УДК 517.95

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕИЗВЕСТНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. И. Кожанов

Работа посвящена исследованию разрешимости обратной задачи нахождения решения $u(x,t)$ и коэффициента $q(x,t)$ специального вида в уравнении $u_t-\Delta u+\lambda u+q(x,t)u=f(x,t)$. Доказываются теоремы существования и единственности регулярного решения.

Пусть $x=(x_1,\dots,x_n)$ есть точка ограниченной области D пространства R^n, Γ есть граница области D, t есть точка конечного интервала $(0,T)$, Q есть цилиндр $D\times(0,T)$, S есть его боковая граница ($S=\Gamma\times(0,T)$). Будем предполагать для простоты, что граница Γ бесконечно дифференцируема (хотя вполне достаточно, чтобы Γ была многообразием некоторой конечной гладкости). Далее, пусть λ есть заданное положительное число, $h_1(x,t)$, $h_2(x,t)$ и $f(x,t)$ — заданные функции, определенные при $x\in\overline{D}$, $t\in[0,T]$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — заданные функции, определенные при $x\in\overline{D}$, $\mu(x,t)$ — заданная функция, определенная при $x\in\Gamma$, $t\in[0,T]$.

Обратная задача. Найти функции $u(x,t)$, $q_1(x)$ и $q_2(x)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$u_t-\Delta u+\lambda u+[q_1(x)h_1(x,t)+q_2(x)h_2(x,t)]u=f(x,t), \tag{1}$$

при выполнении для функций $u(x,t)$ условий

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in D, \tag{2}$$

$$u(x,t)|_S=\mu(x,t), \tag{3}$$

$$u(x,t_1)=u_1(x),\quad u(x,t_2)=u_2(x),\quad 0<t_1<t_2\le T,\quad x\in D. \tag{4}$$

В рассматриваемой обратной задаче условия (2) и (3) суть условия обычной первой начально-краевой задачи для параболического уравнения, условия же (4) есть условия переопределения, необходимые для нахождения двух неизвестных функций $q_1(x)$ и $q_2(x)$. Условия (4) представляют собой информацию о состоянии среды (например, о температуре) в два различных ненулевых момента времени.

Заметим, что коэффициент $q(x,t)$ в уравнении (1) определяет характер потерь (стока или поглощения) среды. Обратные задачи с неизвестным коэффициентом q достаточно хорошо изучены в случае $q=q(x)$ или в случае $q=q(t)$. Настоящая работа более близка по своей направленности к первой ситуации, поэтому отметим из предшествующих работ как близкие по постановке работы [1–3], как близкую же по используемой технике — работу [3]. В то же время заметим, что нелинейные обратные задачи для параболических уравнений с неизвестным коэффициентом $q(x,t)$ указанного выше составного вида ранее не изучались (отметим лишь, что в работе [4] автором изучалась линейная обратная задача для

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта 03–01–00819

параболического уравнения с неизвестной правой частью, содержащей слагаемые $q_1(x)h_1(x,t)+q_2(x)h_2(x,t)$ с неизвестными функциями $q_1(x)$ и $q_2(x)$).

Перейдем к содержательной части работы.

Обозначим через H и V пространства

$$H = W_2^{2,1}(Q)\cap L_\infty(0,T;W_2^1(D)),\quad V = L_\infty(Q)\cap H$$

с нормами

$$\|v\| = \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)\cap L_\infty(0,T;W_2^1(D))},$$

$$\|v\|_V = \|v\|_H + \|v\|_{L_\infty(Q)}.$$

Далее, пусть V_1 есть пространство

$$V_1 = \{v(x,t):\quad v(x,t)\in V,\quad v_t(x,t)\in V\},$$

норму в этом пространстве определим равенством

$$\|v\|_{V_1} = \|v\|_V + \|v_t\|_V.$$

Нам понадобится вспомогательное утверждение о разрешимости и свойствах решений специальной нелокальной по времени краевой задачи для параболических уравнений.

Пусть $a(x,t)$ и $f(x,t)$ — заданные в цилиндре $\overline{Q}$ функции, $\beta_0(x)$, $\beta_1(x)$ и $\beta_2(x)$ — заданные на множестве $\overline{D}$ функции, $\varphi(x,t)$ — заданная при $x\in\Gamma$, $t\in[0,T]$ функция, $K(t)$ — заданная при $t\in[0,T]$ функция. Введем обозначения

$$\overline{\beta}_1 = \|\beta_1\|_{L_\infty(D)},\quad \overline{\beta}_2 = \|\beta_2\|_{L_\infty(D)}.$$

Краевая задача: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_t - \Delta u + a(x,t)u = f(x,t) \tag{5}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,t)|_S = \varphi(x,t), \tag{6}$$

$$u(x,0) = \beta_0(x)+\beta_1(x)u(x,t_1)+\beta_2(x)u(x,t_2),\quad 0<t_1<t_2\le T,\quad x\in D. \tag{7}$$

Утверждение. *Пусть выполняются включения $a(x,t)\in L_\infty(Q)$, $f(x,t)\in L_\infty(Q)$, $\beta_0(x)\in W_2^1(D)\cap L_\infty(D)$, $\beta_1(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)\cap L_\infty(D)$, $\beta_2(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)\cap L_\infty(D)$, $\varphi(x,t)\in L_\infty(S)$. Кроме того, пусть выполняются условия*

$$a(x,t)\ge a_0>0 \quad \textit{при} \quad (x,t)\in\overline{Q};$$

$$\overline{\beta}_1+\overline{\beta}_2<1;$$

$$\varphi(x,0)=\beta_0(x) \quad \textit{при} \quad x\in\Gamma;$$

краевая задача

$$U_t-\Delta U + a_0U = 0,$$

$$U(x,t)|_S=\varphi(x,t),\quad U(x,0)=\beta_0(x),\quad x\in D,$$

имеет решение $U(x,t)$, принадлежащее пространству V.

Тогда краевая задача (5)–(7) *имеет решение* $u(x,t)$, *принадлежащее пространству* V *и такое, что для него выполняются оценки*

$$\|u\|_{L_\infty(Q)} \le \frac{1}{1-\overline{\beta}_1-\overline{\beta}_2}\max\{\frac{1}{a_0}\|f\|_{L_\infty(Q)}, \|\beta_0\|_{L_\infty(D)}, \|\varphi\|_{L_\infty(S)}\}, \tag{8}$$

$$\|u\|_H \le M\left[\|f\|_{L_2(Q)} + \|U\|_H\right] \tag{9}$$

с постоянной M, *определяющейся лишь функциями* $a(x,t)$, $\beta_1(x)$ *и* $\beta_2(x)$, *а также областью* D.

Доказательство данного утверждения основано на аппроксимации задачи (5)–(7) семейством задач с гладкими коэффициентами (путем аппроксимации функций $a(x,t)$, $f(x,t)$, $\beta_0(x)$, $\beta_1(x)$, $\beta_2(x)$ и $U(x,t)$ последовательностями гладких функций), использованием для соответствующих гладких задач классических оценок решений параболических уравнений и последующим предельным переходом. Указанная процедура реализована в работе [3] в случае $\beta_2(x)\equiv 0$; если же $\beta_2(x)$ не тождественно нулевая функция, то все рассуждения и построения вполне аналогичны рассуждениям и построениям [3] (см. также [5]).

Вернемся к изучаемым обратным задачам.

Определим необходимые для исследования разрешимости изучаемой обратной задачи функции и постоянные (эти функции и постоянные понадобятся для компактного изложения дальнейших формулировок и выкладок).

Пусть λ_0, $\overline{a}_0$ и m_0 — фиксированные положительные числа (их роль будет определена ниже). Далее, положим

$$h_0(x) = [h_1(x,t_1)h_2(x,t_2) - h_1(x,t_2)h_2(x,t_1)]u_1(x)u_2(x),$$

$$A_0(x) = \frac{1}{h_0(x)}\{[f(x,t_1) + \Delta u_1(x) - \lambda u_1(x)]h_2(x,t_2)u_2(x) \\ - [f(x,t_2) + \Delta u_2(x) - \lambda u_2(x)]h_2(x,t_1)u_1(x)\},$$

$$A_1(x) = -\frac{h_2(x,t_2)u_2(x)}{h_0(x)}, \quad A_2(x) = \frac{h_2(x,t_1)u_1(x)}{h_0(x)},$$

$$B_0(x) = \frac{1}{h_0(x)}\{[f(x,t_2) + \Delta u_2(x) - \lambda u_2(x)]h_1(x,t_1)u_1(x) \\ - [f(x,t_1) + \Delta u_1(x) - \lambda u_1(x)]h_1(x,t_2)u_2(x)\},$$

$$B_1(x) = \frac{h_1(x,t_2)u_2(x)}{h_0(x)}, \quad B_2(x) = -\frac{h_1(x,t_1)u_1(x)}{h_0(x)},$$

$$a_0(x,t) = A_0(x)h_1(x,t) + B_0(x)h_2(x,t),$$

$$a_1(x,t) = A_1(x)h_1(x,t) + B_1(x)h_2(x,t),$$

$$a_2(x,t) = A_2(x)h_1(x,t) + B_2(x)h_2(x,t),$$

$$b_0(x,t) = a_{0t}(x,t), \quad b_1(x,t) = a_{1t}(x,t), \quad b_2(x,t) = a_{2t}(x,t),$$

$$\varphi_0(x) = f(x,0) + \Delta u_0(x) - \lambda u_0(x) - [h_1(x,0)A_0(x) + h_2(x,0)B_0(x)]u_0(x),$$

$$\varphi_1(x) = -[h_1(x,0)A_1(x) + h_2(x,0)B_1(x,0)]u_0(x),$$

$$\varphi_2(x) = -[h_1(x,0)A_2(x) + h_2(x,0)B_2(x,0)]u_0(x),$$

$$\overline{a}_1 = \|a_1\|_{L_\infty(Q)}, \quad \overline{a}_2 = \|a_2\|_{L_\infty(Q)}, \quad \overline{b}_0 = \|b_0\|_{L_\infty(Q)},$$
$$\overline{b}_1 = \|b_1\|_{L_\infty(Q)}, \quad \overline{b}_2 = \|b_2\|_{L_\infty(Q)},$$
$$\overline{\varphi}_1 = \|\varphi_1\|_{L_\infty(D)}, \quad \overline{\varphi}_2 = \|\varphi_2\|_{L_\infty(D)},$$

$$K_1 = \frac{1}{1-\overline{\varphi}_1-\overline{\varphi}_2}\max\Big\{\frac{1}{\lambda_0}\|f_t\|_{L_\infty(Q)}, \|\varphi_0\|_{L_\infty(D)}, \|\mu_t\|_{L_\infty(S)}\Big\} + \frac{\overline{b}_0 + (\overline{b}_1+\overline{b}_2)m_0}{\lambda_0(1-\overline{\varphi}_1-\overline{\varphi}_2)}\|u_0\|_{L_\infty(\Omega)},$$

$$K_2 = \frac{[\overline{b}_0 + (\overline{b}_1+\overline{b}_2)m_0]T}{\lambda_0(1-\overline{\varphi}_1-\overline{\varphi}_2)},$$
$$N_0 = \frac{K_1}{1-K_2}.$$

Теорема 1. *Пусть функции* $h_1(x,t)$, $h_2(x,t)$, $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$ *и* $\mu(x,t)$ *таковы, что выполняются включения* $f(x,t) \in L_\infty(Q)$, $f_t(x,t) \in L_\infty(Q)$, $f(x,0) \in W_2^1(D)\cap L_\infty(D)$, $f(x,t_1) \in W_2^1(D)\cap L_\infty(D)$, $f(x,t_2) \in W_2^1(D)\cap L_\infty(D)$, $h_1(x,t) \in L_\infty(Q)$, $h_{1t}(x,t) \in L_\infty(Q)$, $h_2(x,t) \in L_\infty(Q)$, $h_{2t}(x,t) \in L_\infty(Q)$, $h_1(x,t_1) \in W_2^1(D)\cap L_\infty(D)$, $h_1(x,t_2) \in W_2^1(D)\cap L_\infty(D)$, $h_2(x,0) \in W_2^1(D)\cap L_\infty(D)$, $h_2(x,t_1) \in W_2^1(D)\cap L_\infty(D)$, $h_2(x,t_2) \in W_2^1(D)\cap L_\infty(D)$, $u_0(x) \in W_2^3(D)\cap W_\infty^2(D)$, $u_1(x) \in W_2^3(D)\cap W_\infty^2(D)$, $u_2(x) \in W_2^3(D)\cap W_\infty^2(D)$, $\varphi_1(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, $\varphi_2(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. *Кроме того, пусть выполняются условия*

$$h_0(x) \geq \overline{h}_0 > 0 \quad \text{при} \quad \overline{D}; \tag{10}$$

$$\lambda + a_0(x,t) - \lambda_0 \geq \overline{a}_0 > 0 \quad \text{при} \quad (x,t)\in\overline{Q}; \tag{11}$$

$$K_2 < 1, \quad (\overline{a}_1+\overline{a}_2)N_0 \leq \overline{a}_0, \quad N_0 \leq m_0; \tag{12}$$

$$\overline{\varphi}_1 + \overline{\varphi}_2 < 1; \tag{13}$$

$$\mu(x,0) = u_0(x), \quad \mu(x,t_1) = u_1(x), \quad \mu(x,t_2) = u_2(x),$$
$$\mu_t(x,0) = \varphi_0(x) \quad \text{при} \quad x\in\Gamma; \tag{14}$$

краевая задача

$$U_{tt} - \Delta U_t + \lambda U_t = 0,$$
$$U(x,t)|_S = \mu(x,t), \quad U_t(x,0) = \varphi_0(x), \quad U(x,0) = 0, \quad x \in D, \tag{15}$$

имеет решение, принадлежащее пространству V.

Тогда обратная задача (1)–(4) имеет решение $\{u(x,t), q_1(x), q_2(x)\}$ *такое, что* $u(x,t)\in V$, $q_1(x)\in L_\infty(D)$, $q_2(x) \in L_\infty(D)$.

Доказательство. Рассмотрим следующую краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_{tt} - \Delta u_t + [\lambda + a_0(x,t) + a_1(x,t)u_t(x,t_1) + a_2(x,t)u_t(x,t_2)]u_t + [b_0(x,t) + b_1(x,t)u_t(x,t_1) + b_2(x,t)u_t(x,t_2)]u = f_t(x,t) \tag{16}$$

и такую, что для нее выполняется условие

$$u_t(x,0) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)u_t(x,t_1) + \varphi_2(x)u_t(x,t_2), \quad x\in D, \tag{17}$$

а также условия (2) и (3). Разрешимость данной краевой задачи докажем, комбинируя метод неподвижной точки и метод срезывающих функций.

Определим функции $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$:

$$G_1(\xi) = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \le \overline{a}_0, \\ \overline{a}_0, & \text{если } \xi > \overline{a}_0, \\ -\overline{a}_0, & \text{если } \xi < -\overline{a}_0, \end{cases}$$

$$G_2(\xi) = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \le m_0, \\ m_0, & \text{если } \xi > m_0, \\ -m_0, & \text{если } \xi < -m_0. \end{cases}$$

Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_{tt} - \Delta u_t + [\lambda + a_0(x,t) + G_1(a_1(x,t)u_t(x,t_1) + a_2(x,t)u_t(x,t_2))]u_t$$
$$+[b_0(x,t) + b_1(x,t)G_2(u_t(x,t_1)) + b_2(x,t)G_2(u_t(x,t_2))]u = f_t(x,t) \qquad (16')$$

и такую, что для нее выполняются условия (17), (2) и (3).

Пусть $v(x,t)$ есть произвольная функция из пространства V_1. Положим

$$F_v(x,t) = f_t(x,t) - [b_0(x,t) + b_1(x,t)G_2(v_t(x,t_1)) + b_2(x,t)G_2(v_t(x,t_2))]v(x,t).$$

Наконец, рассмотрим еще одну краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_{tt} - \Delta u_t + [\lambda + a_0(x,t) + G_1(a_1(x,t)v_t(x,t_1) + a_2(x,t)v_t(x,t_2))]u_t = F_v(x,t) \quad (16'_v)$$

и такую, что для нее выполняются условия (17), (2) и (3).

Уравнение $(16'_v)$, а также условия (17) и (3) дают нелокальную по времени краевую задачу типа краевой задачи (5)–(7) для функции $u_t(x,t)$. Указанные в формулировке теоремы включения, условия (10), (11), (13) и (15), а также последнее равенство условия (14) означают, что для данной краевой задачи (то есть задачи относительно функции $u_t(x,t)$) выполняются все условия приведенного выше утверждения. Согласно этому утверждению существует функция $\overline{u}(x,t) = u_t(x,t)$, принадлежащая пространству V и являющаяся решением краевой задачи $(16'_v)$, (17), (3). Вследствие равенства

$$u(x,t) = \int_0^t u_\tau(x,\tau)\,d\tau + u_0(x), \qquad (18)$$

являющегося следствием условия (2), функция $u(x,t)$ будет корректно определена и будет принадлежать пространству V. Другими словами, краевая задача $(16'_v)$, (17), (2), (3) имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V_1.

Из сказанного следует, что краевая задача $(16'_v)$, (17), (2), (3) порождает оператор Φ, действующий из пространства V_1 в себя: $\Phi(v) = u$. Покажем, что этот оператор имеет в пространстве V_1 неподвижные точки.

Пусть M_0, M_1 и M_2 — некоторые положительные числа и W — множество

$$W = \{v(x,t): \quad \|v\|_{L_\infty(Q)} \le M_0, \quad \|v_t\|_{L_\infty(Q)} \le M_1,$$
$$\|v\|_H + \|v_t\|_H \le M_2, \quad v(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in D\}.$$

Очевидно, что множество W замкнуто, выпукло и ограничено в пространстве V_1. Покажем, что можно подобрать числа M_0, M_1 и M_2 так, что оператор Φ будет переводить множество W в себя.

Оценка (8) утверждения дает для функции $u(x,t)$ — решения краевой задачи ($16'_v$), (17), (2), (3) — неравенство

$$\|u_t\|_{L_\infty(Q)} \leq \frac{1}{1-\overline{\varphi}_1-\overline{\varphi}_2}\max\left\{\frac{1}{\lambda_0}\|f_t\|_{L_\infty(Q)}, \|\varphi_0\|_{L_\infty(D)}, \|\mu_t\|_{L_\infty(S)}\right\} + \frac{\overline{b}_0+(\overline{b}_1+\overline{b}_2)m_0}{\lambda_0(1-\overline{\varphi}_1-\overline{\varphi}_2)}\|v\|_{L_\infty(Q)}. \quad (19)$$

Представление (18), справедливое и для функций $v(x,t)$ из множества W, дает неравенство

$$\|v\|_{L_\infty(Q)} \leq T\|v_t\|_{L_\infty(Q)} + \|u_0\|_{L_\infty(D)}. \quad (20)$$

Неравенства (19) и (20) дают следующее неравенство

$$\|u_t\|_{L_\infty(Q)} \leq K_1 + K_2\|v_t\|_{L_\infty(Q)}. \quad (21)$$

Вследствие первого неравенства условия (12) и принадлежности функции $v(x,t)$ множеству W из неравенства (21) вытекает неравенство

$$\|u_t\|_{L_\infty(Q)} \leq N_0. \quad (22)$$

Если теперь мы выберем число M_1 так, чтобы выполнялось неравенство $M_1 \geq N_0$, то, очевидно, для решений краевой задачи ($16'_v$), (17), (2), (3) будет выполняться второе неравенство, определяющее множество W.

Равенство (18) и оценка (22) дают следующее неравенство

$$\|u\|_{L_\infty(Q)} \leq TN_0 + \|u_0\|_{L_\infty(Q)}.$$

Учитывая неравенство

$$TN_0 + \|u_0\|_{L_\infty(D)} \leq TM_1 + \|u_0\|_{L_\infty(D)}$$

и выбирая число M_0 так, чтобы выполнялось неравенство

$$TM_1 + \|u_0\|_{L_\infty(Q)} \leq M_0,$$

мы получим, что при принадлежности функции $v(x,t)$ множеству W для решений краевой задачи ($16'_v$), (17), (2), (3) будет выполняться и первое неравенство, определяющее множество W.

Оценка (9) и вновь равенство (18) дают следующую оценку

$$\|u\|_H + \|u_t\|_H \leq R_1$$

с постоянной R_1, определяющейся лишь числом λ_0, функциями $f(x,t)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, областью D и числом M_1. Выбрав число M_2 так, чтобы выполнялось неравенство

$$M_2 \geq R_1,$$

мы получим, что для решений краевой задачи ($16'_v$), (17), (2), (3) будет выполняться и третье неравенство, определяющее множество W.

Доказанное означает, что при сделанном выше выборе чисел M_0, M_1 и M_2 оператор Φ переводит множество W в себя.

Покажем теперь, что оператор Φ непрерывен в пространстве V_1.

Пусть последовательность функций $\{v_m(x,t)\}$ сходится в пространстве V_1 к функции $v(x,t)$, $u_m(x,t)$ и $u(x,t)$ — образы функций $v_m(x,t)$ и $v(x,t)$ при действии оператора Φ, $w_m(x,t)$ — функции $u_m(x,t) - u(x,t)$.

Функции $u_m(x,t)$ представляют собой решение краевой задачи

$$\begin{aligned} w_{mtt} - \Delta w_{mt} + [\lambda + a_0(x,t) + G_1(a_1(x,t)v_t(x,t_1) + a_2(x,t)v_t(x,t_2))]w_{mt} \\ = -b_0(x,t)w_m + b_1(x,t)w_{mt}(x,t_1)u + b_1(x,t)u_{mt}(x,t_1)w_m \\ + b_2(x,t)w_{mt}(x,t_2)u + b_2(x,t)u_{mt}(x,t_2)w_m, \end{aligned} \tag{23}$$

$$w_m(x,t)|_S = 0, \tag{24}$$

$$w_m(x,0) = 0, \quad x \in D, \tag{25}$$

$$w_{mt}(x,0) = \varphi_1(x)w_{mt}(x,t_1) + \varphi_2(x)w_{mt}(x,t_2), \quad x \in D. \tag{26}$$

Сходимость последовательности $\{v_m(x,t)\}$ в пространстве V_1 означает, в частности, что правая часть уравнения (23) сходится почти всюду в цилиндре Q к тождественно нулевой функции. Оценка (8) и стандартные интегральные оценки решений краевой задачи (23)–(26) (точнее говоря, оценка (9)) дают очевидную сходимость

$$\|w_{mt}\|_V \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Равенство

$$w_m(x,t) = \int_0^t w_{m\tau}(x,\tau)\,d\tau$$

дает аналогичную сходимость и для самих функций $w_m(x,t)$. Доказанные две сходимости и означают, что оператор Φ непрерывен в пространстве V_1.

Докажем теперь, что оператор Φ компактен в пространстве V_1.

Пусть $\{v_m(x,t)\}$ есть ограниченная последовательность функций из пространства V_1, $\{u_m(x,t)\}$ — последовательность образов функций $v_m(x,t)$ при действии оператора Φ. Оценки (8) и (9), равенство (18) позволяют легко доказать, что семейство функций $\{u_m(x,t)\}$ также будет ограничено в пространстве V_1.

Ограниченность в пространстве V_1 последовательностей $\{v_m(x,t)\}$ и $\{u_m(x,t)\}$, вложение $W_2^{2,1}(Q) \subset W_2^1(Q)$, вполне непрерывность вложений $W_2^1(Q) \to L_2(Q)$, $W_2^1(Q) \to L_2(D)$ и теорема о возможности выбора из сильно сходящейся последовательности подпоследовательности, сходящейся почти всюду [6] дают нам существование подпоследовательностей $\{v_{m_k}(x,t)\}$ и $\{u_{m_k}\}(x,t)$, а также функций $v(x,t)$ и $u(x,t)$ таких, что при $k \to \infty$ функции $v_{m_k}(x,t)$, $u_{m_k}(x,t)$, $v_{m_k t}(x,t)$ и $u_{m_k t}(x,t)$ сходятся почти всюду в Q к функциям $v(x,t)$, $u(x,t)$, $v_t(x,t)$ и $u_t(x,t)$ соответственно, функции $v_{m_k t}(x,t_1)$, $v_{m_k t}(x,t_2)$, $u_{m_k t}(x,0)$, $u_{m_k t}(x,t_1)$ и $u_{m_k t}(x,t_2)$ сходятся почти всюду в D к функциям $v_t(x,t_1)$, $v_t(x,t_2)$, $u_t(x,0)$, $u_t(x,t_1)$ и $u_t(x,t_2)$, и, наконец, функции $u_{m_k}(x,t)$ сходятся слабо в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$ к функции $u(x,t)$. Очевидно, что предельные функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ будут связаны в цилиндре Q уравнением $(16'_v)$, и что функция $u(x,t)$ будет принадлежать пространству V_1 и для нее будут выполняться условия (17), (2) и (3). Повторяя теперь для последовательностей $\{v_{m_k}(x,t)\}$, $\{u_{m_k}(x,t)\}$ и функций $v(x,t)$ и $u(x,t)$ доказательство непрерывности оператора Φ, получаем, что будет иметь место сходимость $\Phi u_{m_k} \to \Phi u$ в пространстве V_1. Другими словами, мы получаем, что для всякой ограниченной последовательности $\{v_m(x,t)\}$ пространства V_1 из последовательности $\{\Phi u_m\}$ можно извлечь сильно сходящуюся подпоследовательность. А это и означает, что оператор Φ компактен в пространстве V_1.

Непрерывность и компактность оператора Φ, а также тот факт, что он переводит множество W в себя, означают, что для оператора Φ выполняются все

условия теоремы Шаудера. Согласно этой теореме оператор Φ имеет в множестве W неподвижную точку. Другими словами, существует функция $u(x,t)$, принадлежащая множеству W и являющаяся решением краевой задачи (16′), (17), (2), (3).

Для найденной функции $u(x,t)$ будет выполняться оценка (22). Эта оценка и второе неравенство условия (12) означают, что функция $u(x,t)$ будет на самом деле решением краевой задачи (16), (17), (2), (3).

Определим функции $q_1(x)$ и $q_2(x)$:

$$q_1(x) = A_0(x) + A_1(x)u_t(x,t_1) + A_2(x)u_t(x,t_2),$$

$$q_2(x) = B_0(x) + B_1(x)u_t(x,t_1) + B_2(x)u_t(x,t_2).$$

Проинтегрируем уравнение (16) по переменной t вначале в пределах от 0 до t_1, затем в пределах от 0 до t_2. После несложных выкладок мы придем к следующим двум равенствам

$$\begin{aligned} &-\Delta[u(x,t_1) - u(x)] + \lambda_0[u(x,t_1) - u_1(x)] \\ &+ [\lambda + a_0(x,t_1) - \lambda_0 + q_1(x)h_1(x,t_1) + q_2(x)h_2(x,t_1)][u(x,t_1) - u_1(x)] = 0, \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} &-\Delta[u(x,t_2) - u_2(x)] + \lambda_0[u(x,t_2) - u_2(x)] \\ &+ [\lambda + a_0(x,t_2) - \lambda_0 + q_1(x)h_1(x,t_2) + q_2(x)h_2(x,t_2)][u(x,t_2) - u_2(x)] = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Заметим, что вследствие оценки (22) и условий (11) и (12) функции $\lambda + a_0(x,t_2) - \lambda_0 + q_1(x)h_1(x,t_2) + q_2(x)h_2(x,t_1)$ и $\lambda + a_0(x,t_2) - \lambda_0 + q_1(x)h_1(x,t_2) + q_2(x)h_2(x,t_2)$ будут неотрицательны на множестве $\overline{D}$. Учитывая этот факт и учитывая совпадение функций $u(x,t_1)$ и $u_1(x)$, $u(x,t_2)$ и $u_2(x)$ на Γ, получаем, что вследствие равенств (27) и (28) функции $u(x,t_1)$ и $u_1(x)$, $u(x,t_2)$ и $u_2(x)$ будут совпадать на области D.

Выполним теперь интегрирование в уравнении (16) по временно́й переменной в пределах от 0 до текущей точки. Мы получим уравнение

$$u_t - \Delta u + \lambda u + [q_1(x)h_1(x,t) + q_2(x)h_2(x,t)]u = f(x,t),$$

то есть уравнение (1). Другими словами, мы получили, что функции $u(x,t)$, $q_1(x)$ и $q_2(x)$ связаны в цилиндре Q уравнением (1), для функции $u(x,t)$ выполняются условия (2), (3) и (4). Поскольку по ходу доказательства мы получили, что функция $u(x,t)$ принадлежит пространству V_1, и поскольку функции $q_1(x)$ и $q_2(x)$ принадлежат пространству $L_\infty(D)$ (что вытекает из принадлежности функций $u(x,t)$ пространству V_1 и из указанных в формулировке теоремы включений), то функции $u(x,t)$, $q_1(x)$ и $q_2(x)$ и дадут требуемое решение обратной задачи (1)–(4).

Теорема доказана.

Заметим следующее. Числа K_1 и K_2 имеют вид $K_1 = \alpha + \beta m_0$, $K_2 = \gamma m_0$. Положим $\overline{m}_0 = \frac{1}{2\gamma}(1 - \beta + \sqrt{(1-\beta)^2 - 4\alpha\gamma})$. Если числа β и γ малы (что выполняется, например, если числа $\frac{1}{\lambda_0}\|u_0\|_{L_\infty(D)}$ и T малы), то число $\overline{m}_0$ будет положительным. Зафиксируем число m_0 из полуинтервала $(0, \overline{m}_0]$. Если теперь число T настолько мало, что выполняется неравенство $K_2 < 1$, то для числа m_0 будет выполняться требуемое условием (13) неравенство $N_0 \leq m_0$. Выполнение же неравенства $(\overline{a}_1 + \overline{a}_2)N_0 \leq \overline{a}_0$ имеет место, например, если число K_1 мало (что возможно) и число λ_0 велико.

Теорема Шаудера, с помощью которой мы доказали разрешимость обратной задачи (1)–(4), не позволяет сказать что-либо о единственности решений. Частично прояснить ситуацию могут следующие рассуждения.

Пусть N_1 и N_2 — фиксированные положительные числа, $W_{N_1N_2}$ есть множество

$$W_{N_1N_2} = \{v(x,t) \in V_1 : \quad \|v\|_{L_\infty(Q)} \le N_1, \quad \|v_t\|_{L_\infty(Q)} \le N_2\}.$$

Положим

$$R_0 = \frac{1}{\lambda_0(1-\overline{\varphi}_1-\overline{\varphi}_2)}\left\{[\bar{b}_0 + (\bar{b}_1+\bar{b}_2)N_2]T + (\overline{a}_1+\overline{a}_2)N_2 + (\bar{b}_1+\bar{b}_2)N_1\right\}.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условие* (11), *а также условия*

$$(\overline{a}_1+\overline{a}_2)N_2 \le \overline{a}_0; \tag{29}$$

$$R_0 < 1. \tag{30}$$

Тогда в множестве $W_{N_1N_2}$ имеется не более одного решения обратной задачи (1)–(4).

Доказательство. Пусть $\{u(x,t), q_{11}(x), q_{21}(x)\}$ и $\{v(x,t), q_{12}(x), q_{22}(x)\}$ есть два решения обратной задачи (1)–(4) такие, что $u(x,t)$ и $v(x,t)$ принадлежат множеству $W_{N_1N_2}$. Обозначим $w(x,t) = u(x,t) - v(x,t)$. Для функции $w(x,t)$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}
w_{tt} - \Delta w_t + [\lambda + a_0(x,t) + a_1(x,t)u_t(x,t_1) + a_2(x,t)u_t(x,t_2)]w_t \\
= -[b_0(x,t) + b_1(x,t)u_t(x,t_1) + b_2(x,t)u_t(x,t_2)]w \\
- [a_1(x,t)w_t(x,t_1) + a_2(x,t)w_t(x,t_2)]v_t \\
- [b_1(x,t)w_t(x,t_1) + b_2(x,t)w_t(x,t_2)]v,
\end{aligned}$$

$$w(x,0) = 0, \quad w_t(x,0) = \varphi_1(x)w_t(x,t_1) + \varphi_2(x)w_t(x,t_2), \quad x \in D,$$
$$w(x,t)|_S = 0.$$

Условие (29) и оценка (8) дают для функции $w_t(x,t)$ неравенство

$$\|w_t\|_{L_\infty(Q)} \le R_0\|w_t\|_{L_\infty(Q)}.$$

В силу условия (30) отсюда следует $w_t(x,t) \equiv 0$. Очевидным следствием данного тождества является следующее: $w(x,t) \equiv 0$. Это тождество означает, что при выполнении условий теоремы 2 функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ тождественно совпадают. Поскольку же функции $q_{11}(x)$ и $q_{12}(x)$, $q_{21}(x)$ и $q_{22}(x)$ вычисляются через функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ одинаковым образом, то и они будут тождественно совпадать.

Теорема доказана.

Очевидным следствием теорем 1 и 2 является то, что в множестве $W_{N_1N_2}$, определяющемся числами $TN_0 + \|u_0\|_{L_\infty(D)}$ и N_0 соответственно, при выполнении условий теорем 1 и 2 имеется лишь одно решение обратной задачи (1)–(4).

И еще одно замечание. Очевидно, что доказанные теоремы можно обобщить на случай коэффициента $q(x,t)$ вида

$$q(x,t) = \sum_{k=1}^{m} q_k(x)h_k(x,t)$$

с известными функциями $h_k(x,t)$ и неизвестными $q_k(x)$. Условия переопределения в этом случае задаются так

$$u(x,t_k) = u_k(x), \quad k = 1,\dots,m, \quad 0 < t_1, t_2 < \dots < t_m \le T.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прилепко А. И., Костин А. Б.* О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Мат. сб. 1992. Т. 183, № 4. С. 49–68.

2. *Прилепко А. И., Костин А. Б.* Об обратных задачах определения коэффициентов в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 3. С. 146–156.

3. *Кожанов А. И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Ж. вычисл. мат. и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 722–744.

4. *Кожанов А. И.* Задача определения решения и правой части специального вида в параболическом уравнении // Обратные задачи и информационные технологии. Югорский НИИ ИТ, 2002. Т. 1, № 2. С. 13–41.

5. *Кожанов А. И.* Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений // Сиб. ж. инд. мат. 2004. Т. 7, № 1. С. 51–60.

6. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

Кожанов Александр Иванович
Россия, Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
`kozhanov@math.nsc.ru`