УДК 519.633.6

# КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА СТЕКЛОВА

**А. А. Керефов, М. Х. Шхануков-Лафишев, Р. С. Кулиев**

В работе рассматриваются нелокальные по пространственной и временной переменным краевые задачи для нагруженного уравнения параболического типа. Методом редукции к интегральным уравнениям Вольтерра 2-го рода доказана однозначная разрешимость нелокальной по пространственной переменной задачи. Нелокальная задача по пространственной и временной переменым редуцирована к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода. Из априорной оценки следует единственность решения рассматриваемой нелокальной задачи.

**1.** В области $Q_T = \{(x,t):\ 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим нелокальную задачу

$$u_t = u_{xx} + u_x(0,t) + f(x,t), \quad 0 < x < l, \ \ 0 < t \le T, \tag{1}$$

$$u(l,t) = u(0,t), \quad u_x(l,t) = u_x(0,t) + u(0,t), \tag{2}$$

$$u(x,0) = \tau(x), \tag{3}$$

где $f(x,t)$ непрерывна в $\overline{Q}_T$ по переменным $x$, $t$ и удовлетворяет условию Гельдера по $x$, $\tau(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,l]$.

Будем искать решение задачи (1)–(3) $u(x,t)$ из класса $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, где $C^{m,n}$ — класс функций непрерывных вместе со своими частными производными порядка $m$ по $x$ и порядка $n$ по $t$.

Нелокальные задачи типа (1)–(3) рассматривались еще В. А. Стекловым [1]. Краевые задачи с нелокальным условием по времени изучались в ряде работ А. И. Кожанова (см., например, [2]). Нелокальные задачи для уравнения теплопроводности и их связь с нагруженными уравнениями изучались в работе А. М. Нахушева [4].

С учетом дифференциальных и конструктивных свойств фундаментального решения

$$\Gamma(x,t;\xi,\eta) = (t-\eta)^{-1/2} \exp\left[ -\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)} \right]$$

уравнения теплопроводности (см. [4]) решение $u(x,t)$ должно удовлетворять нагруженному интегральному уравнению

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \left[ \frac{x}{2(t-\eta)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\eta)}} u(0,\eta) - (t-\eta)^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{4(t-\eta)}} u_\xi(0,\eta) \right] d\eta$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^l t^{-1/2} e^{-\frac{(x-l)^2}{4(t-\eta)}} \tau(\xi) d\xi$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\left[(t-\eta)^{-1/2}e^{-\frac{(x-l)^2}{4(t-\eta)}}u_\xi(l,\eta)-\frac{x-l}{2(t-\eta)^{3/2}}e^{-\frac{(x-l)^2}{4(t-\eta)}}u(l,\eta)\right]d\eta$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t u_\xi(0,\eta)d\eta\int\limits_0^l(t-\eta)^{-1/2}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\eta)}}d\xi$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^l\int\limits_0^t f(\xi,\eta)\Gamma(x,t;\xi,\eta)d\xi d\eta. \quad (4)$$

Переходя в (4) к пределу при $x\to 0+$, имеем

$$u(0,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\lim_{x\to 0+}\int\limits_0^t\frac{x}{2(t-\eta)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4(t-\eta)}}u(0,\eta)d\eta$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t(t-\eta)^{-1/2}u_\xi(0,\eta)d\eta+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^l t^{-1/2}e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\tau(\xi)d\xi$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\left[(t-\eta)^{-1/2}e^{-\frac{l^2}{4(t-\eta)}}u_\xi(l,\eta)+\frac{l}{2(t-\eta)^{3/2}}e^{-\frac{l^2}{4(t-\eta)}}u(l,\eta)\right]d\eta$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t(t-\eta)^{-1/2}u_\xi(0,\eta)d\eta\int\limits_0^l e^{-\frac{\xi^2}{4(t-\eta)}}d\xi$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^l\int\limits_0^t f(\xi,\eta)\Gamma(0,t;\xi,\eta)d\xi d\eta. \quad (5)$$

Рассмотрим отдельно выражение

$$I_1=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{x}{2(t-\eta)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4(t-\eta)}}u(0,\eta)d\eta.$$

Предварительно под знаком интеграла выполним замену переменной интегрирования по формуле $z=\frac{x}{2\sqrt{t-\eta}}$. Тогда получим

$$I_1=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{+\infty}u\left(0,t-\frac{x^2}{4z^2}\right)e^{-z^2}dz=\frac{1}{\sqrt{\pi}}u(0,t)\int\limits_0^{+\infty}e^{-z^2}dz=\frac{1}{2}u(0,t)$$

С учетом этого (5) принимает вид

$$u(0,t)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t(t-\eta)^{-1/2}u_\xi(0,\eta)d\eta+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t t^{-1/2}e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\tau(\xi)d\xi$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\left[(t-\eta)^{-1/2}e^{-\frac{l^2}{4(t-\eta)}}u_\xi(l,\eta)+\frac{l}{2(t-\eta)^{3/2}}e^{-\frac{l^2}{4(t-\eta)}}u(l,\eta)\right]d\eta$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t(t-\eta)^{-1/2}u_\xi(0,\eta)d\eta\int\limits_0^l e^{-\frac{\xi^2}{4(t-\eta)}}d\xi+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^l\int\limits_0^t f(\xi,\eta)\Gamma(0,t;\xi,\eta)d\xi d\eta. \quad (6)$$

Теперь, переходя в (4) к пределу при $x \to l-$, находим

$$u(l,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\left[\frac{l}{2(t-\eta)^{3/2}}e^{-\frac{l^2}{4(t-\eta)}}u(0,\eta)-(t-\eta)^{-1/2}e^{-\frac{l^2}{4(t-\eta)}}u_\xi(0,\eta)\right]d\eta$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^l t^{-1/2}e^{-\frac{(l-\xi)^2}{4t}}\tau(\xi)d\xi+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t(t-\eta)^{-1/2}u_\xi(l,\eta)d\eta$$
$$-\lim_{x\to l-}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{x-l}{2(t-\eta)^{3/2}}e^{-\frac{(x-l)^2}{4(t-\eta)}}u(l,\eta)d\eta$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t(t-\eta)^{-1/2}u_\xi(0,\eta)d\eta\int\limits_0^l e^{-\frac{(l-\xi)^2}{4(t-\eta)}}d\xi+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^l\int\limits_0^t f(\xi,\eta)\Gamma(l,t;\xi,\eta)d\xi d\eta. \quad (7)$$

Как и выше рассмотрим интеграл

$$I_2=\lim_{x\to l-}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{x-l}{2(t-\eta)^{3/2}}e^{-\frac{(x-l)^2}{4(t-\eta)}}u(l,\eta)d\eta.$$

Сделав замену в этом интеграле $z=\frac{x-l}{2\sqrt{t-\eta}}$ и переходя к пределу при $x\to l-$, будем иметь

$$I_2=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{-\infty}u(l,t)e^{-z^2}dz=-\frac{1}{2}u(l,t).$$

Тогда выражению (7) можно придать вид

$$u(l,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\left[\frac{l}{2(t-\eta)^{3/2}}e^{-\frac{l^2}{4(t-\eta)}}u(0,\eta)-(t-\eta)^{-1/2}e^{-\frac{l^2}{4(t-\eta)}}u_\xi(0,\eta)\right]d\eta$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^l t^{-1/2}e^{-\frac{(l-\xi)^2}{4t}}\tau(\xi)d\xi+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t(t-\eta)^{-1/2}u_\xi(l,\eta)d\eta$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t(t-\eta)^{-1/2}u_\xi(0,\eta)d\eta\int\limits_0^l e^{-\frac{(l-\xi)^2}{4(t-\eta)}}d\xi+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^l\int\limits_0^t f(\xi,\eta)\Gamma(l,t;\xi,\eta)d\xi d\eta. \quad (8)$$

Используя краевые условия (2) из представлений (6) и (8) находим функциональные соотношения между $u(0,t)$ и $u_x(0,t)$

$$u(0,t)=\int\limits_0^t(t-\eta)^{-1/2}K_0(t,\eta)u(0,\eta)d\eta+\int\limits_0^t(t-\eta)^{-1/2}N_0(t,\eta)u_\xi(0,\eta)d\eta+f_0(t), \quad (9)$$

$$u(0,t)=\int\limits_0^t(t-\eta)^{-1/2}K_l(t,\eta)u(0,\eta)d\eta+\int\limits_0^t(t-\eta)^{-1/2}N_l(t,\eta)u_\xi(0,\eta)d\eta+f_l(t), \quad (10)$$

где

$$K_0(t,\eta)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-\frac{l^2}{4(t-\eta)}}+\frac{l}{2}(t-\eta)^{-1}e^{-\frac{l^2}{4(t-\eta)}}\right],$$

$$N_0(t,\eta)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-\frac{l^2}{4(t-\eta)}}-1+\int\limits_0^l e^{-\frac{\xi^2}{4(t-\eta)}}d\xi\right],$$

$$f_0(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^l t^{-1/2}e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\tau(\xi)d\xi+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^l\int\limits_0^t f(\xi,\eta)\Gamma(0,t;\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

$$K_l(t,\eta)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[-\frac{l}{2(t-\eta)}e^{-\frac{l^2}{4(t-\eta)}}+1\right],$$

$$N_l(t,\eta)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[1-e^{-\frac{l^2}{4(t-\eta)}}+\int\limits_0^l e^{-\frac{(l-\xi)^2}{4(t-\eta)}}d\xi\right],$$

$$f_l(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^l t^{-1/2}e^{-\frac{(l-\xi)^2}{4t}}\tau(\xi)d\xi+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^l\int\limits_0^t f(\xi,\eta)\Gamma(l,t;\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Из (9) и (10) нетрудно заключить существование и единственность $u(0,t)$ и $u_x(0,t)$, так как (9) есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью, (10) представляет собой интегральное уравнение Абеля, ядро которого имеет слабую особенность.

**2.** Рассмотрим для уравнения (1) следующую нелокальную и по пространственной и по временной переменным задачу

$$u(l,t)=u(0,t),\quad u_x(l,t)=u_x(0,t)+u(0,t),$$
$$u(x,0)=\alpha u(x,T),\quad \alpha=\text{const}. \tag{11}$$

Из представления (4) при $t=T$ с учетом (2) следует

$$u(x,T)=\int\limits_0^l L(x,\xi)u(\xi,T)d\xi+\int\limits_0^T L_0(x,\eta)u(0,\eta)d\eta+\int\limits_0^T L_1(x,\eta)u_\xi(0,\eta)d\eta+\overline{f}(x), \tag{12}$$

где

$$L(x,\xi)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}T^{-1/2}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4T}}\alpha,$$

$$L_0(x,\xi)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\frac{x}{2(T-\eta)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4(T-\eta)}}\right.$$
$$\left.+(T-\eta)^{-1/2}e^{-\frac{(x-l)^2}{4(T-\eta)}}-\frac{x-l}{2(T-\eta)^{3/2}}e^{-\frac{(x-l)^2}{4(T-\eta)}}\right],$$

$$L_1(x,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[(T-\eta)^{-1/2}e^{-\frac{(x-l)^2}{4(T-\eta)}}\right.$$
$$\left.-(T-\eta)^{-1/2}e^{-\frac{x^2}{4(T-\eta)}}+(T-\eta)^{-1/2}\int\limits_0^l e^{-\frac{(x-]xi)^2}{4(T-\eta)}}d\xi\right],$$

$$\overline{f}(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^l\int\limits_0^T f(\xi,\eta)\Gamma(x,T;\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Нетрудно видеть, что (12) есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно $u(x,T)$.

Так как

$$f_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^l t^{-1/2} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} u(\xi,0) d\xi + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^l \int\limits_0^t f(\xi,\eta) \Gamma(0,t;\xi,\eta) d\xi d\eta,$$

то с помощью (11) получаем

$$f_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^l t^{-1/2} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} \alpha u(\xi,T) d\xi + \overline{f_0}(t),$$

где

$$\overline{f_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^l \int\limits_0^t f(\xi,\eta) \Gamma(0,t;\xi,\eta) d\xi d\eta$$

С учетом этого (9) принимает вид

$$u(0,t) = \int\limits_0^t (t-\eta)^{-1/2} K_0(t,\eta) u(0,\eta) d\eta + \int\limits_0^t (t-\eta)^{-1/2} N_0(t,\eta) u_\xi(0,\eta) d\eta$$
$$+ \int\limits_0^l M(\xi,t) u(\xi,T) d\xi + \overline{f_0}(t),$$

где

$$M(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-1/2} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} \alpha$$

В силу условия (11) имеем

$$f_l(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^l t^{-1/2} e^{-\frac{(l-\xi)^2}{4t}} u(\xi,0) d\xi + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^l \int\limits_0^t f(\xi,\eta) \Gamma(l,t;\xi,\eta) d\xi d\eta$$
$$= \int\limits_0^l \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-1/2} e^{-(l-\xi)^2} 4t\alpha u(\xi,T) d\xi + \overline{f_l}(t) = \int\limits_0^l S(\xi,t) u(\xi,T) d\xi + \overline{f_l}(t),$$

Тогда выражение (10) принимает вид

$$u(0,t) = \int\limits_0^t (t-\eta)^{-1/2} K_l(t,\eta) u(0,\eta) d\eta$$
$$\int\limits_0^t (t-\eta)^{-1/2} N_l(t,\eta) u_\xi(0,\eta) d\eta + \int\limits_0^l S(\xi,t) u(\xi,T) d\xi + \overline{f_l}(t), \quad (13)$$

где

$$S(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-1/2} e^{-\frac{(l-\xi)^2}{4t}} \alpha,$$

$$\overline{f_l} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^l \int\limits_0^t f(\xi,\tau)\Gamma(l,t,\xi,\tau)d\xi d\eta$$

**3. Априорные оценки.** Сначала получим априорную оценку для решения задачи (1)–(3). Для чего умножим уравнение (1) скалярно на $u_{xx}$:

$$(u_t, u_{xx}) - \|u_{xx}\|_0^2 - u_x(0,t)(1,u_{xx}) = (f, u_{xx}), \tag{14}$$

где

$$(u,v) = \int\limits_0^l uvdx, \|u\|_0^2 = (u,u).$$

Преобразуем с учетом условий (2), (3) интегралы, входящие в тождество (14)

$$(u_t, u_{xx}) = (u_x(l,t) - u_x(0,t))u_t(0,t) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|_0^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u^2(0,t) - \|u_x\|_0^2),$$

$$(u_x(0,t), u_{xx}) = u_x(0,t)(u_x(l,t) - u_x(0,t)) = u_x(0,t)u(0,t),$$

$$(f, u_{xx}) \le \frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_0^2 + \varepsilon\|u_{xx}\|_0^2, \quad \varepsilon > 0,$$

Подставляя последние выражения в тождество (14) и выбирая $\varepsilon = \frac{1}{2}$, находим

$$\frac{d}{dt}\|u_x\|_0^2 + \|u_{xx}\|_0^2 \le L\frac{d}{dt}u^2(0,t) + u_x^2(0,t) + u^2(0,t) + \|f\|_0^2. \tag{15}$$

Второе и третье слагаемые в правой части (15) оцениваются (см. [5]) так

$$u_x^2(0,t) \le \varepsilon\|u_{xx}\|_0^2 + C(\varepsilon)\|u_x\|_0^2, u^2(0,t) \le \varepsilon\|u_x\|_0^2 + C(\varepsilon)\|u\|_0^2. \tag{16}$$

После подстановки (16) в неравенство (15) получаем

$$\frac{d}{dt}\|u_x\|_0^2 + \|u_{xx}\|_0^2 \le \frac{d}{dt}u^2(0,t) + \varepsilon\|u_{xx}\|_0^2 + \varepsilon\|u_x\|_0^2 + C(\varepsilon)\|u_x\|_0^2 + C(\varepsilon)\|u\|_0^2 + \|f\|_0^2 \tag{17}$$

Веберем $\varepsilon = 1/2$ и проинтегрируем (17) по $\tau$ от 0 до $t$

$$\|u_x\|_0^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|u_{xx}\|_0^2 d\tau \le u^2(0,t) - u^2(0,0) + C_1\int\limits_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau + C_2\int\limits_0^t \|u\|_0^2 d\tau + \int\limits_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \|\tau(x)\|^2_{W_2^1(0,l)},$$

где $C_1$, $C_2$ — известные положительные числа.

Откуда после применения леммы 1.1 из [5] получаем неравенство

$$\|u_x\|_0^2 + \int\limits_0^t \|u_{xx}\|_0^2 d\tau \le M(t)\Bigg(\int\limits_0^t \|u\|_0^2 d\tau + \|u\|_0^2 + \int\limits_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \|\tau(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\Bigg). \tag{18}$$

Теперь умножим уравнение (1) скалярно на $u$ и проведем аналогичные преобразования, тогда получим оценку для суммы $\|u\|_0^2 + \int\limits_0^t \|u\|_0^2 d\tau$

$$\|u\|_0^2 + \int\limits_0^t \|u\|_0^2 d\tau \le \varepsilon \int\limits_0^t \|u_{xx}\|_0^2 d\tau + \nu_1 \int\limits_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau + \int\limits_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \|\tau(x)\|_0^2, \qquad (19)$$

где $\nu_1$ — известное положительное число.

Из (18) с помощью (19) после применения леммы 1.1 из [5] при достаточно малом $\varepsilon$, получаем априорную оценку

$$\|u_x\|_0^2 + \int\limits_0^t \|u_{xx}\|_0^2 d\tau \le M(t)\left(\int\limits_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \|\tau(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\right),$$

где $M(t)$ - некоторое положительное число, зависящее от $t$, или

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,l)} \le M(t)(\|f\|^2_{2,Q_t} + \|\tau(x)\|^2_{W_2^1(0,l)})$$

Переходя к нелокальной по времени задаче (2), (11) для уравнения (1) отметим, что для ее решения справедлива оценка

$$\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \int\limits_0^t \|u_{xx}\|_0^2 d\tau$$

$$\le M(t)\left(\|u\|_0^2 + \int\limits_0^t \|u\|_0^2 d\tau + \|u_x(x,0)\|_0^2 + \|u(x,0)\|_0^2 + \|f\|^2_{2,Q_t}\right). \qquad (20)$$

В силу нелокального по времени условия (11) имеем

$$\|u(x,0)\|_0^2 = \alpha^2 \|u(x,T)\|_0^2, \|u_x(x,0)\|_0^2 = \alpha^2 \|u_x(x,T)\|_0^2. \qquad (21)$$

Для суммы $\|u\|_0^2 + \int\limits_0^t \|u\|_0^2 d\tau$, как и выше, можно получить оценку

$$\|u\|_0^2 + \int\limits_0^t \|u\|_0^2 d\tau \le M_1(t)\varepsilon \int\limits_0^t \|u_{xx}\|_0^2 d\tau + C_\varepsilon \int\limits_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau + M_2(t)\|f\|^2_{2,Q_t}. \qquad (22)$$

Из оценки (20) с помощью (22) и леммы 1.1 из [5] при малом $\varepsilon$ находим

$$\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \int\limits_0^t \|u_{xx}\|_0^2 d\tau \le M(t)(\|f\|^2_{2,Q_t} + \|u_x(x,0)\|_0^2 + \|u(x,0)\|_0^2),$$

или в силу (21)

$$\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \int\limits_0^t \|u_{xx}\|_0^2 d\tau \le M(t)(\|f\|^2_{2,Q_t} + \alpha^2(\|u_x(x,T)\|_0^2 + \|u(x,T)\|_0^2)), \quad (23)$$

Положим в (23) $t = T$, тогда при достаточно малом $|\alpha|$ получим

$$\|u(x,T)\|_0^2 + \|u_x(x,T)\|_0^2 + \int\limits_0^T \|u_{xx}(x,\tau)\|_0^2 d\tau \le M(T)\|f\|^2_{2,Q_T},$$

или

$$\|u(x,T)\|_{w_2^1(0,l)} \leq M(T)\|f\|_{2,Q_T}. \tag{24}$$

Из оценки (24) следует единственность решения нелокальной по пространственной и временной переменным задачи (1), (2), (11). В самом деле, полагая $f = 0$ из оценки (24) получим $u(x,T) = 0$, тогда в силу условия (11) и $u(x,0) = 0$. То есть исходная задача (1), (2), (11) имеет только тривиальное решение. Возвращаясь к интегральным уравнениям (12), (13) заключаем, что задача (1), (2), (11) при достаточно малом $|\alpha|$ имеет, притом единственное, решение.

Полученные оценки имеют место и для нагруженных параболических уравнений с переменными коэффициентами.

## ЛИТЕРАТУРА


**1.** *Стеклов В. А.* Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983.

**2.** *Кожанов А. И.* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнения теплопроводности и Аллера // Диффер. уравн. 2004. Т. 40, № 6. С. 763–774.

**3.** *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.

**4.** *Фридман А.* Уравнения с частными производными парболического типа. М.: Мир, 1968.

**5.** *Ладыженская О. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1973.



$\boxed{\text{Керефов Анатолий Анатольевич}}$
*Россия, Нальчик,*
*Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова*

*Шхануков-Лафишев Мухамед Хабалович*
*Россия, Нальчик,*
*Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова*

*Кулиев Руслан Султанович*
*Россия, Нальчик,*
*Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова*
kuliyev@mail.ru