УДК 517.946

# ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ

**Б. В. Гатапов, А. В. Кажихов**

Рассматривается двумерная система уравнений сжимаемой вязкой жидкости в приближении мелкой воды. Доказана теорема существования ее глобального решения.

## Введение

В некоторых разделах прикладной гидродинамики, например, метеорологии и океанологии используется видоизмененная модель Навье – Стокса, так называемое приближение мелкой воды (см. [1–3]). Оно выводится из общей системы на основе асимптотического анализа в предположении, что размер области движения в одном направлении (вертикальном) много меньше, чем в другом (горизонтальном). Приближение мелкой воды в этом случае заключается в замене уравнения импульса для вертикальной составляющей вектора количества движения на уравнение гидростатики. Подробнее о выводе такой модели можно прочитать, например, в [3], а впервые модель была предложена, по-видимому, Н. Е. Кочиным [4].

Вопросы существования решений краевых задач для уравнений Навье – Стокса сжимаемой вязкой жидкости изучались многими авторами, но только в одномерном случае исследованы достаточно полно (см. [2, 5]). В многомерной модели большинство ранее полученных результатов являются локальными, т. е. либо промежуток времени считается достаточно малым, либо данные задачи близки к состоянию покоя (см. [6, 7]).

Система уравнений мелкой воды изучена с достаточной степенью полноты только для несжимаемой вязкой жидкости [8–10], а для модели с учетом сжимаемости глобальных теорем существования до сих пор установлено не было.

Данная работа в определенном отношении является продолжением исследований, начатых в [11], где была доказана глобальная разрешимость начально-краевой задачи для упрощенной системы уравнений сжимаемой вязкой жидкости в приближении мелкой воды. Был предложен способ получения априорных оценок "в целом", основанный на усреднении уравнений по вертикальной координате. Здесь мы развиваем этот подход в применении к уравнениям динамики атмосферы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\dfrac{\partial}{\partial y}(\rho v)=0,\\ \rho\Big(\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}\Big)+\dfrac{\partial p}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\nu_1\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big)+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\nu_2\dfrac{\partial u}{\partial y}\Big),\\ \dfrac{\partial p}{\partial y}=-g\rho,\\ p=c^2\rho,\quad c^2=\mathrm{const}>0. \end{cases} \tag{1}$$

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00131)

Здесь $(t, x, y)$ — независимые переменные, $t$ — время, $(x, y)$ — горизонтальная и вертикальная пространственные координаты, $\rho$ — плотность среды, $u = (u, v)$ — вектор скорости, $u$ — горизонтальная компонента, $v$ — вертикальная (для неё соответствующее уравнение импульса заменено на уравнение гидростатики $(1)_3$), $p$ — давление, $g = \mathrm{const} > 0$ — ускорение свободного падения, $(\nu_1, \nu_2)$ — коэффициенты турбулентной вязкости в горизонтальном и вертикальном направлениях соответственно.

При определенных условиях на данные физические параметры модели в работе получены глобальные априорные оценки, на основе которых установлена теорема существования решения на произвольном интервале времени и произвольных начальных данных задачи из соответствующего функционального пространства.

Пусть движение среды происходит в прямоугольной области $\Omega = \{(x, y)|0 < x < l, 0 < y < h\}$, а краевые условия на границе $\Omega$ выражаются соотношениями

$$\begin{cases} u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \\ v|_{y=0} = v|_{y=h} = 0. \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=h} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Этот вариант граничных данных наиболее простой, но возможны и другие постановки краевых условий.

Наконец, в начальный момент времени $t = 0$ предполагается известным распределение горизонтальной составляющей скорости и плотности

$$\begin{cases} u|_{t=0} = u_0(x, y), \\ \rho|_{t=0} = \rho_0(x) \exp(-gy/c^2), \end{cases} \tag{3}$$

причем $\rho_0(x)$ — строго положительная и ограниченная функция

$$0 < m \le \rho_0(x) \le M < \infty.$$

Доказательство теоремы существования решения задачи (1)–(3) опирается на глобальные априорные оценки. Основная идея, позволившая установить априорные оценки, связана, во-первых, с тем, что уравнение гидростатики $(1)_3$ можно проинтегрировать и, во-вторых, с разложением горизонтальной компоненты скорости на сумму двух слагаемых, одно из которых есть среднее значение (со специальным весом) по вертикальной координате. При этом возникает система уравнений, формально совпадающая с уравнениями одномерного движения вязкого газа [5], и можно воспользоваться некоторыми приемами и методами, разработанными для этой модели (см. [5, 11, 12]).

Для простоты изложения примем $l = 1$, $h = 1$ и $g = c^2 = 1$, а коэффициенты турбулентных вязкостей $\nu_1$ и $\nu_2$ возьмем специального вида, который принят в моделях динамики атмосферы ( см. [3]), а именно $\nu_1$ пропорционален давлению (или плотности) и экспоненциально убывает по вертикальной координате, а $\nu_2$ есть гладкая функция от независимых переменных и плотности, причем строго положительная

$$\nu_1 = a\,\rho + b\ \exp\{-y\}, \quad \nu_2 \ge \mathrm{const} > 0, \tag{4}$$

где $a$ и $b$ — положительные постоянные, которые для простоты также возьмем равными единице.

Из уравнения гидростатики

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho$$

имеем

$$p = \rho = \zeta(x,t)e^{-y},$$

и тогда уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\zeta u) + e^y \frac{\partial}{\partial y}(\zeta e^{-y} v) = 0.$$

Полагая

$$\overline{u} = L^{-1}\int\limits_0^1 e^{-y} u dy, \quad L = \int\limits_0^1 e^{-y} dy = 1 - e^{-1} > 0.$$

и интегрируя уравнение по $y$, получим

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\zeta \overline{u}) = 0.$$

Аналогично, уравнение $(1)_2$ проинтегрируем по $y$. Тогда получим соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\zeta \overline{u}) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\zeta \int\limits_0^1 e^{-y} u^2 dy\Big) + \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big((1+\zeta)\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}\Big)$$

В левой части этого равенства прибавим и вычтем $\frac{\partial}{\partial x}(\zeta(\overline{u})^2)$, и тогда получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\zeta \overline{u}) = 0, \\ \zeta\Big[\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u}\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial x}\Big] + \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[\zeta(1 + L^{-1}\displaystyle\int\limits_0^1 e^{-y} u^2 dy - (\overline{u})^2)\Big] = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big((1+\zeta)\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial x}\Big), \end{cases} \tag{5}$$

Отметим, что в (5) имеет место соотношение

$$L^{-1}\int\limits_0^1 e^{-y} u^2(x,y,t) dy - \overline{u}^2 \equiv \overline{u^2} - (\overline{u})^2 \geq 0.$$

Формально система (5) имеет вид обычной системы Навье – Стокса для одномерного движения сжимаемой вязкой жидкости, где $\zeta$ играет роль плотности, $\overline{u}$ — скорости, а $p \equiv \zeta(1+\overline{u^2}-(\overline{u})^2)$ — давления (см. [5]). Принципиальное отличие от названной системы Навье – Стокса в том, что давление зависит не только от плотности $\zeta$, но и от $\overline{u^2}$ и $\overline{u}^2$, а также в том, что вязкость зависит от плотности.

Теперь наряду с системой уравнений (1) рассмотрим другую систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\zeta u) + \dfrac{\partial}{\partial z}(\zeta w) = 0, \\ \zeta\Big(\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + w\dfrac{\partial u}{\partial z}\Big) + \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\nu_1 \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial z}\Big(\nu_2 \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big), \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial z} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Роль плотности играет $\zeta(t,x)$, а $u$ и $w$ горизонтальная и вертикальная составляющие вектора скорости (вертикальная координата теперь обозначена через $z$ вместо $y$). Область изменения $x$ и $z$ есть $\Omega = (0,1) \times (0,1)$.

Систему (6) будем рассматривать в области $Q = \Omega \times (0, T)$ со следующими граничными условиями

$$\begin{cases} u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=1} = 0, \\ w|_{z=0} = w|_{z=1} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Согласно (3), распределение скорости и плотности при $t = 0$ известно

$$\begin{cases} u|_{t=0} = u_0(x, z), \\ \zeta|_{t=0} = \zeta_0(x)\ (= \rho_0(x)), \end{cases} \tag{8}$$

причем $\zeta_0(x)$ — строго положительная и ограниченная функция

$$0 < m \le \zeta_0(x) \le M < \infty.$$

Определение. *Обобщенным решением* задачи (6)–(8) называется совокупность функций $(\zeta, u, w)$, $\zeta \ge 0$,

$$\zeta(t) \in L^\infty(0, T; W_2^1(0,1)), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(0,1)),$$

$$u(t) \in L^2(0, T; W_2^2(\Omega)) \cap W_2^1(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$w(t) \in L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

удовлетворяющих системе уравнений (5) в смысле теории распределений и, в частности, интегральному тождеству

$$\int_0^T \int_\Omega (\zeta u \varphi_t + \zeta u^2 \varphi_x + \zeta w u \varphi_z + \zeta \varphi_x) dx dz dt$$
$$= -\int_0^T \int_\Omega u \triangle \varphi dx dz dt + \int_\Omega u_0 \zeta_0 \varphi|_{t=0} dx dz, \tag{9}$$

для произвольной функции $\varphi \in C^1(0, T; C_0^\infty(\Omega))$, $\varphi|_{t=T} = 0$, $Q = \Omega \times (0, T)$. Соотношения (7)–(8) выполняются в смысле следов функций из указанных классов.

**Теорема.** *Пусть начальные данные $(\zeta_0, u_0)$ обладают следующими свойствами*

$$(\zeta_0, u_0) \in W_2^1(\Omega), \; u_0|_{x=0} = u_0|_{x=1} = 0.$$

*Тогда существует обобщенное решение задачи (6)–(8), причем $\zeta(x, t)$ строго положительная ограниченная функция.*

## 1. Априорные оценки

Для системы (6) первый энергетический закон сохранения имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \int_0^1 \Big(\zeta \frac{u^2}{2} + (\zeta \ln \zeta - \zeta + 1)\Big) dx dz + \int_0^1 \int_0^1 (\nu_1 u_x^2 + \nu_2 u_z^2) dx dz = 0. \tag{10}$$

Он получается хорошо известным способом умножения первого уравнения (6) на $u$, уравнения неразрывности на $ln\zeta$ и, после сложения, интегрирования по области $\Omega$. Этот закон, в частности, гарантирует справедливость априорных оценок

$$\sup_{0<t<T}\int_0^1(\zeta\ln\zeta-\zeta+1)dx\le C$$

и

$$\sup_{0<t<T}\int_0^1\zeta(x,t)\Big(\int_0^1u^2(x,z,t)dz\Big)dx\le C,$$

а следовательно, и

$$\int_0^1\zeta(\overline{u})^2dx\le C,$$

что означает в лагранжевых переменных (которые вводятся ниже в формуле (12))

$$\sup_{0<\tau<T}\int_0^1(\overline{u}(\eta,\tau))^2d\eta\le C. \tag{11}$$

Здесь и далее за $C$ обозначены различные положительные постоянные, зависящие лишь от начальных данных и области $\Omega$. Функция $\overline{u}$ теперь есть интеграл по $z$ без веса.

$$\overline{u}(x,t)=\int_0^1u(x,z.t)dz$$

Аналогично,

$$\int_0^T\int_0^1\int_0^1(u_x^2+u_z^2)dzdxdt\le C$$

и

$$\int_0^T\int_0^1\zeta\Big(\frac{\partial\overline{u}}{\partial\eta}\Big)^2d\eta d\tau\le C.$$

В технике доказательства глобальных теорем существования для уравнений сжимаемой вязкой жидкости центральное место занимает методика получения априорных оценок для плотности среды (см. [2, 5]). Такая же ситуация имеет место и в рассматриваемом случае, где роль плотности играет функция $\zeta$.

Следуя [5], можно ввести лагранжевы координаты по формулам

$$\begin{cases}\eta(x,t)=\int\limits_0^x\zeta(s,t)ds,\\ \tau=t,\end{cases} \tag{12}$$

и тогда система (5) принимает форму

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\tau}\Big(\dfrac{1}{\zeta}\Big)=\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial\eta}\\ \dfrac{\partial\overline{u}}{\partial\tau}+\dfrac{\partial p}{\partial\eta}=\dfrac{\partial}{\partial\eta}\Big(\zeta(1+\zeta)\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial\eta}\Big),\end{cases} \tag{13}$$

где $p \equiv \zeta(1+p_0)$, а функция $p_0 = p_0(\eta,\tau) \equiv \overline{u^2} - (\overline{u})^2$ является неотрицательной.

На данном этапе задача состоит в том, чтобы оценить $\zeta(x,t)$ сверху и снизу. Для её решения будем использовать систему уравнений (13) и оценки из предыдущего пункта, а также приемы и методы, разработанные в [12] специально для уравнений вязкого газа с вязкостью, зависящей от плотности. Из первого уравнения системы (13) имеем равенства

$$\zeta^2 \frac{\partial \overline{u}}{\partial \eta} = -\frac{\partial \zeta}{\partial \tau}, \qquad \zeta \frac{\partial \overline{u}}{\partial \eta} = -\frac{\partial \ln \zeta}{\partial \tau}.$$

Подставим их во второе и проинтегрируем по $\tau$:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial \tau} + \frac{\partial p}{\partial \eta} = -\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial \eta}(\ln \zeta + \zeta),$$

$$\overline{u} - \overline{u_0} + \frac{\partial}{\partial \eta}\int\limits_0^\tau p ds = -\frac{\partial(\ln \zeta + \zeta)}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta}(\ln \zeta + \zeta)|_{\tau=0}.$$

Не ограничивая общности, можно принять $\zeta|_{\tau=0} \equiv 1$, тогда приходим к равенству

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\ln \zeta + \zeta + \int\limits_0^\tau p ds\right) = \overline{u_0} - \overline{u}, \tag{14}$$

значит, в силу (11)

$$\sup_{0<\tau<T} \left\| \frac{\partial}{\partial \eta}(\ln \zeta + \zeta + \int\limits_0^\tau p ds) \right\|_{L^2(0,1)} \le c.$$

Из (13) имеем

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\Big(\frac{1}{\zeta}\Big) = \frac{\partial \overline{u}}{\partial \eta}.$$

Проинтегрируем это выражение по $\eta$ от 0 до 1

$$\int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial \tau}\Big(\frac{1}{\zeta}\Big) d\eta = \overline{u}|_{\eta=1} - \overline{u}|_{\eta=0} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\int\limits_0^1 \frac{1}{\zeta} d\eta = 0.$$

Таким образом, имеем равенство

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\zeta(\eta,\tau)} d\eta = \int\limits_0^1 \frac{1}{\zeta_0(\eta)} d\eta \equiv 1.$$

Отсюда и из непрерывности функции $\zeta$ получаем, что

$$\forall \tau \ \ \exists \eta_0 = \eta_0(\tau) \ \text{ такое, что } \ \zeta(\eta_0(\tau),\tau) = 1.$$

С учетом этого проинтегрируем равенство (14) по $\eta$ от $\eta_0(\tau)$ до произвольного $\eta$

$$\ln \zeta + \zeta + \int\limits_0^\tau p ds = 1 + \int\limits_0^\tau p(\eta_0(\tau), s) ds + \int\limits_{\eta_0}^\eta (\overline{u}_0 - \overline{u}) d\xi,$$

затем пропотенцируем это соотношение и в результате придем к формуле

$$\zeta(\eta,\tau)\exp\Big\{\int\limits_0^\tau p(\eta,s)ds\Big\} = Y(\tau)\cdot B(\eta,\tau)\cdot\exp\{-\zeta\}, \tag{15}$$

в которой использованы обозначения

$$Y(\tau) = \exp\Big\{\int_0^\tau p(\eta_0(\tau),s)ds\Big\},$$

$$B(\eta,\tau) = \exp\Big\{1 + \int\limits_{\eta_0}^{\eta}(\overline{u}_0 - \overline{u})d\xi\Big\}.$$

Функция $B(\eta,\tau)$ ограничена сверху и снизу в силу наличия оценки на $\overline{u}$ в пространстве $L^\infty(0,T;L^2(0,1))$ (см. (11)). Покажем, что $Y(\tau)$ также ограничена. Заметим, что

$$\int\limits_0^T \max_{0\le\eta\le1} p_0(\eta,\tau)d\tau \le C. \tag{16}$$

Это действительно так, потому что

$$\max_{0\le x\le1} p_0(x,t) \le \int\limits_0^1 \Big|\frac{\partial p_0}{\partial x}\Big|dx \le \int\limits_0^1 \Big|2\int\limits_0^1 uu_x dz - 2\int\limits_0^1 udz\int\limits_0^1 u_z dz\Big|dx$$
$$\le c\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (u_x^2 + u_z^2)dxdz.$$

Умножим (15) на $(1+p_0(\eta,\tau))$, дополняя левую часть этого выражения до производной по $\tau$ от $\exp\{\int\limits_0^\tau p(\eta,s)ds\}$, проинтегрируем по $\tau$ и тогда придем к равенству

$$e^{\int\limits_0^\tau p(\eta,s)ds} = 1 + \int\limits_0^\tau (1+p_0(\eta,s))Y(s)B(\eta,s)\exp\{-\zeta(\eta,s)\}ds.$$

Следовательно, (15) принимает вид

$$\zeta\Big(1 + \int\limits_0^\tau (1+p_0)Y(s)B(\eta,s)\exp\{-\zeta(\eta,s)\}ds\Big) = Y(\tau)B(\eta,\tau). \tag{17}$$

Если здесь взять $\eta=\eta_0(\tau)$, где $\zeta(\eta_0(\tau),\tau)=1$, получим сначала неравенство для $Y(\tau)$ снизу

$$0 < \mathrm{const} \le B^{-1} \le Y(\tau).$$

А оценка сверху получается из (17) (при $\eta=\eta_0(\tau)$), поскольку это соотношение дает для функции $Y(\tau)$ вполне стандартное неравенство Гроноулла

$$Y(\tau) \le C\Big(1 + \int\limits_0^\tau Y(s)ds\Big),$$

из которого, очевидно, следует ограниченность $Y(\tau)$ $Y(\tau) \leq \mathrm{const} < \infty, \forall \tau \in [0,T]$.

После этого, возвращаясь снова к (15), подобным образом последовательно выводим оценки сначала сверху, а затем снизу для функции $\zeta$

$$0 < \zeta_0^{-1} \leq \zeta(\eta,\tau) \leq \zeta_0 < \infty.$$

Из (14) и неравенств, полученных для $\zeta$, имеем оценку для производной

$$\Big\|\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\Big\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))} \leq c. \tag{18}$$

Непосредственно из уравнений системы (13) получаем

$$\Big\|\frac{\partial \zeta}{\partial \tau}\Big\|_{L^2(0,T;L^2(0,1))} \leq c,$$

и тогда из уравнения неразрывности системы (6) сразу следует, что

$$\Big\|\frac{\partial w}{\partial z}\Big\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq c.$$

Полученных оценок достаточно, чтобы доказать существование обобщенного решения задачи (6)–(8).

## 2. Доказательство теоремы существования

Чтобы доказать теорему существования решения задачи (6)–(8), будем искать горизонтальную составляющую скорости в виде суммы

$$u(x,z,t) = \overline{u}(x,t) + \widetilde{u}(x,z,t), \tag{19}$$

где $\overline{u}(x,z,t)$ так же, как и ранее, есть $\overline{u}(x,t) = \int\limits_0^1 u dz$ — среднее значение по вертикальной координате. Отклонение $\widetilde{u}(x,z,t)$ с необходимостью должно удовлетворять условию

$$\int\limits_0^1 \widetilde{u}(x,z,t)dz \equiv 0, \tag{20}$$

для всех значений $x$ и $t$.

Принимая во внимание (20) и то, что $u^2 = \overline{u}^2 + 2\overline{u}\widetilde{u} + (\widetilde{u})^2$, заключаем, что $\overline{u^2}(x,t) - (\overline{u})^2(x,t) = \int\limits_0^1 (\widetilde{u}(x,z,t))^2 dz$. Тогда система уравнений (5) для функции $\overline{u}(x,t)$ переписывается в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\zeta \overline{u}) = 0, \\ \zeta\Big(\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u}\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\zeta(1 + \int\limits_0^1 (\widetilde{u})^2 dz)\Big) = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big((1+\zeta)\dfrac{\overline{u}}{\partial x}\Big). \end{cases} \tag{21}$$

Подставим представление (19) в (6) и тогда получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}(\zeta\widetilde{u}) + \zeta\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \zeta\Big(\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + (\overline{u}+\widetilde{u})\dfrac{\partial}{\partial x}(\overline{u}+\widetilde{u}) + w\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial z}\Big) + \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \qquad = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big((1+\zeta)\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\nu_1\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial z}\Big(\nu_2\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial z}\Big), \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial z} = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Второе уравнение можно записать по-другому

$$\zeta\Big(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\zeta(1 + \int\limits_0^1 (\widetilde{u})^2 dz)\Big) - \frac{\partial}{\partial x}\Big((1+\zeta)\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}\Big)$$
$$+ \zeta\Big(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + \widetilde{u}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + \overline{u}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + \widetilde{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + w\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial z}\Big)$$
$$- \frac{\partial}{\partial x}\Big(\zeta\int\limits_0^1 (\widetilde{u})^2 dz\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\nu_1\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\nu_2\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial z}\Big),$$

В результате (22) принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}(\zeta\widetilde{u}) + \zeta\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \zeta\Big(\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} + \widetilde{u}\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + \overline{u}\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + \widetilde{u}\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial x} + w\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial z}\Big) \\ \qquad -\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\zeta\displaystyle\int\limits_0^1 (\widetilde{u})^2 dz\Big) = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\nu_1\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\nu_2\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial z}\Big), \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial z} = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Если считать функции $\zeta$ и $\overline{u}$ известными, то (23) имеет вид гидростатической модели для несжимаемой жидкости (см. [9]). Действительно, если перейти к лагранжевым координатам $\eta: \; d\eta = \zeta dx$ и заменить $\zeta\widetilde{u}$ на $v$, то первое уравнение принимает форму

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

А второе уравнение можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}(\zeta\widetilde{u}) + \frac{\partial}{\partial x}(\zeta(2\overline{u}\widetilde{u} + (\widetilde{u})^2)) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\zeta\int\limits_0^1 (\widetilde{u})^2 dz\Big)$$
$$+ \overline{u}\frac{\partial}{\partial z}(\zeta w) + \frac{\partial}{\partial z}(\zeta w\widetilde{u}) = (\nu_1\widetilde{u}_x)_x + (\nu_2\widetilde{u}_z)_z,$$

Построим отображение $A: \widetilde{u_1} \to \widetilde{u_2}$, неподвижная точка которого будет решением (21) и (23).

Пусть $K$ — ограниченное множество в $L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))$, задаваемое первой априорной оценкой (10)для $u$, а следовательно, и для $\widetilde{u}$

$$K = \{\widetilde{u}|\ \|\widetilde{u}\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))} \le k = \text{const} < \infty\}.$$

Для данного $\widetilde{u_1} \in K$ строим решение $(\zeta, \overline{u})$ системы (21). Эта система формально является моделью движения Навье – Стокса для сжимаемой жидкости, и поэтому может быть построено единственное решение так же, как в [5].

Затем подставляем $(\zeta,\, \overline{u})$ и $w = -\frac{1}{\zeta}\frac{\partial}{\partial x}(\zeta \int_0^1 \widetilde{u_1} dz)$ в (23). Получаем параболическое уравнение для функции $\widetilde{u} = \widetilde{u_2}$, которую рассматриваем как результат действия отображения $A : \widetilde{u_1} \to \widetilde{u_2}$. Решение $\widetilde{u_2}$ принадлежит пространству $L^2(0, T; W^{2,2}(\Omega)) \cap W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega))$ и удовлетворяет оценке вида (10), следовательно, является элементом множества $K$. Таким образом, все условия теоремы Шаудера о неподвижной точке выполнены, и оператор $A$ имеет хотя бы одну неподвижную точку, что дает существование решения.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Марчук Г. И.* Численные методы в прогнозе погоды. Л.: Гидрометиздат, 1967.
2. *Lions P. L.* Mathematical topics in fluid mechanics. Compressible models. V. 2. Oxford, 1998.
3. *Lewandowski R.* Analyse mathematique et oceanographie. Masson, 1997.
4. *Кочин Н. Е.* Об упрощении уравнений гидромеханики для случая общей циркуляции атмосферы // Труды Главной геофизической обсерватории. 1935. Вып. 4. С. 21–45.
5. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1983.
6. *Nash J.* Le problem de Cauchy pour les equations differentielles d'un fluide general // Bull. Soc. Math. France. 1962. V. 90, N 4. P. 487–491.
7. *Matsumura A., Nishida T.* The initial value problem for the equation of motion of viscous and heat-conductive gases // J. Math. Kyoto Univ. 1980. V. 20, N 1. P. 67–104.
8. *Bresch D., Gullen-Gonzales F., Masmoudi N., Rodrigues-Bellido M. A.* On the uniqiness for the two-dimensional primitive equation // Differ. Integral Equ. 2003. V. 16, N 1. P. 77–94
9. *Bresch D., Kazhikhov A., Lemoine J.* On the two-dimensional hydrostatic Navier – Stokes equations // SIAM Journ. Math. Anal. 2004. V. 36, N 3. P. 796–814.
10. *Gullen-Gonzales F., Masmoudi N., Rodrigues-Bellido M. A.* Anisotropic estimates and strong solutions of the primitive equations // Differ. Integral Equ. 2001. V. 14, N 11. P. 1381–1408.
11. *Гатапов Б. В.,Кажихов А. В.* Существование глобального решения одной модельной задачи динамики атмосферы // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46. С. 1011–1020.
12. *Вайгант В. А., Папин А. А.* Разрешимость начально-краевой задачи для уравнений баротропного газа с вязкостью, зависящей от плотности // Динамика сплошной среды. 1987. Вып. 79. С. 3–9.


*Гатапов Баир Васильевич*
*Россия, Новосибирск, Новосибирский государственный университет*
gatapov@ngs.ru

*Кажихов Александр Васильевич*
*Россия, Новосибирск, Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН*
kazhikhov@hydro.nsc.ru