} \|\mathcal{S}_\nu(\chi_R r^{-\lambda_k} f_{kl})\|_{\overset{\circ}{H}{}^{s_1}_{\lambda_k}(0,2R)}$$

$$\leqslant c(s_1 - s_2, R)\|\chi_R r^{-\lambda_k} f_{kl}\|_{\overset{\circ}{H}{}^{s_2}_{\lambda_k}(0,2R)}.$$

Суммируя эти неравенства по k и замечая, что выполняется следующее неравенство $\|(1-\chi_R)f\|_{H^{s_1}(\Omega)} \leqslant c\|(1-\chi_R)f\|_{H^{s_2}(\Omega)}$, получаем оценку вида $\|f\|_{s_1,R} \leqslant c\|f\|_{s_2,R}$, в котором постоянная не зависит от функции $f \in M^{s_2}_\Pi(\Omega)$. Теорема доказана.

3. Теоремы о следах

Сначала рассмотрим след в особой точке $\mathcal{O}$. Введём операцию усреднения по угловой переменной

$$\sigma f(r,\varphi)=\frac{1}{\ln r}f_{01}(r)Y_0^1(\varphi)+\sum_k\sum_{l=1}^{2}r^{\lambda_k}f_{kl}(r)Y_k^l(\varphi),$$

т. е. σ представляет собой интегральный оператор, действующий по угловым переменным,

$$\sigma f(r,\varphi)=\int\limits_0^{\Phi}f(r,\varphi')\mathit{\Sigma}(r,\varphi,\varphi')d\varphi'$$

с некоторым ядром $\mathit{\Sigma}$, явный вид которого из-за его громоздкости мы здесь не приводим. Для функций $f\in T_\Pi^\infty(\Omega)$ определим *σ-след в точке* $\mathcal{O}$ как предел

$$\sigma f\big|_{\mathcal{O}}=\lim_{r\to 0}\sigma f(r,\varphi),$$

понимаемый в классическом поточечном смысле. Из п. 2.2 следует существование σ-следа для функции $f\in T_\Pi^\infty(\Omega)$, который при этом является тригонометрическим полиномом.

Понятие σ-следа на всё пространство $M_\Pi^s(\Omega)$ распространим путём расширения по непрерывности с $T_\Pi^\infty(\Omega)$. Для этого введём пространство σ-следов A_Π как множество функций, определённых на отрезке $[0,\Phi]$ (в другой интерпретации — как множество функций, определённых на дуге Θ_S единичной окружности Θ, расположенной в замкнутом секторе $\overline{S}$, т. е. $\Theta_S=\Theta\cap\overline{S}$, переменная $\varphi\in[0,\Phi]$ является для этой дуги натуральным параметром) и допускающих разложение в ряд Фурье

$$\Psi(\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{2}\psi_{kl}Y_k^l(\varphi),$$

для коэффициентов которого для любого $h>0$ конечны нормы

$$\|\Psi\|_h^2=\sum_k\sum_{l=1}^{2}h^{-2k}\mid\psi_{kl}\mid^2. \tag{9}$$

Лемма 2. *Пространство A_Π является полным счётно-нормируемым топологическим пространством, т. е. пространством Фреше.*

Доказательство. Докажем полноту. Пусть $\{\Psi^m\}\subset A_\Pi$ — фундаментальная последовательность, т. е. для любого $h\in(0,1)$ имеем $\|\Psi^{m_1}-\Psi^{m_2}\|_h\to 0$ при $m_1,m_2\to\infty$. Поэтому для каждого h найдётся функция $g_h(\varphi)$, принадлежащая по крайней мере лебегову пространству L_2, такая, что выполняется неравенство $\|g_h\|_h<\infty$ и $\|\Psi^m-g_h\|_h\to 0$ при $m\to\infty$. Так как выполняется неравенство $\|\Psi\|_h\leqslant\|\Psi\|_{h'}$ при $h'<h$, то из условия $\|g_{h'}-\Psi^m\|_{h'}\to 0$ следует, что $\|g_{h'}-\Psi^m\|_h\to 0$ при $m\to\infty$. Следовательно, все функции g_h совпадают друг с другом. Эта единственная функция принадлежит пространству A_Π и является пределом последовательности $\{\Psi^m\}$ по любой норме (9). Полнота доказана.

Рассмотрим счётное множество норм $\|\cdot\|_{1/m}$, $m=2,3,\ldots$ Определяемая ими топология равносильна исходной. Действительно, для любого h существует m такое, что $1/m<h$, значит, $\|\cdot\|_{1/m}\leqslant\|\cdot\|_h$. Аналогично, для любого m существует

$h = 1/m$ такое, что $\|\cdot\|_h \leqslant \|\cdot\|_{1/m}$. Значит, эти две топологии равносильны. Таким образом, пространство A_Π счётно-нормируемо. Лемма доказана.

Отметим, что к A_Π относятся те и только те функции, которые допускают гармоническое продолжение с дуги Θ_S на весь замкнутый сектор $\overline{S}$. Для функции Ψ из A_Π таким продолжением будет гармоническая функция

$$f(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{2} r^{\lambda_k}\psi_{kl}(r)Y_k^l(\varphi).$$

Теорема 3 (прямая теорема о σ-следах). *Для каждой функции f из пространства $M_\Pi^s(\Omega)$ существует σ-след $\sigma f\big|_{\mathcal{O}} \in A_\Pi$. При этом оператор $f \mapsto \sigma f\big|_{\mathcal{O}}$ непрерывно отображает $M_\Pi^s(\Omega)$ в пространство A_Π.*

Доказательство. Достаточно показать то, что данный оператор непрерывно отображает пространство $T_\Pi^\infty(\Omega)$ с индуцированной пространством $M_\Pi^s(\Omega)$ топологией в пространство A_Π. Для этого необходимо и достаточно доказать, что для любого $h \in (0,1)$ существует такое число $R \in (0, R_\circ)$ и такая константа $c > 0$, что для любой функции $f \in T_\Pi^\infty(\Omega)$ справедлива оценка $\|\sigma f\big|_{\mathcal{O}}\|_h \leqslant c\|f\|_{s,R}$.

Пусть f_{kl} — коэффициент разложения функции $f \in T_\Pi^\infty(\Omega)$ по гармоникам Y_k^l. Тогда функции $r^{-\lambda_k}\chi_R f_{kl}$ принадлежат пространству $\mathring{C}^\infty_{\lambda_k}(0,2R)$, а значит и пространству $\mathring{H}^s_{\lambda_k}(0,2R)$. Полагая тогда в неравенстве (4) $g = r^{-\lambda_k} f_{kl}\chi_R$ и $\nu = \lambda_k$, получим

$$\big|\sigma_\nu(r) r^{-\lambda_k} f_{kl}\big|_{r=0} \leqslant C(s,R)(4R)^k(k+1)^{-s}\|\chi_R r^{-\lambda_k} f_{kl}\|_{\mathring{H}^s_{\lambda_k}(0,2R)}.$$

Далее, так как сигма-след

$$\sigma f\big|_{\mathcal{O}} = \sum_k\sum_l \sigma_{\lambda_k} r^{-\lambda_k} f_{kl}(r)\big|_{r=\circ} Y_k^l(\varphi),$$

то для любого $h \in (0,1)$ из предыдущей оценки получаем

$$\begin{aligned}
\|\sigma f\ |_{\mathcal{O}}\ \|_h^2 &= \sum_k\sum_{l=1}^{2}\big|\sigma_\nu r^{-\lambda_k} f_{kl}\big|_{r=\circ}\big|^2 h^{-2k}\\
&\leqslant C(s,R)\sum_k\sum_{l=1}^{2}(4R)^{2k}(k+1)^{-2s}h^{-2k}\|\chi_R r^{-\lambda_k} f_{kl}\|^2_{\mathring{H}^s_{\lambda_k}}\\
&\qquad\leqslant C(s,R)\sum_k\sum_{l=1}^{2}\|\chi_R r^{-\lambda_k} f_{kl}\|_{\mathring{H}^s_{\lambda_k}(0,2R)} \leqslant C(s,R)\|f\|^2_{s,R},
\end{aligned}$$

где положено $R = 1/4h$. Теорема доказана.

Теорема 4 (обратная теорема о σ-следах). *Отображение $\Psi \mapsto f$, задаваемое формулой*

$$f(r,v) = (\ln r)\Psi_{01}Y_0^1 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{2} r^{-\lambda_k}\Psi_{kl}Y_k^l(v), \tag{10}$$

непрерывно из пространства $A_\Pi[0,\Phi]$ в пространство $M_\Pi^s(\Omega)$ и при этом $\sigma f\big|_{\mathcal{O}} = \Psi$.

Доказательство. Пусть функция $\Psi \in A_\Pi[0,\Phi]$ и Ψ_{kl} её коэффициенты разложения в ряд Фурье по гармоникам Y_k^l. Отметим, что так как $\Psi \in A_\Pi[0,\Phi]$, то

ряд (10) сходится абсолютно и равномерно в секторе S вне любой окружности с центром в $\mathcal{O}$ к аналитической функции.

Пусть $s \geqslant 2$ чётное число. Тогда, используя свойства операторов преобразования (см. [5]), получаем

$$\|\chi_R r^{-2\lambda_k}\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\lambda_k}(0,2R)} = \frac{2\pi}{2^{2\lambda_k+1}\Gamma^2(\lambda_k+1)}\|D^s\mathcal{S}_{\lambda_k}(\chi_R r^{-2\lambda_k})\|^2_{L_2(0,2R)}$$
$$= \frac{2\pi}{2^{2\lambda_k+1}\Gamma^2(\lambda_k+1)}\|\mathcal{S}_{\lambda_k}B^{s/2}_{\lambda_k}(\chi_R r^{-2\lambda_k})\|_{L_2(0,2R)},$$

где $\mathcal{S}_{\lambda_k}$ — операторы преобразования из пункта 2.1.

Применяя соотношение Дарбу – Вайнштейна $r^{2\mu}B_\mu r^{-2\mu} = B_{-\mu}$ получаем

$$\|\chi_R r^{-2\lambda_k}\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\lambda_k}(0,2R)} \leqslant \frac{2\pi}{2^{2\lambda_k+1}\Gamma^2(\lambda_k+1)}\|\mathcal{S}_{\lambda_k}(r^{-2\lambda_k}B^{s/2}_{-\lambda_k}\chi_R)\|^2_{L_2(0,2R)}.$$

Так как функция $\chi_R(r) = 1$ при $0 \leqslant r \leqslant R$, то

$$B_{-\lambda_k}\chi_R(r) = r^{2\lambda_k-1}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{1-2\lambda_k}\frac{\partial\chi_R}{\partial r}\right) = 0$$

при тех же значениях r. Значит, и $B^{s/2}_{-\lambda_k}\chi_R(r) = 0$ при $r \leqslant R$, а также и при $r \geqslant 2R$, поскольку $\chi_R(r) = 0$ при $r \geqslant 2R$. Отсюда следует, что функция $B^{s/2}_{\lambda_k}\chi_R(r)$ бесконечно дифференцируема, имеет компактный носитель и обращается в ноль вблизи начала. Следовательно, получаем

$$\|r^{-2\lambda_k}\chi_R\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\lambda_k}(0,2R)} \leqslant \|r^{-2\lambda_k}\chi_R\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\lambda_k,+}(0,2R)} = \int\limits_R^{2R}|B^{s/2}_{-\lambda_k}\chi_R(r)|^2 r^{1-2\lambda_k}dr.$$

Так как $\chi(t) \in C^\infty[1,2]$, то имеет место оценка

$$\|r^{-2\lambda_k}\chi_R\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\lambda_k}(0,2R)} \leqslant R^{2-s-2\lambda_k}\int\limits_1^2|B^{s/2}_{-\lambda_k}\chi(t)|^2 t^{1-2\lambda_k}dt \leqslant c(s,R)R^{-2\lambda_k}(1+\lambda_k)^{s-1}.$$

Таким образом,

$$\|(\ln r)\Psi_{01}\chi_R\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_0(0,2R)} + \sum_{k=1}^\infty\sum_{l=1}^2\|r^{-2\lambda_k}\Psi_{kl}\chi_R\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\lambda_k}(0,2R)}$$
$$\leqslant c\sum_{k=0}^\infty\sum_{l=1}^2|\Psi_{kl}|^2R^{-2\lambda_k}(1+\lambda_k)^{s-1}. \quad (11)$$

Оценим теперь выражение $\|(1-\chi_R)f\|_{H^s_{\Pi,\Delta}(\Omega)}$. Функция $\chi_{\overline{R}}(r) = 1$ на Ω и поэтому

$$\|(1-\chi_R)f\|^2_{H^s_{\Pi,\Delta}(\Omega)} = \|\chi_{\overline{R}}(1-\chi_R)f\|^2_{H^s_{\Pi,\Delta}(\Omega)}$$
$$\leqslant \|\chi_{\overline{R}}(1-\chi_R)f\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s(S_{2\overline{R}})} \equiv \sum_{k=0}^\infty\sum_{l=1}^2\|\chi_{\overline{R}}(1-\chi_R)r^{-\lambda_k}f_{k,l}\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\lambda_k,+}(0,2\overline{R})}$$
$$= \sum_{k=0}^\infty\sum_{l=1}^2|\Psi_{kl}|^2\|\chi_{\overline{R}}(1-\chi_R)r^{-2\lambda_k}\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\lambda_k,+}(0,2\overline{R})}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{2}|\Psi_{kl}|^2\int\limits_{R}^{2\overline{R}}|B_{\lambda_k}^{s/2}(\chi_{\overline{R}}(1-\chi_R)r^{-2\lambda_k})|^2 r^{2\lambda_k+1}dr$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{2}|\Psi_{kl}|^2\int\limits_{R}^{2\overline{R}}|B_{-\lambda_k}^{s/2}(\chi_{\overline{R}}(1-\chi_R)|^2 r^{1-2\lambda_k}dr,$$

где ещё раз использовалось соотношение Дарбу – Вайнштейна.

Справедлива следующая оценка

$$\max_r |B_{-\lambda_k}^{s/2}\left(\chi_{\overline{R}}(1-\chi_R)\right)| \leqslant c(1+\lambda_k)^s,$$

где постоянная $c>0$ зависит от s, R, $\overline{R}$, χ, но не зависит от λ_k. Объединяя две последние формулы, получаем

$$\|\chi_{\overline{R}}(1-\chi_R)f\|^2_{H^s_{\Pi,\Delta}(S_{2\overline{R}})} \leqslant c\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{2}|\Psi_{kl}|^2(1+\lambda_k)^s\int\limits_{R}^{2\overline{R}} r^{1-2\lambda_k}dr$$

$$\leqslant c'\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{2}|\Psi_{kl}|^2(1+\lambda_k)^{s-1}R^{-2\lambda_k}, \quad (12)$$

где постоянная $c'>0$ не зависит от Ψ. При $h<\min\{1,R\}$ из (11) и (12) теперь получаем

$$\|f\|^2_{s,R} = \|(\ln r)\Psi_{01}\chi_R\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_0(0,2R)} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{2}\|\chi_R r^{-2\lambda_k}\Psi_{kl}\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\lambda_k}(0,2R)}$$

$$+\|(1-\chi_R)f\|^2_{H^s_{\Pi,\Delta}(\Omega)} \leqslant c\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{2}|\Psi_{kl}|^2h^{-2\lambda_k} = c\|\Psi\|^2_h,$$

где постоянная $c>0$ не зависит от Ψ. Таким образом, при всех чётных $s\geqslant 2$ доказана оценка

$$\|f\|_{s,R} \leqslant c\,\|\Psi\|_h.$$

Последовательность функций

$$f^K(r,v) = (\ln r)\Psi_{01}Y_0^1 + \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{2} r^{-\lambda_k}\Psi_{kl}Y_k^l(v)$$

принадлежит множеству $T^\infty_\Pi(\Omega)$, при этом, очевидно, что

$$\sigma f^K|_{\mathcal{O}} = \Psi^K = \sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{2}\Psi_{kl}Y_k^l(v) \xmapsto{A_\Pi} \Psi \;\; \text{при} \;\; K\to\infty,$$

поэтому по прямой теореме о σ-следах

$$\Psi = \sigma f|_{\mathcal{O}}.$$

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим следы на части границы G. Обозначим через $H^t(G_\Pi)$ обычное пространство Соболева – Никольского – Бесова с дробным индексом

t на гладком замкнутом контуре G_Π. Обратная замена переменных $(\Pi_\Phi)^{-1}$ отображает его на некоторое пространство функций на гладком контуре G, которое мы обозначим через $H^t_\Pi(G)$. Так как функции из пространства $M^s_\Pi(\Omega)$ в некотором отдалении от особой точки устроены так же, как и функции из пространства $H^s_\Pi(\Omega)$, то справедлива

Теорема 5 (прямая и обратная теорема о следах на G). *Пусть целое $s \geqslant 0$. Тогда для любой функции $f \in M^s_\Pi(\Omega)$ существует её след $f\,|_G$, принадлежащий пространству $H^{s-1/2}_\Pi(G)$, при этом отображение $f \mapsto f\,|_G$ непрерывно в этих пространствах. Обратно, для любой функции $g \in H^{s-1/2}_\Pi(G)$ существует такая функция f_g из $M^s_\Pi(\Omega)$, что $f_g\,|_G = g$ и отображение $g \mapsto f_g$ непрерывно из пространства $H^{s-1/2}_\Pi(G)$ в пространство $M^s_\Pi(\Omega)$.*

Для доказательства достаточно сослаться на стандартные теоремы о следах (см., например, [6]).

4. Краевая задача

Краевая задача (1)–(3) с дополнительным краевым условием П, которую в дальнейшем будем называть краевой задачей (1)–(3)–П, порождает оператор следующего вида

$$\mathscr{A}\colon u \mapsto \mathscr{A}u \equiv \{\Delta u,\ u\big|_G,\ \sigma u\big|_{\mathcal{O}}\},$$

Снабдим пространство

$$\mathcal{M}^s_\Pi \equiv M^s_\Pi(\Omega) \times H^{s+3/2}_\Pi(G) \times A_\Pi$$

топологией прямого произведения. Из вышеизложенных результатов следует то, что оператор $\mathscr{A}$ непрерывно отображает пространство M^{s+2}_Π на пространство $\mathcal{M}^s_\Pi$, где $s \geqslant 0$ — чётное.

Теорема 6 (теорема единственности). *Пусть $f \in M^s_\Pi(\Omega), \Psi \in A_\Pi[0,\Phi]$ и $s > 0$. Тогда у краевой задачи* (1)–(3)–П *существует не более одного решения в пространстве $M^{s+2}_\Pi(\Omega)$.*

Доказательство. Предположим, что таких решений два: u' и u''. Тогда их разность $u = u' - u''$ будет решением однородной задачи вида (1)–(3)–П. Из того, что функция u гармоническая и имеет нулевой сигма-след в точке $\mathcal{O}$, по лемме 4 следует, что в окрестности точки $\mathcal{O}$ она разлагается в ряд

$$u = \sum_k \sum_{l=1}^{2} u_{kl} r^{\lambda_k} Y^l_k.$$

Тогда имеет место оценка градиента $\bigtriangledown u = O(r^{\lambda_1 - 1})$ при $r \to 0$, которая обеспечивает законность применения формулы Грина (формулы интегрирования по частям)

$$0 = \int\limits_\Omega \Delta u u\, d\Omega = -\int\limits_\Omega \langle \bigtriangledown u, \bigtriangledown u\rangle\, d\Omega + \int\limits_G \langle \nu, \bigtriangledown u\rangle u\, dG \\ + \int\limits_{G'} \langle \nu, \bigtriangledown u\rangle u\, dG' + \int\limits_{G''} \langle \nu, \bigtriangledown u\rangle u\, dG'',$$

где ν — единичный вектор внешней нормали. Интеграл по части границы G равен нулю, так как след функции u на G равен нулю. В силу условия периодичности Π сумма интегралов по G' и G'' также равна нулю. Следовательно,

$$\int\limits_{\Omega} |\bigtriangledown u|^2 \, d\Omega = 0,$$

поэтому функция $u = \mathrm{const}$, и так как она на G равна нулю, то (почти всюду) $u = 0$, т. е. $u' = u''$, что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Пусть $s \geqslant 0$ — чётное число и функция $f(r,\varphi) \in M^s_\Pi(S_{\overline{R}})$ обращается в нуль при $r > \overline{R} - \varepsilon$ для фиксированного достаточно малого положительного ε. Тогда существует функция $u \in M^{s+2}_\Pi(S_{\overline{R}})$ такая, что*

$$\Delta u = f(x), \tag{13}$$

$$\sigma u\big|_{\mathcal{O}} = 0 \tag{14}$$

и отображение $f \mapsto u$ непрерывно из пространства $M^s_\Pi(S_{\overline{R}})$ в пространство $M^{s+2}_\Pi(S_{\overline{R}})$.

Доказательство. Пусть $f \in T^\infty_\Pi(S_R)$. Это означает, что имеет место разложение $f(r,\varphi) = \sum\limits_{k=0}^{K}\sum\limits_{l=1}^{2} f_{kl}(r) Y^l_k$, в котором $K = K(f)$ натуральное число, а функции $r^{-\lambda_k} f_{kl}$ принадлежат $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{\lambda_k}(0,R)$. Искомое решение u имеет вид

$$u(r,\varphi) = -\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{2} Y^l_k r^{\lambda_k} \int\limits_r^{\overline{R}} t^{-1-2\lambda_k} \int\limits_0^t \tau^{\lambda_k+1} f_{kl}(\tau) d\tau. \tag{15}$$

Функции из $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{\lambda_k}(0,R)$ имеют особенность в нуле не выше степенной порядка $-2\lambda_k$ при $k > 0$ и логарифмической при $k = 0$. Отсюда следует, что интеграл $\forall \varepsilon > 0$ есть величина $O(r^{2-\lambda_k-\varepsilon})$ вблизи $r = 0$ и, следовательно, выполнено условие (14). Проверка (13) осуществляется прямым дифференцированием в (15).

Покажем теперь, что отображение $f \mapsto u$, определённое выше формулой (15), непрерывно в соответствующих топологиях.

Обозначим через u_{kl} функции вида

$$u_{kl} = -r^{\lambda_k} \int\limits_r^{\overline{R}} t^{-1-2\lambda_k} \int\limits_0^t \tau^{\lambda_k+1} f_{kl}(\tau) d\tau dt.$$

Тогда при $2R < \overline{R}$ получим выражение

$$u_{kl} = -r^{\lambda_k} \int\limits_r^{\overline{R}} t^{-1-2\lambda_k} \int\limits_0^t \tau^{\lambda_k+1} \chi_{R/4} f_{kl}(\tau) d\tau dt \\ - r^{\lambda_k} \int\limits_r^{\overline{R}} t^{-1-2\lambda_k} \int\limits_0^t \tau^{\lambda_k+1} (1-\chi_{R/4}) f_{kl}(\tau)\, d\tau dt \equiv u^1_{kl} + u^2_{kl}.$$

Введём функции $u^1 = \sum\limits_{k=0}^{K}\sum\limits_{l=1,2} u^1_{kl} Y^l_k$, $u^2 = \sum\limits_{k=0}^{K}\sum\limits_{l=1,2} u^2_{kl} Y^l_k$ и оценим в отдельности каждую из них, сначала функцию u^1. Рассмотрим следующее выражение

$$B_{\lambda_k}(\chi_R r^{-\lambda_k} u^1_{kl}) = D^2(\chi_R r^{-\lambda_k} u^1_{kl}) + \frac{2\lambda_k + 1}{r} D(\chi_R r^{-\lambda_k} u^1_{kl}). \tag{16}$$

По формуле Лейбница получим

$$B_{\lambda_k}(\chi_R r^{-\lambda_k}u^1_{kl}){=}D^2\chi_R r^{-\lambda_k}u^1_{kl}+D\chi_R D(r^{-\lambda_k}u^1_{kl})+D\chi_R D(r^{-\lambda_k}u^1_{kl})$$
$$+\chi_R D^2(r^{-\lambda_k}u^1_{kl})+\frac{2\lambda_k+1}{r}(D\chi_R r^{-\lambda_k}u^1_{kl}+\chi_R D(r^{-\lambda_k}u^1_{kl}))$$
$$=\chi_R B_{\lambda_k}(r^{-\lambda_k}u^1_{kl})+2\frac{\partial\chi_R}{\partial r}\frac{\partial(r^{-\lambda_k}u^1_{kl})}{\partial r}+r^{-\lambda_k}u^1_{kl}B_{\lambda_k}\chi_R.$$

Для первого слагаемого из правой части последнего равенства имеем формулу

$$\chi_R B_{\lambda_k}(r^{-\lambda_k}u^1_{kl})=\chi_R r^{-\lambda_k}\chi_{R/4}f_{kl}(r)=\chi_{R/4}r^{-\lambda_k}f_{kl}(r),$$

так как $\chi_R\chi_{R/4}=\chi_{R/4}$.

Учитывая то, что $D\chi_R(r)=0$ при $0\leqslant r\leqslant R$, а $\chi_{R/4}(r)=0$ при $r\geqslant\frac{R}{2}$, для второго слагаемого получаем следующее выражение

$$2\frac{\partial\chi_R}{\partial r}\frac{\partial(r^{-\lambda_k}u^1_{kl})}{\partial r}=\frac{2}{r}\frac{\partial\chi_R}{\partial r}\int\limits_0^{R/2}\tau^{\lambda_k+1}\chi_{R/4}f_{kl}\,d\tau. \tag{17}$$

Таким же образом получаем следующее представление для третьего слагаемого

$$r^{-\lambda_k}u^1_{kl}B_{\lambda_k}\chi_R=-(B_{\lambda_k}\chi_R)\int\limits_r^{\overline{R}}t^{-1-2\lambda_k}dt\int\limits_0^{R/2}\tau^{\lambda_k+1}\chi_{R/4}f_{kl}\,d\tau$$
$$=(B_{\lambda_k}\chi_R)\frac{1}{2\lambda_k}(\overline{R}^{-2\lambda_k}-r^{-2\lambda_k})\int\limits_0^{R/2}\tau^{\lambda_k+1}\chi_{R/4}f_{kl}\,d\tau. \tag{18}$$

Подставим все эти представления слагаемых в формулу (16)

$$B_{\lambda_k}(\chi_R r^{-\lambda_k}u^1_{kl})=\chi_{R/4}r^{-\lambda_k}f_{kl}+\frac{2}{r}\frac{\partial\chi_R}{\partial r}\int\limits_0^{R/2}\tau^{\lambda_k+1}\chi_{R/4}f_{kl}\,d\tau$$
$$-(B_{\lambda_k}\chi_R)(\overline{R}^{-2\lambda_k}-r^{-2\lambda_k})\int\limits_r^{\overline{R}}t^{-1-2\lambda_k}\int\limits_0^{R/2}\tau^{\lambda_k+1}\chi_{R/4}f_{kl}\,d\tau dt$$
$$=\chi_{R/4}r^{-\lambda_k}f_{kl}+\int\limits_0^{R/2}\tau^{\lambda_k+1}\chi_{R/4}f_{kl}d\tau\Big(\frac{2}{r}\frac{\partial\chi_R}{\partial r}-\frac{B_{\lambda_k}\chi_R}{2\lambda_k}(\overline{R}^{-2\lambda_k}-r^{-2\lambda_k})\Big). \tag{19}$$

Учитывая то, что

$$\frac{2}{r}\frac{\partial\chi_R}{\partial r}-\frac{1}{2\lambda_k}B_{\lambda_k}\chi_R{=}\frac{-1}{2\lambda_k}\Big(\frac{-4\lambda_k}{r}D\chi_R+D^2\chi_R+\frac{2\lambda_k+1}{r}D\chi_R\Big)$$
$$=\frac{-1}{2\lambda_k}\Big(D^2\chi_R+\frac{2\lambda_k+1-4\lambda_k}{r}D\chi_R\Big)=\frac{-1}{2\lambda_k}B_{-\lambda_k}\chi_R,$$

будем иметь следующее выражение

$$B_{\lambda_k}(\chi_R r^{-\lambda_k} u^1_{kl}) = \chi_{R/4} r^{-\lambda_k} f_{kl} - \frac{B_{-\lambda_k}\chi_R}{2\lambda_k r^{2\lambda_k}} \int\limits_0^{R/2} \tau^{\lambda_k} \chi_{R/4} f_{kl}\, d\tau$$
$$+ \frac{B_{\lambda_k}\chi_R}{2\lambda_k \overline{R}^{2\lambda_k}} \int\limits_0^{R/2} \tau^{\lambda_k+1} \chi_{R/4} f_{kl}\, d\tau.$$

В силу определения нормы

$$\|f\|^2_{s,R} = \sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{2} \|r^{-\lambda_k}\chi_R f_{kl}\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\lambda_k}(0,2R)} + \|(1-\chi_R)f\|^2_{H^s_{\Pi,\Delta}(S_{\overline{R}})}$$

получаем оценку функции u^1

$$\|u^1\|^2_{s+2,R} = \sum_k \sum_{l=1}^{2} \|r^{-\lambda_k}\chi_R u^1_{kl}\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^{s+2}_{\lambda_k}(0,2R)} + \|(1-\chi_R)u^1_{kl}\|^2_{H^s_{\Pi,\Delta}(S_{\overline{R}})}$$
$$\leqslant 3\sum_k \sum_{l=1}^{2} \|\chi_{R/4} r^{-\lambda_k} f_{kl}\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\lambda_k}(0,2R)}$$
$$+ 3\sum_k \sum_{l=1}^{2} \frac{1}{2\lambda_k}\Big(\overline{R}^{-2\lambda_k}\|B_{\lambda_k}\chi_R\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\lambda_k}(0,2R)} + \|r^{-2\lambda_k}B_{-\lambda_k}\chi_R\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\lambda_k}(0,2R)}\Big)$$
$$\times\left|\int\limits_0^{R/2} \tau^{\lambda_k+1}\chi_{R/4} f_{kl}\, d\tau\right|^2 + \|\,(1-\chi_R)u^1_{kl}\,\|^2_{H^s_{\Pi,\Delta}(S_{\overline{R}})}$$
$$\equiv 3J_1 + 3J_2 + \|\,(1-\chi_R)u^1_{kl}\,\|^2_{H^s_{\Pi,\Delta}(S_{\overline{R}})}\,. \qquad (20)$$

Оценим каждое слагаемое справа в последней формуле.

Первое слагаемое J_1 допускает оценку вида $J_1 \leqslant \|f\|^2_{s,R/4}$.

Введём обозначение $\omega(r) = r^{-\lambda_k}\chi_{R/4} f_{kl}$ и рассмотрим интеграл из второго слагаемого

$$W_{\lambda_k}(\omega,R) = \int\limits_0^{R/2} \tau^{2\lambda_k+1}\omega(r)\ d\tau = \int\limits_0^{R/2} \tau^{2\lambda_k+1} P^{1/2-\lambda_k}_{\lambda_k}\, S^{\lambda_k-1/2}_{\lambda_k}\omega(r)\, d\tau.$$

где $P_{\lambda_k}, S_{\lambda_k}$ — операторы преобразования (см. ниже). Так как $r^{-\lambda_k} f_{kl}$ принадлежит множеству $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{\lambda_k}(0,R)$, то функции

$$S^{\,\lambda_k-1/2}_{\lambda_k}\,\omega = S^{\,\lambda_k-1/2}_{\lambda_k}(\chi_R r^{-\lambda_k} f_{kl})$$

принадлежат пространству $\overset{\circ}{C}{}^\infty[0,R)$. Пусть $\widetilde{\omega} = S^{\lambda_k-1/2}_{\lambda_k}\omega$ и пусть $\lambda_k < N+1/2$, где N — натуральное число. Тогда по определению операторов преобразования будем иметь

$$P^{1/2-\lambda_k}_{\lambda_k}\widetilde{\omega}(\tau) = \frac{(-1)^N 2^{-N}\sqrt{\pi}\,\tau^{2(n-\lambda_k)}}{\Gamma(\lambda_k+1)\,\Gamma(N-\lambda_k+1/2)}$$
$$\times\Big(\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{\tau}\Big)^N \int\limits_\tau^\infty \tau^{2\lambda_k}(t^2-\tau^2)^{N-\lambda_k-1/2} t^{-2\,N}\widetilde{\omega}(t)dt.$$

Отсюда интегрированием по частям получаем

$$W_{\lambda_k} = \int_0^{R/2} \tau^{2\lambda_k+1} P_{\lambda_k}^{1/2-\lambda_k} S_{\lambda_k}^{\lambda_k-1/2} \omega\, d\tau = \frac{(-1)^N 2^{-N}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda_k+1)\,\Gamma(N-\lambda_k+1/2)}$$

$$\times \int_0^{R/2} \tau^{2\lambda_k+1} \Big(\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{\tau}\Big)^N \int_\tau^\infty \tau^{2\lambda_k}(t^2-\tau^2)^{N-\lambda_k-1/2} t^{-2N} \widetilde{\omega}(t) dt\, d\tau$$

$$= \frac{\Gamma(N+3/2)\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda_k+1)\;\Gamma(N-\lambda_k+1/2)\;\Gamma(3/2)} \int_0^{R/2} \widetilde{\omega}(t)\, t^{-2/N} \int_0^t \tau^{2\lambda_k+1}(t^2-\tau^2)^{N-\lambda_k-1/2} dt\, d\tau.$$

Последний внутренний интеграл выражается через функции Эйлера

$$\int_0^t \tau^{2\lambda_k+1}(t^2-\tau^2)^{N-\lambda_k-1/2}\, d\tau = t^{\,2N+1} \frac{\Gamma(\lambda_k+1)\,\Gamma(N-\lambda_k+1/2)}{2\Gamma(N+3/2)}.$$

Следовательно,

$$W_{\lambda_k} = \int_0^{R/2} t\widetilde{\omega}(t)\, dt = \int_0^{R/2} t S_{\lambda_k}^{\lambda_k-1/2} \omega\, dt.$$

Далее, так как $S_{\lambda_k} = I^{1/2-\lambda_k}\, S_{\lambda_k}^{\lambda_k-1/2}$, где I^μ — лиувиллевский оператор, то из предыдущей формулы получаем

$$W_{\lambda_k} = \int_0^{R/2} t\, I^{s+\lambda_k-1/2} I^{-s} S_{\lambda_k} \omega(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s+\lambda_k-1/2)} \int_0^{R/2} t \int_t^{R/2} (\tau-t)^{s+\lambda_k-3/2} I^{-s} S_{\lambda_k} \omega(\tau)\, d\tau dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s+\lambda_k-1/2)} \int_0^{R/2} \big(I^{-s} S_{\lambda_k} \omega(\tau)\big) \int_0^\tau t\,(\tau-t)^{s+\lambda_k-3/2}\, dt d\tau,$$

и поскольку

$$\int_0^\tau t(\tau-t)^{s+\lambda_k-3/2}\, d\,t = \tau^{s+\lambda_k+1/2} \frac{\Gamma(s+\lambda_k-1/2)}{\Gamma(s+\lambda_k+3/2)},$$

то

$$W_{\lambda_k} = \frac{1}{\Gamma(s+\lambda_k+3/2)} \int_0^{R/2} \tau^{s+\lambda_k+1/2} I^{-s} S_{\lambda_k} \omega(\tau)\; d\tau.$$

Теперь по неравенству Коши – Буняковского получаем оценку вида

$$|W_{\lambda_k}| \leqslant \frac{1}{\Gamma(s+\lambda_k+3/2)} \|D^s S_{\lambda_k} \omega\|_{L_2(0,R/2)} \sqrt{\int_0^{R/2} t^{\,2\,s+2\lambda_k+1} dt}$$

$$= \frac{R^{s+\lambda_k+1}}{2^{s+\lambda_k+3/2}\sqrt{s+\lambda_k+1}\Gamma(s+\lambda_k+3/2)} \|S_{\lambda_k}\omega\|_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\lambda_k}(0,R/2)} = \frac{R^{s+\lambda_k+1}\Gamma(\lambda_k+1)}{2^{s+1}\sqrt{s+\lambda_k+1}\,\Gamma(s+\lambda_k+3/2)} \|\omega\|_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\lambda_k}(0,R/2)},$$

и по известной асимптотике гамма-функций

$$\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x+b)} \sim x^{a-b} \quad \text{при} \quad x\to\infty$$

имеем

$$|W_{\lambda_k}| \leqslant c(s,R)R^{\lambda_k}\lambda_k^{-1-s}\|\,\omega\,\|_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\lambda_k}(0,R/2)}.$$

Возвращаясь к старым обозначениям, выпишем итоговую оценку интеграла W_{λ_k}

$$|W_{\lambda_k}(\omega,R)| \leqslant c(s,R)\frac{R^{\lambda_k}}{(\lambda_k+1)^{1+s}}\,\|\chi_{R/4}r^{-\lambda_k}f_{kl}\|_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\lambda_k}(0,R/2)}. \tag{21}$$

Из соотношения (5) легко следует, что

$$\|B_{\lambda_k}\chi_R\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\lambda_k}(0,2R)} \leqslant \|B_{\lambda_k}\chi_R\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\lambda_k,+}(0,2R)} = \int\limits_0^{2R}\left|B^{s/2+1}_{\lambda_k}\chi_R\right|^2 r^{2\lambda_k+1}dr$$

$$= (2R)^{2\lambda_k-s}\int\limits_0^1\left|\Big(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{2\lambda_k+1}{t}\,\frac{d}{dt}\Big)^{s/2+1}\chi(2t)\right|^2 t^{2\lambda_k+1}dt \leqslant c(s)(2\lambda_k+1)^{s+2}(2R)^{2\lambda_k-s}$$

и выполняется неравенство

$$\|r^{-2\lambda_k}B_{\lambda_k}\chi_R\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\lambda_k}(0,2R)} \leqslant c(s,R)(R-\varepsilon)^{-2k}.$$

Таким образом, два последних неравенства с учётом (21) приводят к следующей оценке слагаемого из формулы (20)

$$I_2 \leqslant c\sum_k\sum_{l=1}^2\left((R-\varepsilon)^k+(R-\varepsilon)^{-2k}\right)\|\chi_{R/4}r^{-\lambda_k}f_{kl}\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\lambda_k}(0,R/2)} \leqslant c\sum_k\sum_{l=1}^2\|\chi_{R/4}r^{-\lambda_k}f_{kl}\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\lambda_k}(0,R/2)} \leqslant c\|f\|^2_{s,R/4},$$

где $c>0$ не зависит от f.

Для завершения оценки u^1 осталось рассмотреть последнее слагаемое из (20). Поскольку $\chi_{\overline{R}}(r)\equiv 1$ в $S_{\overline{R}}$, то

$$\|(1-\chi_R)u^1\|_{H^{s+2}_{\Pi,\Delta}(S_R)} \leqslant \chi_R(1-\chi_R)u^1\|_{\overset{\circ}{H}{}^{s+2}(S_{2\overline{R}})}.$$

По аналогии с формулами (16)–(19) получаем формулу

$$B_{\lambda_k}\left(\chi_R(1-\chi_R)r^{-\lambda_k}u^1\right) = -B_{-\lambda_k}\chi_R(1-\chi_R)r^{-\lambda_k}\int\limits_0^{R/2}\tau^{k+1}\chi_{R/4}f_{kl}\,d\tau.$$

Для норм из последней суммы справедлива оценка

$$\|\chi_R(1-\chi_R)u^1\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^{s+2}(S_{\overline{R}})} \leqslant c\sum_k\sum_{l=1}^{2}(k+1)^{-s-1}\|\chi_{R/4}r^{-\lambda_k}f_{kl}\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^s_{\lambda_k}(0,R/2)} \leqslant c\|f\|^2_{s,R/4},$$

следовательно,

$$\|(1-\chi_R)u^1\|_{H^s_{\Pi,\Delta}(S_{\overline{R}})} \leqslant c\|f\|_{s,R/4}.$$

Таким образом, доказана следующая оценка функции u^1

$$\|u^1\|_{s+2,R} \leqslant c\|f\|_{s,R/4},$$

постоянная $c>0$ в которой не зависит от f.

Далее будем рассматривать функцию u^2. Она принадлежит пространству $H^{s+2}_{\Pi,\Delta}(S_{\overline{R}})$ и является решением следующей краевой задачи

$$\Delta u^2 = (1-\chi_{R/4})f, \quad u^2\big|_{G(S_{\overline{R}})} = 0.$$

Так как $f\in M^s_\Pi(S_{\overline{R}})$, то $(1-\chi_{R/4})$ принадлежит $H^s_{\Pi,\Delta}(S_{\overline{R}})$. Решение этой краевой задачи единственно и для него справедлива оценка

$$\|u^2\|_{H^{s+2}_{\Pi,\Delta}(S_{\overline{R}})} \leqslant c\|(1-\chi_{R/4})f\|_{H^s_{\Pi,\Delta}(S_{\overline{R}})}.$$

Теперь из определения норм $\|\cdot\|_{s,R}$ и из [2] имеем

$$\|u^2\|_{s+2,R} \leqslant c\|f\|_{s,R/4},$$

где постоянная не зависит от функции f.

Таким образом, получены оценки для u^1 и u^2, т. е. и для функции $u=u^1+u^2$. Следовательно, для любого $R\in(0,\overline{R}/2)$ и $s\geqslant 0$ найдётся такая постоянная $c>0$, что для любой функции $f\in T^\infty_\Pi(S_{\overline{R}})$ имеет место неравенство $\|u\|_{s+2,R}\leqslant c\|f\|_{s,R/4}$.

Далее, пусть $f\in M^s_\Pi(S_{\overline{R}})$ и удовлетворяет условию леммы. Тогда найдётся последовательность функций $f^m\in T^\infty_\Pi(S_{\overline{R}})$, сходящаяся к f по топологии этого пространства. Для каждой функции f^m определим функции u^m по формуле (15). Тогда

$$\Delta u^m = f^m \overset{m\to\infty}{\to} f, \quad m\to\infty. \tag{22}$$

По вышедоказанному $\|u^m\|_{s+2,R}\leqslant c\|f^m\|_{s,R/4}$, следовательно, отображение $f^m\mapsto u^m$ непрерывно из пространства M^s_Π в M^{s+2}_Π. Тогда последовательность u^m фундаментальна в M^{s+2}_Π. Отсюда в силу полноты пространства M^{s+2}_Π существует функция $u\in M^{s+2}_\Pi$, являющаяся пределом последовательности функций u^m по топологии этого пространства.

Оператор $\mathscr{A}$ непрерывно отображает пространство M^{s+2}_Π в M^s_Π.

Так как M^{s+2}_Π непрерывно вложено в M^s_Π, т. е., для любой функции g из M^s_Π выполняется неравенство $\|g\|_{s,R}\leqslant c\|g\|_{s+2,R}$. В частности, в качестве функции g можно взять $\Delta u^m\in M^s_\Pi$, тогда $\|\Delta u^m\|_{s,R}\leqslant c\|\Delta u^m\|_{s+2,R}$, а это и означает то, что оператор $\mathscr{A}$ непрерывно отображает пространство M^{s+2}_Π в M^s_Π. Поэтому $\Delta u^m\to\Delta u$ в смысле пространства M^s_Π. Тогда из (22) следует то, что $\Delta u=f$. По прямой теореме о σ-следах имеем $\lim \sigma u^m\big|_{\mathscr{O}} = \sigma u\big|_{\mathscr{O}}$, и поскольку $\sigma u^m\big|_{\mathscr{O}} = 0$, то и σ-след $\sigma u\big|_{\mathscr{O}} = 0$. Лемма доказана.

Основной результат состоит в следующем утверждении.

Теорема 7. *Оператор $\mathscr{A}$ имеет обратный $\mathscr{A}^{-1}$, непрерывно отображающий пространство $\mathcal{M}^s_\Pi$ на пространство $M^{s+2}_\Pi(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть функции u_1, u_2, u_3 являются решением задач соответственно

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, \\ \sigma u_1|_{\mathcal{O}} = \Psi, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u_2 = \chi_{_{R_0}} f, \\ \sigma u_2|_{\mathcal{O}} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta u_3 = (1 - \chi_{_{R_0}}) f, \\ \sigma u_3|_{\mathcal{O}} = 0, \\ u_3|_G = g - u_1|_G - u_2|_G, \end{cases}$$

здесь $f \in M^s_\Pi(\Omega)$, $g \in H^{s+3/2}_\Pi(G)$, $\Psi \in A_\Pi[0, \Phi]$.

Вид функции u_1 указан в обратной теореме о σ-следах, а u_2 — в лемме 3. Решение краевой задачи для функции u_3 (которое относится нами к “регулярным”) будем разыскивать в пространстве типа Соболева – Никольского – Бесова $H^1_\Pi(\Omega)$, поскольку функция u_3 должна быть гармонической в окрестности точки $\mathcal{O}$, и поэтому, как было установлено ранее, она не должна иметь особенность степенного порядка (по r) выше, чем $\lambda_1 = 2\pi/\Phi$, что обеспечивает принадлежность её упомянутому пространству. Теория сильно эллиптических уравнений второго порядка изложена, например, в книге О. А. Ладыженской [6], где, правда, не рассмотрены краевые условия типа П, однако, техника из указанной книги практически дословно может быть перенесена на случай с условием П. Значит, существует единственная функция u_3, принадлежащая пространству $H^1_\Pi(\Omega) \subset M^1_\Pi(\Omega)$ и являющаяся решением соответствующей краевой задачи. Пользуясь одинаковым устройством функций из пространств $H^s_\Pi(\Omega)$, $H^s_{\Pi,\Delta}(\Omega)$ в некотором удалении от особой точки и теоремами о повышении гладкости (см., например, [7]), можно показать, что, на самом деле,

$$u_3 \in H^{s+2}_{\Pi,\Delta}(\Omega) \subset M^{s+2}_\Pi(\Omega),$$

при этом существенную роль играет то, что функции $u_1|_G$, $u_2|_G$ по лемме 3 и теореме 4 принадлежат пространству $H^{s+3/2}(G)$.

Из изложенного следует, что функция $u = u_1 + u_2 + u_3$ является решением краевой задачи (1)–(3) и принадлежит пространству $M^{s+2}_\Pi(\Omega)$. Таким образом, существование решения доказано. Единственность краевой задачи (1)–(3) установлена в теореме 6. Из всех этих результатов и вытекает существование и непрерывность в соответствующих топологиях разрешающего оператора $\mathscr{A}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука, 1991.
2. *Катрахов В. В.* Об одной краевой задаче для уравнения Пуассона // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 6. С. 849–876.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1974.
4. *Катрахов В. В., Мазелис Л. С.* Непрерывность, пополнение, замыкание в метрических пространствах. Владивосток: Изд-во ДВГУ, 2000.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.
6. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
7. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.

Катрахов Валерий Вячеславович
Россия, Владивосток, Институт прикладной математики ДВО РАН
katrakhov@mail.ru

Киселевская Светлана Викторовна
Россия, Владивосток,
Владивостокский государственный университет экономики сервиса
olibash@mail.ru