УДК 517.95

# О ЛОКАЛЬНЫХ ОЦЕНКАХ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА

**А. Р. Хашимов**

В данной статье устанавливаются локальные оценки $W_2^l$-норм решений уравнений третьего порядка составного типа. Такие оценки были установлены в работах С. Агмона, А. Дуглиса и Л. Ниренберга для обобщенных решений уравнения эллиптического типа.

## Введение

Большую роль в теории краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных играют локальные или же глобальные оценки $W_2^l$-норм решений через нормы правых частей и коэффициентов уравнения. Для обобщенных решений параболических, эллиптических и параболо-эллиптических уравнений такие оценки установлены в работах [1–3].

В данной работе мы устанавливаем локальные оценки $W_2^l$-норм решений уравнений третьего порядка составного типа, которые играют весьма важную роль при исследовании асимптотических свойств решений краевых задач на бесконечности и в окрестности нерегулярных точек границы области в зависимости от геометрических характеристик области.

## 1. Постановка задачи

В ограниченной области $\Omega \subset R_+^n = \{x: \ x_1 > 0\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv lAu + Bu = f(x), \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u|_{\Gamma_1} = 0, \quad l_0u|_{\Gamma_2} = 0, \quad \Gamma_1, \Gamma_2 \subset \partial\Omega = \Gamma, \tag{2}$$

где $lu = l_0u + \alpha(x)u$, $l_0u = \alpha^k(x)u_{x_k}$, $Au = a^{ij}(x)u_{x_ix_j} + a^i(x)u_{x_i} + a(x)u$, $Bu = b^{ij}(x)u_{x_ix_j} + b^i(x)u_{x_i} + b(x)u$.

Здесь и в дальнейшем предполагается, что по повторящимся индексам ведется суммирование от 1 до $n$.

Далее всюду подразумываем, что

$$\begin{gathered} a^{ij} = a^{ji}, \quad a_0|\xi|^2 \le a^{ij}\xi_i\xi_j \le a_1|\xi|^2, \quad d^{ij} = d^{ji}, \\ d_0|\xi|^2 \le d^{ij}\xi_i\xi_j \le d_1|\xi|^2, \quad c^{ij} = c^{ji}, \quad c_0|\xi|^2 \le c^{ij}\xi_i\xi_j \le c_1|\xi|^2, \\ q^{ij} = c - \tfrac{1}{2}c^i_{x_i} + \tfrac{1}{2}c^{ij}_{x_ix_j} + \tfrac{1}{2}(\alpha^i a)_{ij} \le -c_2 < 0, \\ \textstyle\sum_{k=1}^n (\alpha^k(x))^2 \ne 0, \quad C_1u = c_0^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}(l_0u) + l_1u, \end{gathered} \tag{3}$$

при $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in R^n_\xi$; $a_0, a_1, d_0, d_1, c_0, c_1, c_2$ — положительные постоянные,

$$d^{ij} \equiv c^{ij} - (\alpha^i a^{kj})_{x_k} + \alpha^i a^i + \tfrac{1}{2}(\alpha^k a^{ij})_{x_k},$$
$$c^{ij} \equiv b^{ij} + \alpha a^i - \alpha^k_{x_k} a^{ij}, \quad c^i = b^i + \alpha a^i - \alpha^k_{x_k} a^i,$$
$$c \equiv b + \alpha a - \alpha^k_{x_k} a, \quad C_1 = c^{ij} + c^i + c,$$

$l_1$ — дифференциальный оператор первого порядка.

Пусть $\Gamma = \sigma_0 \cup \sigma_1 \cup \sigma_2$, $\sigma_0 = \{x \in \Gamma : \alpha^k \nu_k = 0\}$, $\sigma_1 = \{x \in \Gamma : \alpha^k \nu_k > 0\}$, $\sigma_2 = \{x \in \Gamma : \alpha^k \nu_k < 0\}$. Для $h > 0$ определим $\sigma_{1,h} = \{x \in \sigma_1 : \rho(x, \partial\sigma_1) > h\}$, $\sigma_1^h = \sigma_1 \backslash \sigma_{1,h}$, $\nu_k$ — вектор внутренней нормали к $\Gamma$ в точке $x$.

Пусть $E(\Omega, \gamma)$ есть множество функций $\vartheta(x)$ из $C^2(\overline{\Omega})$ таких, что $\vartheta(x) = 0$ на $\gamma \subset \Gamma$ и для некоторого $h > 0$ $l_0 u = 0$ на $\sigma_0 \cup \sigma_1 \cup \sigma_1^h$.

Через $H(\Omega, \gamma)$ обозначим пополнение $E(\Omega, \gamma)$ по норме

$$\|\vartheta\|_{H(\Omega,\gamma)} = \left\{ \int\limits_\Omega (\alpha^{ij} \vartheta_{x_i} \vartheta_{x_j} + \vartheta^2) dx + \int\limits_{\sigma_1} \alpha^k \nu_k \vartheta_{x_i} \vartheta_{x_j} d\sigma \right\}^{1/2}.$$

Рассмотрим билинейную форму

$$a(u, \vartheta) = \int\limits_\Omega [\alpha^k a^{ij} u_{x_i} \vartheta_{x_j x_k} + (\alpha^k a^{ij})_{x_j} u_{x_i} \vartheta_{x_k} - \alpha^k a^i u_{x_i} \vartheta_{x_k}$$
$$- c^{ij} u_{x_i} \vartheta_{x_j} + (c^{ij} - \alpha^i a - c^i) u \vartheta_{x_i} + (c - c^i_{x_i} + c^{ij}_{x_i x_j}) u \vartheta] dx.$$

Определение 1. Функцию $u(x, y) \in H(\Omega, \Gamma_1)$ будем называть *обобщенным решением* уравнения (1) с граничными условиями (2), если для любой функции $\vartheta \in E(\Omega, \Gamma)$ выполняется соотношение

$$a(u, \vartheta) = \int\limits_\Omega f \vartheta dx.$$

Будем предполагать, что все коэффициенты в (1) и их производные измеримы в области $\Omega$.

Отметим, что если $u(x) \in H(\Omega, \partial\Omega)$, то задача (1), (2) была рассмотрена в работе [4].

## 2. Основные результаты

Пусть область $\Omega(1)$ является либо шаром $\{x: \ |x| < 1\}$, либо полушаром $\{x: |x| < 1, \ x_1 > 0\}$, либо цилиндром $\{x: \ |x'| < 1, \ -\frac{1}{2} < x_1 < \frac{1}{2}\}$, $(x' = (x_2, \dots, x_n))$. Через $\Omega(\frac{1}{2})$ обозначим либо шар $\{x : \ |x| < \frac{1}{2}\}$, либо полушар $\{x : \ |x| < \frac{1}{2}, x_1 > 0\}$, либо цилиндр $\{x: \ |x'| < 1, \ -\frac{1}{4} < x_1 < \frac{1}{4}\}$.

Пусть в $\Omega(1)$ задано уравнение

$$Lu = 0 \tag{4}$$

**Теорема.** *Пусть выполнены условия* (3).

*Предположим, что коэффициенты уравнения* (1) *и их производные до порядка* $l \geq 2$ *включительно непрерывны в* $\overline{\Omega(1)}$. *Тогда существует постоянная* $k$ *такая, что для любого решения* $u \in W_2^{l+1}(\Omega(1))$ *уравнения* (1) *в* $\Omega(1)$, *которое в*

*случае, когда $\Omega(1)$ есть полушар или цилиндр удовлетворяет граничным условиям (2) соответственно на плоской части границы полушара $\Omega(1)$ или на боковой границе цилиндра $\Omega(1)$ ($\Gamma_2$ может быть пустым, если на плоской части границы полушара или на боковой границе цилиндра выполняется неравенство $\alpha^k\nu_k \le 0$), имеет место оценка*

$$\|u\|_{W_2^{l+1}\left(\Omega\left(\frac{1}{2}\right)\right)} \le k\|u\|_{L_2(\Omega(1))}, \tag{5}$$

*причем постоянная $k$ зависит лишь от $a_0, a_1$, $d_0, d_1$, $c_0, c_1, c_2$, максимума модулей коэффициентов уравнения (4) и их производных до порядка $l$ включительно и от модулей непрерывности коэффициентов старших производных (здесь $W_2^l(\Omega)$ — пространство Соболева в обычном смысле).*

Доказательство. Пусть сначала $l = 2$. Рассмотрим случай, когда $\Omega(1)$ является полушаром и на его плоской части выполняются условия $\alpha^k\nu_k > 0$. Остальные случаи исследуются аналогичным образом.

Пусть функция $\psi(x) \in C^\infty(\overline{\Omega(1)})$ неотрицательна и $\psi(1) = 1$ при $x \in \Omega\left(\frac{1}{2}\right)$, $\psi(x) = 0$ при $x \in \Omega(1)\backslash\Omega\left(\frac{3}{4}\right)$. Рассмотрим область $\Omega' \subset \Omega(1)$, $\partial\Omega' = \gamma' \cup \gamma''$, $\gamma'$ — плоская часть границы полушара $\Omega\left(\frac{4}{5}\right)$, $\gamma'' \subset \Omega(1)\backslash\overline{\Omega\left(\frac{3}{4}\right)}$, $\partial\Omega' \in C^4$.

Заметим, что функция $\omega = \psi u$ является регулярным (т. е. принадлежашим $W_2^3(\Omega')$) решением задачи

$$L\omega = F, \tag{6}$$

$$\omega|_{\partial\Omega'} = 0, \quad l_0\omega|_{\sigma_1'} = 0, \tag{7}$$

где $\sigma_1' = \{x \in \partial\Omega' : \alpha^k\nu_k > 0\}$,

$$F \equiv l(uA\psi) + uB\psi + Au\cdot l\psi + 2l\left(a^{ij}u_{x_i}\psi_{x_j}\right) + 2b^{ij}u_{x_i}\psi_{x_j} - l(au\psi) - bu\psi,$$

$F \in L_2(\Omega')$.

Определение 2. Функцию $\omega(x) \in H(\Omega', \partial\Omega')$ будем называть *обобщенным решением* краевой задачи (6), (7), если для любой функции $\vartheta \in E(\Omega', \partial\Omega')$ выполняется соотношение

$$a(\omega, \vartheta) = \int\limits_{\Omega'} F\vartheta dx \tag{8}$$

Выполним в уравнении (6) линейное ортогональное преобразование $x \in Gy$, приводящее оператор $l_0$ к виду $\frac{\partial}{\partial y_1}$. Область $\Omega'$ при этом преобразуется в область $\widetilde{\Omega}'$, множество $\sigma_1'$ — в множество $\widetilde{\sigma}_1' = \{y \in \partial\widetilde{\Omega}' :\ \nu_{y_1} > 0\}$.

Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим задачу

$$-\varepsilon\Delta_y^2\omega^\varepsilon + L\omega^\varepsilon = \widetilde{F}, \tag{9}$$

$$\omega^\varepsilon|_{\partial\widetilde{\Omega}'} = 0, \quad \frac{\partial\omega^\varepsilon}{\partial\nu_y}|_{\partial\widetilde{\Omega}'} = 0. \tag{10}$$

Задача (9), (10) имеет решение $\omega^\varepsilon \in W_2^4(\widetilde{\Omega'})$, принимающее указанные краевые условия [1]. Очевидно, что для решения $\omega^\varepsilon(y)$ задачи (9), (10) справедлива оценка

$$\varepsilon\int\limits_{\widetilde{\Omega}'} \left(\Delta_y\omega^\varepsilon\right)^2 dy + \|\omega^\varepsilon\|^2_{W_2^1\widetilde{\Omega}'} \le k_1, \tag{11}$$

где $k_1 = c_2\|u\|^2_{W_2^2\widetilde{\Omega}'}$, $c_1$ не зависит от $\varepsilon$.

В дальнейшем через $k_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от $\varepsilon$.

В силу оценки (11) из семейства $\{\omega^\varepsilon\}$ можно выбрать последовательность $\{\omega^{\varepsilon_m}\}$, слабо сходящуюся при $m \to \infty$ в $H(\widetilde{\Omega}', \partial\widetilde{\Omega}')$.

Покажем теперь, что $\omega^{\varepsilon_m}$ сходится слабо именно к $\omega$.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}'} \left(-\varepsilon\Delta_y^2\omega^\varepsilon + L\omega^\varepsilon\right)\psi\omega_{y_1}^\varepsilon dy = \int\limits_{\widetilde{\Omega}'} \widetilde{F}\omega_{y_1}^\varepsilon dy. \tag{12}$$

Краевые условия (10) дают $\omega_{y_1}^\varepsilon = 0$ на $\widetilde{\sigma}_1'$. Интегрируя по частям, учитывая обращение в нуль касательных производных и оценку (11), нетрудно получить неравенство

$$\varepsilon\sum_{i,k=1}^{n}\int\limits_{\widetilde{\sigma_1}} \psi\left(\omega_{y_iy_k}^\varepsilon\right)^2\nu_{y_1}d\widetilde{r}' + \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\widetilde{\Omega}'}\psi\left(\omega_{y_iy_1}^\varepsilon\right)^2 dy \le k_1, \tag{13}$$

где $k_2 = c_2\|u\|_{W_2^1(\widetilde{\Omega}')} + c_3\|\omega^\varepsilon\|_{W_2^1(\widetilde{\Omega}')}$, $c_1$, $c_2$ не зависят от $\varepsilon$.

Пусть функция $\vartheta$ принадлежит $C^2(\widetilde{\Omega}')$, обращается в нуль на $\widetilde{\sigma}_0' \cup \widetilde{\sigma}_2' \cup \widetilde{\sigma}_1'^{,h}$. Умножая уравнение (9) на $\vartheta$ и интегрируя, получаем

$$-\varepsilon_m\int\limits_{\widetilde{\sigma}_{1,h}'}\omega_{y_ky_1}^{\varepsilon_m}\vartheta_{y_i}\vartheta_{y_k}d\widetilde{r}' - \varepsilon_m\int\limits_{\widetilde{\Omega}'}\omega_{y_ky_i}^{\varepsilon_m}\vartheta_{y_ky_i}dy + a(\omega^{\varepsilon_m},\vartheta) = \int\limits_{\widetilde{\Omega}'}\widetilde{F}\vartheta dy. \tag{14}$$

На $\widetilde{\sigma}_{1,h}'$ выполняется $\nu_{y_1} \ge \lambda_h > 0$. Тогда оценка (13) дает сходимость первого слагаемого левой части (14) к нулю при $m \to \infty$. Сходимость к нулю второго слагаемого вытекает из оценки (11). Переходя к переделу при $m \to \infty$, получим $a(\Phi,\vartheta) = \int\limits_{\widetilde{\Omega}'}\widetilde{F}\vartheta dy$. Так как решение задачи (6), (7) единственно (см. [4]), то из равенства (8) имеем $\Phi = \omega$. Учитывая условия гладкости коэффициентов уравнения (6), интегрируя по частям в соотношении (8), получаем

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}'} L\omega\cdot\vartheta dx = \int\limits_{\widetilde{\Omega}'}\widetilde{F}\vartheta dx.$$

Поэтому $L\omega = \widetilde{F}$ почти всюду в $\widetilde{\Omega}'$. То есть $\omega^\varepsilon$ сходится слабо в $H(\widetilde{\Omega}', \partial\widetilde{\Omega}')$ к регулярному решению $\omega$ задачи (6), (7).

Переходим к непосредственному доказательству оценки (5). Выполняя интегрирование по частям в (12), пользуясь неравенством

$$ab \le \frac{1}{\delta_1}a^2 + \delta_1 b^2, \tag{15}$$

получаем ($\delta_1$ — малое положительное число)

$$\varepsilon\int\limits_{\widetilde{\sigma_1}}\psi(\omega_{y_iy_k}^\varepsilon)^2\nu_{y_1}dF + \int\limits_{\widetilde{\Omega}'}\psi(\omega_{y_iy_1}^\varepsilon)^2 d\widetilde{\Omega}' + \int\limits_{\widetilde{\Omega}'}\psi(\omega_{y_i}^\varepsilon)^2 d\widetilde{\Omega}' + \int\limits_{\widetilde{\Omega}'}\psi(\omega^\varepsilon)^2 d\widetilde{\Omega}'$$
$$\le k_3\Bigg[\int\limits_{\widetilde{\Omega}'}\psi u_{y_i}\omega_{y_iy_1}^\varepsilon d\widetilde{\Omega}' + \int\limits_{\widetilde{\Omega}'}\psi(u_{y_i})^2 d\widetilde{\Omega}' + \int\limits_{\widetilde{\Omega}'}\psi u^2 d\widetilde{\Omega}'\Bigg].$$

Далее, пользуясь последовательно соотношениями (15) и интерполяционными неравенствами

$$\|u_{y_i}\|_{0,\widetilde{\Omega}'}^2 \le \delta_2\|u_{y_iy_j}\|_{0,\widetilde{\Omega}'}^2 + \frac{1}{\delta_2}\|u\|_{0,\widetilde{\Omega}'}^2,$$

получаем ($\delta_2$ — малое положительное число, $\|\cdot\|^2_{0,\widetilde{\Omega}'} = \|\cdot\|^2_{L_2(\widetilde{\Omega}')}$, $\|\cdot\|^2_{l,\widetilde{\Omega}'} = \|\cdot\|^2_{W_2^l(\widetilde{\Omega}')}$)

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}'} \psi(\omega^\varepsilon_{y_iy_j})^2 d\widetilde{\Omega}' + \int\limits_{\widetilde{\Omega}'} \psi(\omega^\varepsilon_{y_i})^2 d\widetilde{\Omega}' + \int\limits_{\widetilde{\Omega}'} \psi(\omega^\varepsilon)^2 d\widetilde{\Omega}' \le k_4\biggl(\delta_2 \int\limits_{\widetilde{\Omega}'} u^2_{y_jy_i} d\widetilde{\Omega}' + \int\limits_{\widetilde{\Omega}'} u^2 d\widetilde{\Omega}'\biggr).$$

Отсюда, учитывая слабую сходимость $\omega^\varepsilon$ в $H^1(\widetilde{\Omega}')$, теорему существования обобщенной производной второго порядка и свойства функции $\psi$, имеем

$$\int\limits_{\Omega(1/2)} [(u_{y_iy_j})^2 + (u_{y_i})^2 + u^2] dy \le k_5\biggl[\delta_2 \int\limits_{\Omega(1)} u^2_{y_iy_j} dy + u^2 dy\biggr].$$

т. е.

$$\|u\|^2_{2,\Omega\left(\frac12\right)} \le \delta_3 \|u\|^2_{2,\Omega(1)} + k_5 \|u\|^2_{2,\Omega(1)}, \tag{16}$$

где $\delta_3 < \frac12$.

Пусть $N\left(\frac12\right) = k_5\|u\|^2_{0,\Omega(1)}$, $f(1) = \|u\|^2_{2,\Omega\left(\frac12\right)}$, $f\left(\frac12\right) = \|u\|^2_{2,\Omega(1)}$. Тогда из (16) имеем

$$f(1) = \frac12 f\Bigl(\frac12\Bigr) + N\Bigl(\frac12\Bigr).$$

Так как $f\left(\frac12\right)$ ограничено, то из этого неравенства следует

$$f(1) \le \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{2^j} N\Bigl(\frac{1}{2^{j+1}}\Bigr) + \frac{1}{2^{m+1}} N\Bigl(\frac{1}{2^{m+1}}\Bigr) \le \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} N\Bigl(\frac{1}{2^{j+1}}\Bigr).$$

Функция $N(\cdot)$ является монотонно возрастающей, поэтому $f(1) \le 2N\left(\frac12\right)$, т. е.

$$\|u\|^2_{2,\Omega\left(\frac12\right)} \le k_5 \|u\|^2_{0,\Omega(1)}. \tag{17}$$

Положим $\phi = \psi\omega_{y_1}$. Тогда из (6), (7) следует, что функция $\phi$ является решением задачи

$$A\phi = \widetilde{F_1},$$
$$\phi|_{\partial\widetilde{\Omega}'} = 0,$$

где $\widetilde{F}_1 = 2a^{ij}\psi_{y_i}u_{y_iy_1} + a^{ij}\psi_{y_iy_j}u_{y_1} + a^i\psi_{y_i}u_{y_1} - \psi c_1 u$. Заметим,что $\widetilde{F_1} \in L_2(\widetilde{\Omega}')$. Поэтому $\phi \in W_2^2(\widetilde{\Omega}')$ (см. [1]), причем

$$\|\phi\|^2_{2,\widetilde{\Omega}'} \le k_6 \|u\|^2_{2,\widetilde{\Omega}'}.$$

Отсюда, применяя (17), получаем

$$\|u\|^2_{3,\Omega\left(\frac12\right)} \le k_7 \|u\|^2_{0,\Omega(1)}.$$

Пусть теперь $u \in W_2^l(\widetilde{\Omega}')$, коэффициенты уравнения (6) принадлежат $C^l(\Omega(1))$ и

$$\|u\|^2_{l,\Omega\left(\frac12\right)} \le k_8 \|u\|^2_{0,\Omega(1)}. \tag{18}$$

Тогда $\widetilde{F}_1 \in W_2^{l-2}(\widetilde{\Omega}')$ и для функции $\phi$ справедлива следующая оценка

$$\|\phi\|^2_{l,\widetilde{\Omega}'} \le k_9 \|u\|^2_{l,\widetilde{\Omega}'}.$$

Отсюда, учитывая оценку (18), имеем

$$\|u\|^2_{l+1,\Omega\left(\frac12\right)} \le k_{10} \|u\|^2_{0,\Omega(1)}.$$

Теорема доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М., 1962.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
3. *Джураев Т. Д., Кадыров Р. Р.* Локальные оценки решений эллиптико-параболических уравнений в нормах пространства С. Л. Соболева // Докл. АН РУз. 1998. Т. 2.
4. *Кожанов А. И.* Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. Новосибирск, 1990.

*Хашимов Абдукомил Рисбекович*
*Узбекистан, Ташкент, Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз*
mathinst@uzsci.net