УДК 517.946

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ B-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ 2-ГО РОДА МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

Ф. Г. Мухлисов А. Ш. Хисматуллин

В работе изучаются основные краевые задачи для вырождающегося B-эллиптического уравнения

$$L_B(u) = B_x(u) + \frac{\partial}{\partial y}\quad y^\alpha \frac{\partial u}{\partial y} \quad = 0, \tag{L}$$

где $B_x(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2k}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = x^{-2k}\frac{\partial}{\partial x}\quad x^{2k}\frac{\partial u}{\partial x}$ — оператор Бесселя, $0<\alpha<1$, $k>0$ — постоянные.

Строится фундаментальное решение уравнения (L) и изучаются его свойства. С помощью этого фундаментального решения дается интегральное представление решения уравнения (L) и доказывается теорема о принципе максимума для решения этого уравнения. Дается постановка краевых задач для уравнения (L) и доказывается единственность их решения. Далее вводятся потенциалы типа простого и двойного слоев и изучаются их свойства. С помощью этих потенциалов краевые задачи для уравнения (L) сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода и доказывается однозначная разрешимость этих интегральных уравнений.

Пусть E_2^{++} — первый квадрант координатной плоскости Oxy, D — конечная область в E_2^{++}, ограниченная кривой Γ, отрезками Γ_1 и Γ_0 соответственно координатных осей Ox и Oy, $D_e = E_2^{++}\setminus\overline{D}$; $\widetilde{D} = D\cup\Gamma_0$.

В данной работе изучаются основные краевые задачи для вырождающегося B-эллиптического уравнения вида

$$L_B(u) = B_x(u) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^\alpha \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \tag{0.1}$$

где $B_x(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2k}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = x^{-2k}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{2k}\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ — оператор Бесселя, $0<\alpha<1$, $k>0$ — постоянные.

В п. 1 строится фундаментальное решение уравнения (0.1) и изучаются его свойства. В п. 2 дается интегральное представление решения уравнения (0.1) и доказывается теорема о принципе максимума для решения этого уравнения. В п. 3 дается постановка краевых задач для уравнения (0.1) и доказывается единственность их решения. В п. 4 вводятся потенциалы типа простого и двойного слоев и изучаются их свойства. В п. 5 краевые задачи для уравнения (0.1) сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. В п. 6 доказывается однозначная разрешимость этих интегральных уравнений.

1. Фундаментальное решение

Будем искать решение уравнения (0.1) в виде

$$u = \left(\rho_1^2\right)^{-(k+\beta)} \omega\left(\sigma\right) \tag{1.1}$$

где $\beta = \frac{\alpha}{2(2-\alpha)}$, $\sigma = \frac{\rho^2}{\rho_1^2}$, $\rho^2 = x^2 + \frac{4}{(2-\alpha)^2}\left(y^{\frac{2-\alpha}{2}} - y_0^{\frac{2-\alpha}{2}}\right)^2$, $\rho_1^2 = x^2 + \frac{4}{(2-\alpha)^2}\left(y^{\frac{2-\alpha}{2}} + y_0^{\frac{2-\alpha}{2}}\right)^2$.

Подставляя (1.1) в уравнение (0.1), получаем

$$\sigma\left(1-\sigma\right)\omega'' + \left[k+1-\left(1+k+2\beta\right)\sigma\right]\omega' - \beta\left(k+\beta\right)\omega = 0. \tag{1.2}$$

Известно [1], что это уравнение в окрестности точки $\sigma = 1$ имеет два линейно независимых решения. Одно из них имеет вид

$$\begin{aligned}\omega(\sigma) &= (1-\sigma)^{1-2\beta}F(k-\beta+1, 1-\beta, 2-2\beta; 1-\sigma)\\ &= \sigma^{-k}(1-\sigma)^{1-2\beta}F(1-k-\beta, 1-\beta, 2-2\beta; 1-\sigma).\end{aligned} \tag{1.3}$$

В силу известной формулы

$$\begin{aligned}F\left(a,b;c;1-\sigma\right) = \frac{\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(c-a-b\right)}{\Gamma\left(c-a\right)\Gamma\left(c-b\right)}F\left(a,b;a+b-c+1;\sigma\right)\\ + \sigma^{c-a-b}\frac{\Gamma\left(c\right)\Gamma\left(a+b-c\right)}{\Gamma\left(a\right)\Gamma\left(b\right)}F\left(c-a,c-b;c-a-b+1;\sigma\right)\end{aligned}$$

решение (1.3) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}\omega\left(\sigma\right) &= \frac{\Gamma\left(2-2\beta\right)\Gamma\left(k\right)}{\Gamma\left(k+1-\beta\right)\Gamma\left(1-\beta\right)}\sigma^{-k}\left(1-\sigma\right)^{1-2\beta}F\left(1-k-\beta, 1-\beta; 1-k; \sigma\right)\\ &+ \frac{\Gamma\left(2-2\beta\right)\Gamma\left(-k\right)}{\Gamma\left(1-k-\beta\right)\Gamma\left(1-\beta\right)}\left(1-\sigma\right)^{1-2\beta}F\left(1+k-\beta, 1-\beta; 1+k; \sigma\right).\end{aligned} \tag{1.4}$$

Подставляя (1.4) в (1.1), получаем

$$\begin{aligned}q\left(x,y;y_0\right) &= a\frac{\Gamma\left(2-2\beta\right)\Gamma\left(k\right)}{\Gamma\left(k-\beta+1\right)\Gamma\left(1-\beta\right)}\left(\rho_1^2\right)^{-\beta}\rho^{-2k}\left(1-\sigma\right)^{1-2\beta}\\ &\times F\left(1-k-\beta, 1-\beta; 1-k; \sigma\right) + a\frac{\Gamma\left(2-2\beta\right)\Gamma\left(-k\right)}{\Gamma\left(1-k-\beta\right)\Gamma\left(1-\beta\right)}\\ &\times \left(\rho_1^2\right)^{-(k+\beta)}\left(1-\sigma\right)^{1-2\beta}F\left(1+k-\beta, 1-\beta; 1+k; \sigma\right),\end{aligned} \tag{1.5}$$

где a — некоторая постоянная. Эта функция по переменным (x, y) является решением уравнения (0.1), имеет степенную особенность и, следовательно, является фундаментальным решением уравнения (0.1).

С помощью ряда Гаусса, разложения функций $\left(1 + \frac{(2-\alpha)^2\rho^2}{16(yy_0)^{\frac{2-\alpha}{2}}}\right)^{-\beta}$ и $(1-\sigma)^{1-2\beta}$ при малых значениях ρ в степенной ряд фундаментальное решение (1.5) запишем в виде

$$q\left(x,y;y_0\right) = a\frac{\Gamma\left(2-2\beta\right)\Gamma\left(k\right)\left(2-\alpha\right)^{2\beta}\left(yy_0\right)^{-\frac{\alpha}{4}}}{\Gamma\left(k+1-\beta\right)\Gamma\left(1-\beta\right)2^{4\beta}}\rho^{-2k} + \Psi\left(x,y;y_0\right), \tag{1.6}$$

где Ψ — регулярная в точке $(0, y_0)$ функция.

Для получения фундаментального решения уравнения (0.1) с особенностью в точке (x_0, y_0) применим к функции (1.6) оператор обобщенного сдвига $T_x^{x_0}$

$$\varepsilon\left(x, y; x_0, y_0\right) = aC_{2k} \frac{\Gamma\left(2-2\beta\right)\Gamma\left(k\right)\left(2-\alpha\right)^{2\beta}\left(yy_0\right)^{-\frac{\alpha}{4}}}{\Gamma\left(k+1-\beta\right)\Gamma\left(1-\beta\right)2^{4\beta}}$$
$$\times \int\limits_0^\pi \left[x^2 + x_0^2 - 2xx_0\cos\varphi + \frac{4}{\left(2-\alpha\right)^2}\left(y^{\frac{2-\alpha}{2}} - y_0^{\frac{2-\alpha}{2}}\right)^2\right]^{-k}$$
$$\times \sin^{2k-1}\varphi d\varphi + \Psi^*\left(x, y; x_0, y_0\right), \quad (1.7)$$

где $C_{2k}^{-1} = \int\limits_0^\pi \sin^{2k-1}\varphi d\varphi = \sqrt{\pi}\Gamma\left(k\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{2k+1}{2}\right)$, Ψ^* — регулярная в точке (x_0, y_0) функция.

Известно [2], что при малых значениях $\rho_{MM_0} = \left(x - x_0\right)^2 + \frac{4}{(2-\alpha)^2}\times \left(y^{\frac{2-\alpha}{2}} - y_0^{\frac{2-\alpha}{2}}\right)^2$ имеет место равенство

$$C_{2k}\int\limits_0^\pi \left[x^2 + x_0^2 - 2xx_0\cos\varphi + \frac{4}{\left(2-\alpha\right)^2}\left(y^{\frac{2-\alpha}{2}} - y_0^{\frac{2-\alpha}{2}}\right)^2\right]^{-k}\sin^{2k-1}\varphi d\varphi$$
$$= -C_{2k}\left(xx_0\right)^{-k}\ln\rho_{MM_0} + R\left(x, y; x_0, y_0\right),$$

где R — регулярная в точке (x_0, y_0) функция.

Поэтому фундаментальное решение (1.7) может быть представлено в виде

$$\varepsilon\left(x, y; x_0, y_0\right) = aC_{2k} \frac{\Gamma\left(2-2\beta\right)\Gamma\left(k\right)\left(2-\alpha\right)^{2\beta}\left(yy_0\right)^{-\frac{\alpha}{4}}\left(xx_0\right)^{-k}}{\Gamma\left(k+1-\beta\right)\Gamma\left(1-\beta\right)2^{4\beta}}\ln\frac{1}{\rho_{MM_0}}$$
$$+ \Psi^{**}\left(x, y; x_0, y_0\right), \quad (1.8)$$

где Ψ^{**} — регулярная в точке (x_0, y_0) функция.

Формула (1.8) показывает, что функция $\varepsilon\left(x, y; x_0, y_0\right)$ является фундаментальным решением уравнения (0.1) с логарифмической особенностью в точке$M_0\left(x_0, y_0\right)$

Нетрудно видеть, что

$$\lim_{\eta\to 0}\varepsilon\left(\xi, \eta; x, y\right) = \lim_{y\to 0}\varepsilon\left(\xi, \eta; x, y\right) = 0, \quad (1.9)$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial\varepsilon\left(\xi, \eta; x, y\right)}{\partial\eta} = \lim_{\eta\to 0}\frac{\partial\varepsilon\left(\xi, \eta; x, y\right)}{\partial y} = 0, \quad (1.10)$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial\varepsilon\left(\xi, \eta; x, y\right)}{\partial\xi} = \lim_{y\to 0}\frac{\partial\varepsilon\left(\xi, \eta; x, y\right)}{\partial x} = 0, \quad (1.11)$$

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{\partial\varepsilon\left(\xi, \eta; x, y\right)}{\partial\xi} = \lim_{\eta\to 0}\frac{\partial\varepsilon\left(\xi, \eta; x, y\right)}{\partial x} = 0. \quad (1.12)$$

2. Интегральные представления и вытекающие из них свойства решения

Обозначим через $C_B^2(D)$ множество четных по x, два раза непрерывно дифференцируемых в D функций.

Пусть $u, v \in C_B^2(D) \cap C^1(\overline{D})$. Непосредственным вычислением можно доказать, что имеет место тождество

$$vL_B(u)\,x^{2k} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + y^\alpha \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right) x^{2k} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{2k} v \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^\alpha x^{2k} v \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Интегрируя обе части этого тождества по области D и пользуясь формулой Остроградского, получаем

$$\iint\limits_D vL_B(u)\,x^{2k}dxdy + \iint\limits_D \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + y^\alpha \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right) x^{2k}dxdy = \int\limits_\Gamma vA[u]\,x^{2k}d\Gamma, \quad (2.1)$$

где $A[u] = \cos(n,x)\frac{\partial u}{\partial x} + y^\alpha \cos(n,y)\frac{\partial u}{\partial y}$ — конормальная производная, n — единичный вектор внешней нормали к границе Γ.

Заменяя в формуле (2.1) местами u и v, получаем

$$\iint\limits_D uL_B(v)\,x^{2k}dxdy + \iint\limits_D \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + y^\alpha \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right) x^{2k}dxdy = \int\limits_\Gamma uA[v]\,x^{2k}d\Gamma, \quad (2.2)$$

Вычитая из (2.1) формулу (2.2), получаем

$$\iint\limits_D [vL_B(u) - uL_B(v)]\,x^{2k}dxdy = \int\limits_\Gamma (vA[u] - uA[v])\,x^{2k}d\Gamma. \quad (2.3)$$

Формулы (2.1) и (2.3) называются соответственно первой и второй формулами Грина для оператора L_B.

Если u и v суть решения уравнения (0.1), то из формулы (2.3) имеем

$$\int\limits_\Gamma (vA[u] - uA[v])\,x^{2k}d\Gamma = 0. \quad (2.4)$$

Полагая в формуле (2.2) $u = v$, получаем

$$\iint\limits_D \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + y^\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) x^{2k}dxdy = \int\limits_\Gamma uA[u]\,x^{2k}d\Gamma, \quad (2.5)$$

где $u(x,y)$ — решение уравнения (0.1)

Наконец, из формулы (2.1), полагая $v = 1$, будем иметь

$$\int\limits_\Gamma A[u]\,x^{2k}d\Gamma = 0, \quad (2.6)$$

т. е. интеграл от конормальной производной решения уравнения (0.1) по границе Γ области D равен нулю.

Пусть функция $u \in C^1(\overline{D})$ является четным по x решением уравнения (0.1) в области D и $M_0(x_0, y_0) \in D$. Рассмотрим окружность $C_{M_0\varepsilon}$ с центром в точке M_0

и радиуса ε такого, что $C_{M_0\varepsilon} \subset D$. Обозначим через D_ε область, ограниченную осями координат, кривой Γ и окружностью $C_{M_0\varepsilon}$.

Применяя к функциям $u(x,y)$ и $\varepsilon(x,y;x_0,y_0)$ вторую формулу Грина в области D_ε, получаем

$$\int\limits_{\Gamma} \left(\varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0) A[u] - uA[\varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0)]\right)\xi^{2k} d\Gamma$$
$$= \int\limits_{C_{M_0\varepsilon}} \left(\varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0) A[u] - uA[\varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0)]\right)\xi^{2k} dC_{M_0\varepsilon} = I_{1\varepsilon} - I_{2\varepsilon}. \quad (2.7)$$

Нетрудно доказать, что $I_{1\varepsilon} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Вычислим предел при $\varepsilon \to 0$ интеграла

$$I_{2\varepsilon} = \int\limits_{C_{M_0\varepsilon}} uA[\varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0)]\,\xi^{2k} dC_{M_0\varepsilon}. \quad (2.8)$$

Заменяя в (2.8) $\varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0)$ на его значение из (1.8), получим

$$I_{2\varepsilon} = aC_{2k}\frac{\Gamma(2-2\beta)\Gamma(k)(2-\alpha)^{2\beta} y_0^{-\frac{\alpha}{4}} x_0^{-k}}{\Gamma(k+1-\beta)\Gamma(1-\beta)2^{4\beta}} \int\limits_{C_{M_0\varepsilon}} uA[\ln\rho_{MM_0}]\,\xi^{2k} dC_{M_0\varepsilon} + J_{2\varepsilon}.$$

Также нетрудно доказать, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} J_{2\varepsilon} = 0$.

Вычислим предел при $\varepsilon \to 0$ интеграла

$$J_{1\varepsilon} = aC_{2k}\frac{\Gamma(2-2\beta)\Gamma(k)(2-\alpha)^{2\beta} y_0^{-\frac{\alpha}{4}} x_0^{-k}}{\Gamma(k+1-\beta)\Gamma(1-\beta)2^{4\beta}} \int\limits_{C_{M_0\varepsilon}} uA[\ln\rho_{MM_0}]\,\xi^{2k} dC_{M_0\varepsilon}.$$

Вычисляя конормальную производную $A[\ln\rho_{MM_0}]$ и пользуясь формулой Лагранжа

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta(x-x_0))(x-x_0), 0 < \theta < 1,$$

приведем этот интеграл к виду

$$J_{1\varepsilon} = aC_{2k}\frac{\Gamma(2-2\beta)\Gamma(k)(2-\alpha)^{2\beta} y_0^{-\frac{\alpha}{4}} x_0^{-k}}{\Gamma(k+1-\beta)\Gamma(1-\beta)2^{4\beta}\varepsilon}$$
$$\times \int\limits_{C_{M_0\varepsilon}} u\frac{(\xi-x_0)^2 + [y_0+\theta(\eta-y_0)]^{-\frac{\alpha}{2}}(\eta-y_0)^2\eta^{\frac{\alpha}{2}}}{(\xi-x_0)^2 + [y_0+\theta(\eta-y_0)]^{-\alpha}(\eta-y_0)^2}\eta^{-\frac{\alpha}{4}}\xi^k dC_{M_0\varepsilon}.$$

Вводя в этом интеграле полярные координаты и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_{1\varepsilon} = J_1 = 2aC_{2k}\frac{\Gamma(2-2\beta)\Gamma(k)(2-\alpha)^{2\beta}\pi u(x_0,y_0)}{\Gamma(k+1-\beta)\Gamma(1-\beta)2^{4\beta}}. \quad (2.9)$$

Требуя, чтобы

$$aC_{2k}\frac{\Gamma(2-2\beta)\Gamma(k)(2-\alpha)^{2\beta}\pi}{\Gamma(k+1-\beta)\Gamma(1-\beta)2^{4\beta-1}} = 1,$$

имеем
$$a = \frac{C_{2k}^{-1}\Gamma\left(k+1-\beta\right)\Gamma\left(1-\beta\right)}{\pi\Gamma\left(2-2\beta\right)\Gamma\left(k\right)\left(2-\alpha\right)^{2\beta}2^{1-4\beta}}. \tag{2.10}$$

Таким образом, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в (2.7), с учетом (2.9) и (2.10) получим
$$u\left(x_0, y_0\right) = \int\limits_{\Gamma} \left(\varepsilon\left(\xi, \eta; x_0, y_0\right) A\left[u\right] - uA\left[\varepsilon\left(\xi, \eta; x_0, y_0\right)\right]\right) \xi^{2k} d\Gamma. \tag{2.11}$$

Аналогично доказывается, что для любой точки $M_0\left(0, y_0\right) \in \overline{D}$, $y_0 > 0$ имеет место интегральное представление
$$u\left(0, y_0\right) = \int\limits_{\Gamma} \left(\varepsilon\left(\xi, \eta; y_0\right) A\left[u\right] - uA\left[\varepsilon\left(\xi, \eta; y_0\right)\right]\right) \xi^{2k} d\Gamma, \tag{2.12}$$

где $u \in C^1\left(\overline{D}\right)$ — четное по x решение уравнения (0.1).

Из интегральных представлений вытекают следующие свойства решений:

1^0. Существует четное по x решение уравнения (0.1) в области D, удовлетворяющее граничному условию
$$u\big|_{y=0} = 0. \tag{2.13}$$

Доказательство следует из интегрального представления (2.11) и предельных соотношений (1.9)–(1.12).

2^0. Существует решение уравнения (0.1) в области D_e, удовлетворяющее при $\rho \to \infty$ условию
$$u = O\left(\rho^{-2k}\right). \tag{2.14}$$

Доказательство этого свойства также следует из интегрального представления (2.11). Функция $u(x, y)$, определяемая интегралом (2.11), в области D_e является решением уравнения (0.1) и при $\rho \to \infty$ удовлетворяет условию (2.14).

3^0. Принцип максимума. С помощью интегральных представлений (2.11) и (2.12) установим следующий принцип максимума для решения уравнения (0.1).

Теорема 3.1. *Если функция $u\left(x, y\right) \neq 0$ класса $C_B^2\left(D\right) \cap C\left(\overline{D}\right)$ удовлетворяет уравнению* (0.1) *в D и граничному условию* (2.13), *то она достигает своих наибольшего положительного и наименьшего отрицательного значений на границе Γ.*

Доказательство. Пусть $u\left(x, y\right)$ имеет наибольшее положительное значение во внутренней точке M_0 области D, т. е. существует δ-окрестность $K_{M_0\delta}$ точки M_0, где $u(M) < u(M_0) = u_0$ при $M \neq M_0$ и $u(M) > 0$.

Полагая в формуле (2.11) $\Gamma = \partial K_{M_0\delta} = C_{M_0\delta}$, получаем
$$u_0 = \int\limits_{C_{M_0\delta}} \varepsilon\left(\xi, \eta; x_0, y_0\right) A\left[u\right] \xi^{2k} dC_{M_0\delta}$$
$$- \int\limits_{C_{M_0\delta}} uA\left[\varepsilon\left(\xi, \eta; x_0, y_0\right)\right] \xi^{2k} dC_{M_0\delta} == I'_\delta + I''_\delta. \tag{2.15}$$

На $C_{M_0\delta}$ $\varepsilon\left(\xi, \eta; x_0, y_0\right) > 0$, $A\left[u\right] < 0$, $u > 0$ и $A\left[\varepsilon\left(\xi, \eta; x_0, y_0\right)\right] < 0$, поэтому $I'_\delta < 0$, $I''_\delta > 0$. В силу вышесказанного при $\delta \to 0$ I'_δ возрастая стремится к нулю, а I''_δ возрастая стремится к u_0, следовательно, $I'_\delta < 0$ и $I''_\delta < u_0$.

Отсюда и из (2.15) следует, что

$$u_0 < I''_\delta < u_0.$$

Полученное бессмысленное неравенство доказывает, что функция $u(x,y)$ не может иметь положительного наибольшего значения в точке $M_0(x_0,y_0) \in D$.

С помощью интегрального представления (2.12) аналогично доказывается, что $u(x,y)$ не может достигать положительного наибольшего значения в точках $M_0(0,y_0) \in \overline{D}$, $y_0 > 0$.

Утверждение о положительном наибольшем значении доказано. Утверждение об отрицательном наименьшем значении доказывается переходом от u к $-u$. При этом отрицательное наименьшее значение переходит в положительное наибольшее значение.

То, что $u(x,y)$ не может достигать положительного наибольшего и отрицательного наименьшего значений в точках $M_0(x_0,0) \in \Gamma_0$, $x_0 > 0$, следует из условия (2.13).

3. Постановка краевых задач типа Дирихле и Неймана. Теоремы единственности.

Внутренняя задача типа Дирихле. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x,y) \in C\left(\overline{D}\right) \cap C_B^2(D), \tag{3.1}$$

$$L_B(u) = 0, \quad (x,y) \in D, \tag{3.2}$$

$$\lim_{y\to 0} u = 0, \tag{3.3}$$

$$u|_\Gamma = \varphi(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta) \in \Gamma. \tag{3.4}$$

Теорема 3.1. *Внутренняя задача типа Дирихле не может иметь более одного решения.*

Доказательство следует из теоремы о принципе максимума.

Внешняя задача типа Дирихле. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям

$$u(x,y) \in C\left(\overline{D}_e\right) \cap C_B^2(D_e), \tag{3.5}$$

$$L_B(u) = 0, \quad (x,y) \in D_e, \tag{3.6}$$

$$\lim_{y\to 0} u = 0, \tag{3.7}$$

$$u = o(1) \quad \text{при} \quad r \to \infty, \tag{3.8}$$

$$u|_\Gamma = \psi(\xi,\eta). \tag{3.9}$$

Теорема 3.2. *Внешняя задача типа Дирихле не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Обозначим через D_{eR} область, ограниченную кривой Γ, осями координат и окружностью C_R с центром в начале координат и радиуса R.

Пусть ω — разность двух предполагаемых решений u_1 и u_2 внешней задачи типа Дирихле. Она удовлетворяет условиям (3.5)–(3.8) и граничному условию

$$\omega|_\Gamma = 0. \tag{3.11$_0$}$$

Так как при $r \to \infty$ $\omega = o(1)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует R_0, что на $C_{R_0}^{++} = E_2^{++} \cap C_{R_0}$ $|\omega| < \varepsilon$.

В силу теоремы о принципе максимума в D_{eR_0} $|\omega| < \varepsilon$ и в силу произвольности ε для всех $R \geqslant R_0$ $\omega \equiv 0$. Отсюда следует, что $u_1 \equiv u_2$.

Внутренняя задача типа Неймана. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям

$$u(x,y) \in C_B^2(D) \cap C^1(D_1 \cup \Gamma), \tag{3.10}$$

$$L_B(u) = 0, \quad (x,y) \in D, \tag{3.11}$$

$$\lim_{y \to 0} u = 0, \tag{3.12}$$

$$A[u]|_{\Gamma} = f(\xi,\eta). \tag{3.13}$$

Теорема 3.3. *Внутренняя задача типа Неймана не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 — два предполагаемых решения внутренней задачи типа Неймана.

Тогда их разность $w = u_1 - u_2$ удовлетворяет условиям (3.10)–(3.12) и граничному условию

$$A[w]|_{\Gamma} = 0. \tag{3.13$_0$}$$

Полагая в первой формуле Грина $w = u = v$, с учетом граничного условия (3.13$_0$) получим

$$\iint\limits_D \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + y^{\alpha} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) x^{2k} dxdy = 0,$$

откуда $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$ и $w = \text{const}$. Отсюда и из предельного соотношения (3.12) следует, что $w \equiv 0$ и $u_1 \equiv u_2$.

Внешняя задача типа Неймана. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям

$$u(x,y) \in C^1(D_e \cup \Gamma) \cap C_B^2(D_e), \tag{3.14}$$

$$L_B(u) = 0, \quad (x,y) \in D_e, \tag{3.15}$$

$$\lim_{y \to 0} u = 0, \tag{3.16}$$

$$u = O\left(r^{-2k}\right), \quad A[u] = O\left(r^{-2k-1}\right) \text{ при } \quad r \to \infty, \tag{3.17}$$

$$A[u]|_{\Gamma} = g(\xi,\eta). \tag{3.18}$$

Теорема 3.4. *Внешняя задача типа Неймана не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 — два предполагаемых решения внешней задачи типа Неймана. Тогда их разность $w = u_1 - u_2$ удовлетворяет условиям (3.14)–(3.17) и граничному условию

$$A[w]|_{\Gamma} = 0. \tag{3.18$_0$}$$

Полагая в первой формуле Грина $w = u = v$, вместо D и Γ соответственно D_{eR} и $\Gamma \cup C_R^{++}$, с учетом граничного условия (3.18_0) получим

$$\iint\limits_{D_{eR}} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + y^\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) x^{2k} dxdy = \int\limits_{C_R^{++}} wA\left[w\right] x^{2k} dC_R^{++}.$$

Переходя здесь к пределу при $R \to \infty$, с учетом условий (3.17) получаем

$$\iint\limits_{D_e} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + y^\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) x^{2k} dxdy = 0,$$

откуда $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$ и $w = c = \text{const}$. В силу (3.16) $c = 0$ и, следовательно, $u_1 \equiv u_2$.

4. Потенциалы и их свойства

С помощью фундаментального решения $\varepsilon\left(x, y; x_0, y_0\right)$ образуем интегральные операторы

$$\nu\left(x, y\right) = \int\limits_{\Gamma} \mu\left(\xi, \eta\right) \varepsilon\left(\xi, \eta; x, y\right) \xi^{2k} d\Gamma,$$

$$w\left(x, y\right) = \int\limits_{\Gamma} \nu\left(\xi, \eta\right) A_p \left[\varepsilon\left(\xi, \eta; x, y\right)\right] \xi^{2k} d\Gamma,$$

где $A_p = \cos\left(n, \xi\right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta^\alpha \cos\left(n, \eta\right) \frac{\partial}{\partial \eta}$.

Интегральные операторы $v\left(x, y\right)$ и $w\left(x, y\right)$ представляют собой потенциалы типа простого и двойного слоев соответственно для уравнения (0.1).

Будем называть интегралом типа Гаусса потенциал типа двойного слоя, плотность которого тождественно равна единице, т. е. интеграл

$$w_0\left(x, y\right) = \int\limits_{\Gamma} A\left[\varepsilon\left(\xi, \eta; x, y\right)\right] \xi^{2k} d\Gamma. \tag{4.1}$$

Лемма (Геллерстедт). *Пусть Γ кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол.*

Тогда

$$w_0\left(x, y\right) = \begin{cases} -1, \text{ если } (\text{x,y}) \in D, \\ -1/2, \text{ если } (\text{x,y}) \in \Gamma, \\ 0, \text{ если } (\text{x,y}) \in D_e. \end{cases} \tag{4.2}$$

Доказательство. Пусть $(x, y) \in D$. Полагая в интегральном представлении (2.10) $u\left(x, y\right) = 1$ и $M_0\left(x_0, y_0\right) = M\left(x, y\right)$, получаем

$$w_0\left(x, y\right) = \int\limits_{\Gamma} A_p\left[\varepsilon\left(\xi, \eta; x, y\right)\right] \xi^{2k} d\Gamma = -1. \tag{4.3}$$

Пусть $M\left(x, y\right) \in D_e$. Тогда $\varepsilon\left(\xi, \eta; x, y\right)$ есть регулярное решение уравнения (0.1) внутри области D с непрерывными производными всех порядков вплоть до границы $\Gamma \cup \Gamma_1$ и в силу (2.6)

$$w_0\left(x, y\right) = \int\limits_{\Gamma} A_p\left[\varepsilon\left(\xi, \eta; x, y\right)\right] \xi^{2k} d\Gamma = 0. \tag{4.4}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $M(x,y)\in\Gamma$.

Пусть $K_{M\varepsilon}$ — круг с центром в точке M, радиуса ε, а $C_{M\varepsilon}$ — ее граница — окружность. Обозначим $\gamma_\varepsilon=\Gamma\cap K_{M\varepsilon}$, $\Gamma_\varepsilon=\Gamma\backslash\gamma_\varepsilon$, $C^+_{M\varepsilon}=D\cap C_{M\varepsilon}$, $C^-_{M\varepsilon}=C_{M\varepsilon}\backslash C^+_{M\varepsilon}$.

Тогда в силу равенств (4.3) и (4.4) имеем

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon\cup C^+_{M\varepsilon}} A_p\left[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\right]\xi^{2k}d\sigma = \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} A_p\left[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\right]\xi^{2k}d\Gamma - \int\limits_{C^+_{M\varepsilon}} A_p\left[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\right]\xi^{2k}dC^+_{M\varepsilon}=0,$$

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon\cup C^-_{M\varepsilon}} A_p\left[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\right]\xi^{2k}d\sigma = \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} A_p\left[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\right]\xi^{2k}d\Gamma + \int\limits_{C^-_{M\varepsilon}} A_p\left[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\right]\xi^{2k}dC^-_{M\varepsilon}=-1.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$2\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} A_p\left[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\right]\xi^{2k}d\Gamma + \int\limits_{C^-_{M\varepsilon}} A_p\left[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\right]\xi^{2k}dC^-_{M\varepsilon} - \int\limits_{C^+_{M\varepsilon}} A_p\left[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\right]\xi^{2k}dC^+_{M\varepsilon}=-1.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем

$$2\int\limits_{\Gamma} A_p\left[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\right]\xi^{2k}d\Gamma=-1.$$

Отсюда имеем, что

$$\omega_0(x,y)=\int\limits_{\Gamma} A_p\left[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\right]\xi^{2k}d\Gamma=-\frac{1}{2}.$$

Теорема 4.1. *Пусть Γ — кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол. Тогда если $\nu(\xi,\eta)\in C(\Gamma)$ и $\lim\limits_{\eta\to 0}\nu(\xi,\eta)=0$, то для потенциала типа двойного слоя справедливы предельные соотношения*

$$w_i(x_0,y_0)=-\frac{1}{2}\nu(x_0,y_0)+\overline{w(x_0,y_0)}, \tag{4.5}$$

$$w_e(x_0,y_0)=\frac{1}{2}\nu(x_0,y_0)+\overline{w(x_0,y_0)}, \tag{4.6}$$

где $w_i(x_0,y_0)$ и $w_e(x_0,y_0)$ означают предельные значения потенциала в точке $(x_0,y_0)\in\Gamma$ при $(x,y)\to(x_0,y_0)$ соответственно изнутри и извне Γ, а $\overline{w(x_0,y_0)}$ — прямое значение потенциала $w(x,y)$ в точке (x_0,y_0).

Доказательство. Потенциал типа двойного слоя запишем в виде

$$w(x,y) = w_1(x,y) + \nu(x_0,y_0)\, w_0(x,y)\,. \tag{4.7}$$

Здесь $w_0(x,y)$ — интеграл типа Гаусса, а

$$w_1(x,y) = \int\limits_{\Gamma} \left[\nu(\xi,\eta) - \nu(x_0,y_0)\right] A_p\left[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\right] \xi^{2k} d\Gamma,$$

$w_1(x,y)$ есть потенциал типа двойного слоя, плотность которого $\nu(\xi,\eta)-\nu(x_0,y_0)$ обращается в нуль при $(\xi,\eta)=(x_0,y_0)$. Аналогично доказательству, приведенному в [3] для обычного потенциала двойного слоя, доказывается непрерывность потенциала $w_1(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$. Это означает, что

$$w_{1i}(x_0,y_0) = w_{1e}(x_0,y_0) = \overline{w_1(x_0,y_0)}. \tag{4.8}$$

Формула (4.2) показывает, что предельные значения интеграла типа Гаусса $w_0(x,y)$ существуют и равны соответственно $w_{0i}(x,y) = -1$, $w_{0e}(x,y) = 0$, а прямое значение $\overline{w_0(x_0,y_0)} = -\frac{1}{2}$. Отсюда и из формул (4.7) и (4.8) следует, что предельные значения $w_i(x_0,y_0)$ и $w_e(x_0,y_0)$ существуют, причем

$$w_i(x_0,y_0) = \overline{w_1(x_0,y_0)} + \nu(x_0,y_0)\,, w_{0i}(x_0,y_0) = \overline{w_1(x_0,y_0)} - \nu(x_0,y_0)\,,$$

$$w_e(x,y) = \overline{w_1(x_0,y_0)} + \nu(x_0,y_0)\,, w_{0e}(x_0,y_0) = \overline{w_1(x_0,y_0)}, \tag{4.9}$$

здесь

$$w_1(x_0,y_0) = \int\limits_{\Gamma} \left[\upsilon(\xi,\eta) - \upsilon(x_0,y_0)\right] A_p\left[\varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0)\right] \xi^{2k} d\Gamma = \overline{w(x_0,y_0)} + \frac{1}{2}\upsilon(x_0,y_0)\,.$$

Отсюда и из соотношений (4.9) следует требуемое.

В силу представления (1.8) фундаментальное решение уравнения (0.1) имеет логарифмическую особенность. Поэтому, как и в случае логарифмического потенциала, имеют место также следующие теоремы.

Теорема 4.2. *Пусть Γ — кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол. Тогда если плотность $\mu(\xi,\eta) \in C(\Gamma)$ и $\lim\limits_{\eta\to 0}\mu(\xi,\eta) = 0$, то потенциал типа простого слоя $v(x,y)$ непрерывен в E_2^{++}.*

Теорема 4.3. *Пусть Γ — кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол. Тогда если плотность $\mu(\xi,\eta) \in C(\Gamma)$ и $\lim\limits_{\eta\to 0}\mu(\xi,\eta) = 0$, то предельные значения конормальной производной потенциала типа простого слоя выражаются формулами*

$$A_{M_0}\left[v(x_0,y_0)\right]_i = \frac{1}{2}\mu(x_0,y_0) + \overline{A_{M_0}\left[v(x_0,y_0)\right]}, \tag{4.10}$$

$$A_{M_0}\left[v(x_0,y_0)\right]_e = -\frac{1}{2}\mu(x_0,y_0) + \overline{A_{M_0}\left[v(x_0,y_0)\right]}, \tag{4.11}$$

где $A_{M_0}\left[v(x_0,y_0)\right]_i$ и $A_{M_0}\left[v(x_0,y_0)\right]_e$ означают предельные значения конормальной производной потенциала типа простого слоя в точке $M_0(x_0,y_0) \in \Gamma$ при $(x,y) \to (x_0,y_0)$ соответственно изнутри и извне Γ, а $\overline{A_{M_0}\left[v(x_0,y_0)\right]}$ — прямое значение конормальной производной потенциала типа простого слоя.

5. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям

Решение внутренней задачи типа Дирихле ищем в виде потенциала типа двойного слоя
$$u\left(x,y\right)=w\left(x,y\right). \tag{5.1}$$

Очевидно, что функция (5.1) удовлетворяет условиям (3.1)–(3.3) внутренней задачи типа Дирихле. Неизвестную плотность $\upsilon\left(\xi,\eta\right)$ находим из требования, чтобы функция (5.1) удовлетворяла граничному условию (3.4). Подставив ее в это граничное условие, с учетом формулы скачка (4.5) получим

$$-\frac{1}{2}\nu\left(x,y\right)+\overline{w\left(x,y\right)}=\varphi\left(x,y\right),\quad \left(x,y\right)\in\Gamma,$$

или
$$\nu\left(x,y\right)-2\int\limits_{\Gamma}\nu\left(\xi,\eta\right)A_p\left[\varepsilon\left(\xi,\eta;x,y\right)\right]\xi^{2k}d\Gamma=-2\varphi\left(x,y\right). \tag{5.2}$$

Решение внешней задачи типа Дирихле также ищем в виде потенциала типа двойного слоя
$$u\left(x,y\right)=w\left(x,y\right). \tag{5.3}$$

Легко можно проверить что функция (5.3) удовлетворяет условиям (3.5)–(3.8) внешней задачи типа Дирихле. Неизвестную плотность $\upsilon\left(\xi,\eta\right)$ находим из требования, чтобы функция (5.3) удовлетворяла граничному условию (3.5). Подставив ее в это граничное условие, с учетом формулы скачка (4.6) получим

$$\frac{1}{2}\nu\left(x,y\right)+\int\limits_{\Gamma}\nu\left(\xi,\eta\right)A_p\left[\varepsilon\left(\xi,\eta;x,y\right)\right]\xi^{2k}d\Gamma=\psi\left(x,y\right)$$

или
$$\nu\left(x,y\right)+2\int\limits_{\Gamma}\nu\left(\xi,\eta\right)A_p\left[\varepsilon\left(\xi,\eta;x,y\right)\right]\xi^{2k}d\Gamma=2\psi\left(x,y\right). \tag{5.4}$$

Решение внутренней задачи типа Неймана ищем в виде потенциала типа простого слоя
$$u\left(x,y\right)=v\left(x,y\right). \tag{5.5}$$

Эта функция удовлетворяет условиям (3.10)–(3.12) внутренней задачи типа Неймана.

Подставляя ее в граничное условие (3.13), получаем интегральное уравнение относительно неизвестной плотности $\mu\left(\xi,\eta\right)$:

$$\mu\left(x,y\right)+2\int\limits_{\Gamma}\mu\left(\xi,\eta\right)A_M\left[\varepsilon\left(\xi,\eta;x,y\right)\right]\xi^{2k}d\Gamma=2f\left(x,y\right) \tag{5.6}$$

Решение внешней задачи типа Неймана также ищем в виде потенциала типа простого слоя
$$u\left(x,y\right)=v\left(x,y\right), \tag{5.7}$$

Функция (5.7) удовлетворяет условиям (3.14)–(3.17) внешней задачи типа Неймана. Подставляя ее в граничное условие (3.18), получаем

$$\mu\left(x,y\right)-2\int\limits_{\Gamma}\mu\left(\xi,\eta\right)A_M\left[\varepsilon\left(\xi,\eta;x,y\right)\right]\xi^{2k}d\Gamma=-2g\left(x,y\right). \tag{5.8}$$

Отметим следующие свойства интегральных уравнений (5.2), (5.4), (5.6) и (5.8):

1. Формула (1.8) показывает, что эти уравнения являются интегральными уравнениями со слабой особенностью.

2. Ядра $A_P\left[\varepsilon\left(\xi,\eta;x,y\right)\right]$ и $A_M\left[\varepsilon\left(\xi,\eta;x,y\right)\right]$ получаются одно из другого перестановкой точек $P\left(\xi,\eta\right)$ и $M\left(x,y\right)$. Так как эти ядра вещественные, то они сопряженные. Отсюда следует, что уравнения (5.2) и (5.8), (5.4) и (5.6) — попарно сопряженные.

6. Исследование интегральных уравнений

Докажем, что интегральные уравнения (5.2) и (5.8), соответствующие внутренней задаче типа Дирихле и внешней задаче типа Неймана, разрешимы единственным образом при любых непрерывных функциях $\varphi\left(x,y\right)$ и $g\left(x,y\right)$.

С этой целью рассмотрим однородное интегральное уравнение внешней задачи типа Неймана

$$\mu\left(x,y\right)-2\int\limits_{\Gamma}\mu\left(\xi,\eta\right)A_M\left[\varepsilon\left(\xi,\eta;x,y\right)\right]\xi^{2k}d\Gamma=0. \tag{6.1}$$

Пусть $\mu_0\left(x,y\right)$ — ненулевое решение этого уравнения. Тогда функция

$$u_0\left(x,y\right)=\int\limits_{\Gamma}\mu_0\left(\xi,\eta\right)\varepsilon\left(\xi,\eta;x,y\right)\xi^{2k}d\Gamma$$

удовлетворяет условиям (3.14)–(3.17) и граничному условию

$$A\left[u_0\right]|_{\Gamma}=0,$$

или

$$A_M\left[u_0\right]_e=-\frac{1}{2}\mu_0\left(x,y\right)+\int\limits_{\Gamma}\mu_0\left(\xi,\eta\right)A_M\left[\varepsilon\left(\xi,\eta;x,y\right)\right]\xi^{2k}d\Gamma=0. \tag{6.2}$$

В силу теоремы единственности внешней задачи типа Неймана

$$u_0\left(x,y\right)=0,\quad (x,y)\in D_e.$$

Так как потенциал типа простого слоя есть непрерывная функция в E_2^{++}, то

$$u_0|_{\Gamma}=0.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$u_0\left(x,y\right)=\int\limits_{\Gamma}\mu_0\left(\xi,\eta\right)\varepsilon\left(\xi,\eta;x,y\right)\xi^{2k}d\Gamma$$

в области D. Она в этой области D удовлетворяет условиям (3.1)–(3.3) и граничному условию

$$u_0|_{\Gamma}=0.$$

В силу теоремы единственности внутренней задачи типа Дирихле

$$u_0\left(x,y\right)\equiv 0,\quad (x,y)\in\overline{D}.$$

Тогда

$$A_M\left[u_0\right]_i = \frac{1}{2}\mu_0\left(x,y\right) + \int\limits_{\Gamma}\mu_0\left(\xi,\eta\right)A_M\left[\varepsilon\left(\xi,\eta;x,y\right)\right]\xi^{2k}d\Gamma = 0. \tag{6.3}$$

Вычитая из равенства (6.3) равенство (6.2), получаем $\mu_0\left(x,y\right) = 0$.

Таким образом, однородное интегральное уравнение (6.1) имеет только тривиальное решение. В силу альтернативы Фредгольма интегральное уравнение внешней задачи типа Неймана однозначно разрешимо для любой непрерывной функции $g\left(x,y\right)$. Таким образом, значение параметра $\lambda = 2$ правильное для ядра $A_M\left[\varepsilon\left(\xi,\eta;x,y\right)\right]$. По известной теореме Фредгольма оно является правильным и для сопряженного ядра $A_P\left[\varepsilon\left(\xi,\eta;x,y\right)\right]$.

Отсюда следует, что интегральное уравнение (5.2) внутренней задачи типа Дирихле однозначно разрешимо для непрерывной функции $\varphi\left(x,y\right)$.

Из разрешимости интегральных уравнений внутренней задачи типа Дирихле и внешней задачи типа Неймана следует, что разрешимы и сами задачи. Это приводит к следующим теоремам.

Теорема 6.1. *Если Γ — кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол, то для этой кривой при $g\left(x,y\right) \in C\left(\overline{\Gamma}\right)$ разрешима внешняя задача типа Неймана и ее решение может быть представлено в виде потенциала типа простого слоя.*

Теорема 6.2. *Если Γ — кривая Ляпунова и образует с координатными осями прямой угол, то для этой кривой при $\varphi\left(x,y\right) \in C\left(\overline{\Gamma}\right)$ разрешима внутренняя задача типа Дирихле и это решение может быть представлено в виде потенциала типа двойного слоя.*

Рассмотрим теперь интегральные уравнения (5.4) и (5.6).

Значение параметра $\lambda = -2$, входящее в интегральные уравнения (5.4) и (5.6) — характеристическое для каждого из ядер $A_M\left[\varepsilon\right]$, $A_P\left[\varepsilon\right]$. Действительно, второе равенство из (4.2) показывает, что однородное интегральное уравнение внешней задачи типа Дирихле

$$\nu\left(x,y\right) + 2\int\limits_{\Gamma}\nu\left(\xi,\eta\right)A_P\left[\varepsilon\left(\xi,\eta;x,y\right)\right]\xi^{2k}d\Gamma = 0 \tag{6.4}$$

имеет нетривиальное решение $\nu\left(x,y\right) = \frac{1}{2}$, а это означает, что число $\lambda = -2$ характеристическое для ядра $A_P\left[\varepsilon\right]$. На основании известной теоремы Фредгольма, это число будет характеристическим и для сопряженного ядра $A_M\left[\varepsilon\right]$. В таком случае однородное интегральное уравнение внутренней задачи типа Неймана

$$\mu\left(x,y\right) + 2\int\limits_{\Gamma}\mu\left(\xi,\eta\right)A_M\left[\varepsilon\left(\xi,\eta;x,y\right)\right]\xi^{2k}d\Gamma = 0 \tag{6.5}$$

имеет по крайней мере одно нетривиальное решение. Обозначим это решение через $\mu_0\left(x,y\right)$.

Докажем, что уравнения (6.4) и (6.5) не имеют решений, линейно независимых с указанными выше $\nu_0\left(x,y\right)$ и $\mu_0\left(x,y\right)$. В силу теоремы Фредгольма достаточно показать, что этим свойством обладает уравнение (6.5).

Допустим, что уравнение (6.5) имеет еще одно решение $\mu_1\left(x,y\right)$. Докажем, что решения $\mu_0\left(x,y\right)$ и $\mu_1\left(x,y\right)$ линейно зависимы. Положим

$$\mu_{01}\left(x,y\right) = \mu_1\left(x,y\right) - c\mu_0\left(x,y\right), \tag{6.6}$$

где $c \neq 0$ — некоторая постоянная.

Построим потенциал типа простого слоя.

$$u_{01}(x,y) = \int\limits_{\Gamma} \mu_{01}(\xi,\eta)\,\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\,\xi^{2k} d\Gamma. \tag{6.7}$$

ясно, что функция (6.7) удовлетворяет условиям (3.10)–(3.12) и граничному условию

$$A\left[u_{01}\right]\big|_{\Gamma} = 0,$$

или

$$A_M\left[u_{01}\right]_i = \frac{1}{2}\mu_{01}(x,y) + \int\limits_{\Gamma} \mu_{01}(\xi,\eta)\,A_M\left[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\right]\xi^{2k} d\Gamma = 0. \tag{6.8}$$

В силу теоремы единственности решения внутренней задачи типа Неймана

$$u_{01}(x,y) = 0$$

в области D. В силу непрерывности потенциала простого слоя в E_2^{++}

$$u_{01}\big|_{\Gamma} = 0. \tag{6.9}$$

Рассмотрим функцию (6.7) в области D_e. Эта функция удовлетворяет условиям (3.5)–(3.8) и граничному условию (6.9). В силу теоремы единственности внешней задачи типа Дирихле

$$u_{01}(x,y) = 0$$

в области D_e. Тогда

$$A_M\left[u_{01}\right]_e = -\frac{1}{2}\mu_{01}(x,y) + \int\limits_{\Gamma} \mu_{01}(\xi,\eta)\,A_M\left[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\right]\xi^{2k} d\Gamma = 0. \tag{6.10}$$

Вычитая из равенства (6.8) равенство (6.10), получим

$$\mu_{01}(x,y) = 0.$$

Отсюда и из (6.6) следует, что

$$\mu_1(x,y) = c\mu_0(x,y).$$

Таким образом, любое решение уравнения (6.5) только постоянным множителем отличается от $\mu_0(x,y)$.

Рассмотрим неоднородное интегральное уравнение (5.6) внутренней задачи типа Неймана. В силу теоремы Фредгольма, это уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда функция $f(x,y)$ ортогональна ко всем решениям сопряженного однородного уравнения (6.4). Это уравнение имеет только одно линейно независимое решение $\nu_0(x,y) = \frac{1}{2}$.

Поэтому для разрешимости уравнения необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{\Gamma} f(\xi,\eta)\,\xi^{2k} d\Gamma = 0. \tag{6.11}$$

Если уравнение (5.6) разрешимо, то разрешима и внутренняя задача типа Неймана.

Таким образом, справедлива следующая теорема:

Теорема 6.3. *Если* Γ *кривая Ляпунова, образует с координатными осями прямой угол, функция* $f(x,y) \in C(\Gamma)$ *и удовлетворяет условию* (6.11), *то разрешима внутренняя задача типа Неймана и решение может быть представлено в виде потенциала типа простого слоя.*

Рассмотрим теперь интегральное уравнение (5.4) внешней задачи типа Дирихле. Для разрешимости интегрального уравнения (5.4) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{\Gamma} \mu_0(\xi,\eta)\,\psi(\xi,\eta)\,\xi^{2k} d\Gamma = 0. \tag{6.12}$$

Если условие (6.12) выполнено, то интегральное уравнение (5.4) разрешимо. В этом случае существует решение внешней задачи типа Дирихле, представимое в виде потенциала типа двойного слоя.

Если условие (6.12) не выполнено, то не существует решение уравнения (5.4). Это не означает, что в данном случае внешняя задача типа Дирихле не разрешима. Можно только утверждать, что решение внешней задачи типа Дирихле не может быть представлено в виде потенциала типа двойного слоя.

7. Решение внешней задачи типа Дирихле

Пусть начало координат находится на части Γ_0 границы области D. Функция $\left(r^2\right)^{-\gamma}$, где $\gamma = k+\beta$, $r^2 = x^2 + \frac{4}{(2-\alpha)^2} y^{2-\alpha}$, является решением уравнения (0.1) в области D_e. Решение внешней задачи типа Дирихле будем искать в виде

$$u(x,y) = \int\limits_{\Gamma} \nu(\xi,\eta)\,A_P\left[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\right]\xi^{2k} d\Gamma + \frac{1}{r^{2\gamma}} \int\limits_{\Gamma} \nu(\xi,\eta)\,\xi^{2k} d\Gamma. \tag{7.1}$$

Функция (7.1) удовлетворяет условиям (3.5)–(3.8) внешней задачи типа Дирихле. Неизвестную плотность $\nu(\xi,\eta)$ найдем из требования, чтобы функция (7.1) удовлетворяла граничному условию (3.5). Подставляя ее в это граничное условие, с учетом формулы (4.6) получим

$$\nu(x,y) + 2\int\limits_{\Gamma} \nu(\xi,\eta) \left(A_P\left[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\right] + \frac{1}{r^{2\gamma}} \right) \xi^{2k} d\Gamma = 2\psi(x,y). \tag{7.2}$$

Рассмотрим однородное интегральное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению (7.2)

$$\nu(x,y) + 2\int\limits_{\Gamma} \nu(\xi,\eta) \left(A_P\left[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\right] + \frac{1}{r^{2\gamma}} \right) \xi^{2k} d\Gamma = 0. \tag{7.2$_0$}$$

Пусть $\nu_0(\xi,\eta)$ — ненулевое решение уравнения (7.2_0). Построим функцию

$$u_0(x,y) = \int\limits_{\Gamma} \nu_0(\xi,\eta)\,A_P\left[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\right]\xi^{2k} d\Gamma + \frac{1}{r^{2\gamma}} \int\limits_{\Gamma} \nu_0(\xi,\eta)\,\xi^{2k} d\Gamma. \tag{7.3}$$

Из уравнения (7.2_0) следует, что

$$u_0(x,y)\big|_{\Gamma} = 0.$$

По теореме единственности внешней задаче типа Дирихле

$$u_0(x,y) \equiv 0$$

в области D_e. Поэтому

$$0 \equiv \int\limits_{\Gamma} \nu_0(\xi,\eta) A_P [\varepsilon(\xi,\eta;x,y)] \xi^{2k} d\Gamma + \frac{1}{r^{2\gamma}} \int\limits_{\Gamma} \nu_0(\xi,\eta) \xi^{2k} d\Gamma. \tag{7.4}$$

Умножая это тождество на $r^{2\gamma}$ и устремляя r к бесконечности, получим

$$\int\limits_{\Gamma} \nu_0(\xi,\eta) \xi^{2k} d\Gamma = 0. \tag{7.5}$$

Таким образом, ненулевое решение уравнения (7.2_0) удовлетворяет соотношению (7.5). Тогда уравнение (7.2_0) при $\nu(x,y) = \nu_0(x,y)$ примет вид

$$\nu_0(x,y) + 2\int\limits_{\Gamma} \nu_0(\xi,\eta) A_P [\varepsilon(\xi,\eta;x,y)] \xi^{2k} d\Gamma = 0.$$

Это уравнение совпадает с уравнением (6.4).

Было доказано, что уравнение (6.4) имеет только одно линейно независимое решение $\nu_0(x,y) = \frac{1}{2}$.

В таком случае его общее решение есть $\nu_0(x,y) = C$, где С — произвольная постоянная. Подставив его в (7.5), получаем

$$C \int\limits_{\Gamma} \xi^{2k} d\Gamma = 0,$$

или $C = 0$. Отсюда следует, что $\nu_0(x,y) \equiv 0$ и, следовательно, уравнение (7.2_0) имеет только тривиальное решение. В силу альтернативы Фредгольма, неоднородное интегральное уравнение (7.2) разрешимо при любой непрерывной функции $\psi(x,y)$. Вместе с ним разрешима внешняя задача типа Дирихле. Таким образом, справедлива следующая теорема:

Теорема 7.1. *Если* Γ *кривая Ляпунова, образует с координатными осями прямой угол, и* $\psi(x,y) \in C(\Gamma)$, *то разрешима внешняя задача типа Дирихле и это решение может быть представлено в виде* (7.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 3, ч. 2. М., 1957.
2. *Weinstein Ф.* Duscontinuous integrals and generalized potential theory // Trans. Am. Math. Soc. 1948. V. 63.
3. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. М., 1977.

Мухлисов Фоат Габдуллович
Россия, Казань,
Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет

Хисматуллин Айрат Шамилевич
Россия, Казань,
Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет
airatka@list.net