УДК 517.95

# О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

**Т. Ш. Кальменов, Б. Д. Кошанов**

В данной работе строится в явной форме функция Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в многомерном шаре, которые широко используется в задачах теории упругости.

В теории упругости важное место занимает явное представление решение задачи Дирихле для бигармонического уравнения. Рассмотрим следующую задачу: найти в области $\Omega_\delta = \{x : \|x - x_0\| < \delta\} \subset R^n$ функцию $u(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta_x^2 u(x) = f(x) \tag{1}$$

и краевым условиям

$$u|_{\partial\Omega_\delta} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial n_x} u\Big|_{\partial\Omega_\delta} = 0, \tag{3}$$

где $\partial\Omega_\delta = S_\delta = \{x : \ \|x\| = \delta\}$.

Фундаментальное решение уравнения (1) имеет вид [1]

$$\varepsilon_{n,2}(x,y) = \frac{1}{(4-n)4(2-n)} \cdot \frac{1}{(2\pi)^n} |x-y|^{4-n}.$$

За первое приближение функции Грина берем функцию

$$\varepsilon_{n,2}^1(x,y) = \frac{1}{(4-n)4(2-n)} \cdot \frac{1}{(2\pi)^n} \left[ |x-y|^{4-n} - \left| x - \frac{y}{|y|^2}\delta^2 \right|^{4-n} \left| \frac{y}{\delta} \right|^{4-n} \right], \tag{4}$$

которая, очевидно, удовлетворяет тождеству

$$\Delta_x^2 \varepsilon_{n,2}^1(x,y) = \delta(x-y).$$

Так как выполняется тождество [2]

$$\left| x - \frac{y}{|y|^2}\delta^2 \right|^{4-n} \left| \frac{y}{\delta} \right|^{4-n} = \left| y - \frac{x}{|x|^2}\delta^2 \right|^{4-n} \left| \frac{x}{\delta} \right|^{4-n}$$

при любых $x, y \in \Omega_\delta$, то функцию (4) можно переписать в виде

$$\varepsilon_{n,2}^1(x,y) = \frac{1}{(4-n)4(2-n)} \cdot \frac{1}{(2\pi)^n} \left[ |x-y|^{4-n} - \left| y - \frac{x}{|x|^2}\delta^2 \right|^{4-n} \left| \frac{x}{\delta} \right|^{4-n} \right]. \tag{5}$$

Поэтому функция $\varepsilon_{n,2}^1(x,y)$ является симметричной, т. е.

$$\varepsilon_{n,2}^1(x,y) = \varepsilon_{n,2}^1(y,x).$$

Также из формулы (6) следует, что

$$\varepsilon^1_{n,2}(x,y)\big|_{|x|=\delta} = 0.$$

Второе приближение функции Грина $\varepsilon^2_{n,2}(x,y)$ ищем в следующем виде

$$\varepsilon^2_{n,2}(x,y) = \varepsilon^1_{n,2}(x,y) - g_2(x,y),$$

где

$$\Delta^2_x g_2(x,y) = 0,$$
$$g_2(x,y)|_{|x|=\delta} = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial n_x} g_2\Big|_{|x|=\delta} = \frac{\partial}{\partial n_x}\varepsilon^1_{n,2}\Big|_{|x|=\delta}.$$

Поскольку $\frac{\partial}{\partial n_x} = \sum_{i=1}^n n_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\delta}\frac{\partial}{\partial x_i}$, то из формулы (4) получаем

$$\frac{\partial}{\partial n_x}\varepsilon^1_{n,2} = \frac{1}{4(2-n)}\cdot\frac{1}{\omega_n}\cdot\frac{1}{\delta}\Big|\frac{y}{\delta}\Big|^{2-n}\Big|x - \frac{y}{|y|^2}\delta^2\Big|^{2-n}|x|^2\Big[1 - \Big|\frac{y}{\delta}\Big|^2\Big].$$

Подставляя краевые условия, имеем

$$\frac{\partial}{\partial n_x}\varepsilon^1_{n,2}\Big|_{|x|=\delta} = \frac{1}{4(2-n)}\cdot\frac{1}{\omega_n}\cdot\delta\Big|\frac{y}{\delta}\Big|^{2-n}\Big|x - \frac{y}{|y|^2}\delta^2\Big|^{2-n}\Big|_{|x|=\delta}\cdot\Big[1 - \Big|\frac{y}{\delta}\Big|^2\Big].$$

Поэтому в качестве искомой функции $g_2(x,y)$ можно взять функцию

$$g_2(x,y) = -\frac{1}{4(2-n)}\cdot\frac{1}{\omega_n}\delta^2\cdot\Big|\frac{y}{\delta}\Big|^{2-n}\cdot\Big|x - \frac{y}{|y|^2}\delta^2\Big|^{2-n}\cdot\frac{1-|\frac{y}{\delta}|^2}{2}\cdot\Big(1 - \Big|\frac{x}{\delta}\Big|^2\Big).$$

Отсюда $g_2(x,y)|_{|x|=\delta} = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial n_x} g_2\Big|_{|x|=\delta} = \frac{1}{4(2-n)}\cdot\frac{1}{\omega_n}\delta\Big|\frac{y}{\delta}\Big|^{2-n}\Big|x - \frac{y}{|y|^2}\delta^2\Big|^{2-n}\Big|_{|x|=\delta}\cdot\Big[1 - \Big|\frac{y}{\delta}\Big|^2\Big]$$
$$= \frac{\partial}{\partial n_x}\varepsilon^1_{n,2}\Big|_{|x|=\delta}.$$

Теперь проверим, что $\Delta^2_x g_2(x,y) = 0$. Действительно,

$$\Delta_x g_2(x,y) = -\frac{1}{4(2-n)}\cdot\frac{1}{\omega_n}\cdot\frac{\delta}{2}\Big(1-\Big|\frac{y}{\delta}\Big|^2\Big)\cdot\Big|\frac{y}{\delta}\Big|^{2-n}\cdot\Delta_x\Big[\Big(1 - \Big|\frac{x}{\delta}\Big|^2\Big)\Big|x - \frac{y}{|y|^2}\delta^2\Big|^{2-n}\Big]$$
$$= -\frac{1}{4(2-n)}\cdot\frac{1}{\omega_n}\cdot\frac{\delta}{2}\Big(1 - \Big|\frac{y}{\delta}\Big|^2\Big)\cdot\Big|\frac{y}{\delta}\Big|^{2-n}\cdot\Delta_x\Big[\Big|x - \frac{y}{|y|^2}\delta^2\Big|^{2-n}\Big]$$
$$- \frac{1}{4(2-n)}\cdot\frac{1}{\omega_n}\cdot\frac{\delta}{2}\Big(1 - \Big|\frac{y}{\delta}\Big|^2\Big)\cdot\Big|\frac{y}{\delta}\Big|^{2-n}\cdot\Delta_x\Big[-\Big|\frac{x}{\delta}\Big|^2\Big|x - \frac{y}{|y|^2}\delta^2\Big|^{2-n}\Big].$$

Легко проверить, что

$$\Delta_x\Big|x - \frac{y}{|y|^2}\delta^2\Big|^{2-n} \equiv 0, \quad \Delta_x|x|^2 = 2n.$$

Поэтому

$$\Delta_x\left[|x|^2\cdot\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2-n}\right]=2n\cdot\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2-n}$$
$$+4\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2-n}|x|^2\Delta_x\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2-n}.$$

Непосредственными вычислениями убеждаемся, что

$$\Delta_x^2\left[|x|^2\cdot\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2-n}\right]=4\sum_{i=1}^{n}2\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2-n}\right]$$
$$+4\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Delta_x\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2-n}\right)=8n\Delta_x\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2-n}=0.$$

Таким образом, доказана следующая теорема

**Теорема.** *Функция Грина задачи Дирихле* (1)–(3) *представима в виде*

$$G_{n,2}(x,y)=\frac{1}{(4-n)4(2-n)}\cdot\frac{1}{(2\pi)^n}\left[|x-y|^{4-n}-\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{4-n}\left|\frac{y}{\delta}\right|^{4-n}\right]$$
$$+\frac{1}{2\cdot 4\cdot(2-n)}\cdot\frac{1}{\omega_n}\cdot\delta^2\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)\left(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\right)\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2-n}\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2-n},$$

*и решение уравнения* (1)–(3) *задается формулой*

$$u(x)=\int_{\Omega_\delta}G_{n,2}(x,y)f(y)dy.$$

## ЛИТЕРАТУРА


**1.** *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.

**2.** *Бицадзе А. В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1985.



*Кальменов Тынысбек Шарипович*
*Казахстан, Алматы, Центр физико-математических исследований МОН РК*
`t.kalmenov@cpmr.scinet.kz`

*Кошанов Бакытбек Данебекович*
*Казахстан, Алматы, Центр физико-математических исследований МОН РК*
`b.koshanov@cpmr.scinet.kz`