УДК 517.955

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ВЕСОВЫХ СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

И. И. Матвеева

В работе исследуется разрешимость задачи Коши для псевдопараболических систем в специальных весовых соболевских пространствах $W^l_{p,\gamma,\sigma}$ с экспоненциальным весом по времени и степенным весом по пространственным переменным. Доказывается, что за счет выбора степенного веса можно уменьшить ограничения на показатель суммируемости p, при которых задача Коши безусловно разрешима.

В настоящей работе изучается задача Коши для одного класса систем дифференциальных уравнений с частными производными, не разрешенных относительно производной по времени. Рассматриваемые системы согласно классификации, введенной в [1], называются системами псевдопараболического типа. В частности, к системам такого типа относится линеаризованная система Навье – Стокса.

Ранее проведенные исследования (см., например, [1]) показали, что задача Коши для псевдопараболических систем безусловно разрешима в весовом соболевском пространстве $W^l_{p,\gamma}$ с экспоненциальным весом $e^{-\gamma t}$ по времени при $p > p^* > 1$. При этом ограничения на показатель суммируемости p можно ослабить только за счет дополнительных требований на данные задачи, которые имеют вид условий ортогональности. В настоящей работе исследуется разрешимость задачи Коши в специальных весовых соболевских пространствах $W^l_{p,\gamma,\sigma}$, введенных в [2], с экспоненциальным весом по времени и степенным весом по пространственным переменным. Использование этих пространств при исследовании краевых задач для уравнений и систем, не разрешенных относительно старшей производной, позволяет сократить количество условий разрешимости (см., например, [1, 3]). В работе доказывается, что за счет выбора степенного веса по пространственным переменным можно установить безусловную разрешимость задачи Коши для одного класса псевдопараболических систем при меньших ограничениях на показатель суммируемости p.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$A_0 D_t u + A_1(D_x) u = f(t,x), \tag{1.1}$$

где

$$A_0 \circ D_t + A_1(D_x) = \begin{pmatrix} K_0 \circ D_t + K_1(D_x) & L(D_x) \\ M(D_x) & 0 \end{pmatrix},$$

Работа поддержана грантом РФФИ № 03-01-00095, грантом Сибирского отделения Российской академии наук для молодых ученых и грантом программы Рособразования “Развитие научного потенциала высшей школы” № 8273.

$K_1(D_x)$, $L(D_x)$, $M(D_x)$ — матричные дифференциальные операторы по x размеров $m \times m$, $m \times (\nu - m)$, $(\nu - m) \times m$ соответственно, K_0 — невырожденная числовая $(m \times m)$ матрица.

Следуя классификации, введенной в [1], определим класс систем псевдопараболического типа. Для этого обозначим через $a_{k,j}(i\eta, i\xi)$ элементы символа оператора $A_0 \circ D_t + A_1(D_x)$.

Условие 1. Пусть $s_1 = \cdots = s_m = 0$, $t_1 = \cdots = t_m = 1$, и существуют числа $s_{m+1}, \cdots, s_\nu$, $t_{m+1}, \cdots, t_\nu$ такие, что $-1 \le s_k \le 0$, $t_k \ge 0$, $k = m+1, \cdots, \nu$, а также вектор $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, \cdots, n$, такой, что

$$\begin{aligned} &a_{k,j}(i\eta, i\xi) = 0 && \text{при} \quad s_k + t_j < 0, \\ &a_{k,j}(ci\eta, c^\alpha i\xi) = c^{s_k + t_j} a_{k,j}(i\eta, i\xi), \quad c > 0, && \text{при} \quad s_k + t_j \ge 0, \end{aligned}$$

$k, j = 1, \cdots, \nu$. Будем считать, что все числа t_j/α_i натуральные.

Условие 2. $\det(\tau K_0 + K_1(i\xi)) \ne 0$, $\operatorname{Re}\tau \ge 0$, $\xi \in R_n$, $|\tau| + |\xi| \ne 0$, при этом $\det(M(is)(\tau K_0 + K_1(i\xi))^{-1} L(is)) = 0$, $s \in R_n$, тогда и только тогда, когда $s = 0$.

Определение. Система уравнений (1.1) называется системой *псевдопараболического* типа, если оператор $A_0 \circ D_t + A_1(D_x)$ удовлетворяет условиям 1 и 2.

Условие 3. Матрица

$$(M(i\xi)(\tau K_0 + K_1(i\xi))^{-1} L(i\xi))^{-1} M(i\xi)(\tau K_0 + K_1(i\xi))^{-1}$$

не зависит от τ.

Рассмотрим в полупространстве $R^+_{n+1} = \{(t, x) : \ t > 0, \ x \in R_n\}$ задачу Коши

$$\begin{aligned} &K_0 D_t u^+ + K_1(D_x) u^+ + L(D_x) u^- = f^+(t, x), && t > 0, \ x \in R_n, \\ &M(D_x) u^+ = 0, && \\ &u^+|_{t=0} = 0, && x \in R_n. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Пусть $l \ge 0$ — целое, $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $1 < p < \infty$, $\gamma > 0$, $0 \le \sigma \le 1$. Обозначим символом $W^{l,q}_{p,\gamma,\sigma}(G)$ весовое соболевское пространство с нормой

$$\|v(t, x), W^{l,q}_{p,\gamma,\sigma}(G)\| = \|e^{-\gamma t}(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma} D^l_t v(t, x), \, L_p(G)\| \\ + \sum_{0 \le |\beta : q| \le 1} \|e^{-\gamma t}(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma(1 - |\beta : q|)} D^\beta_x v(t, x), \, L_p(G)\|,$$

где $\langle x \rangle^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^{2/\alpha_j}$. Эти пространства были введены Г. В. Демиденко в работе [2]. Пространство $W^{l,q}_{p,\gamma,0}(G)$ будем обозначать через $W^{l,q}_{p,\gamma}(G)$. Символом $L_{p,\gamma,\sigma}(G)$ будем обозначать весовое пространство с нормой

$$\|v(t, x), L_{p,\gamma,\sigma}(G)\| = \|e^{-\gamma t}(1 + \langle x \rangle)^{-\sigma} v(t, x), \, L_p(G)\|.$$

В настоящей работе исследуется разрешимость задачи Коши (1.2) в весовых соболевских пространствах $W^{l,q}_{p,\gamma,\sigma}$.

2. Формулировка результатов

Введем следующие обозначения:
$p' = p/(p-1)$, $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$, $\mathrm{t}_{\max} = \max(\mathrm{t}_{m+1}, \dots, \mathrm{t}_{\nu})$.

Для упрощения изложения будем считать, что $f^+(t,x) = 0$ при $t + |x| \gg 1$. В [1] было установлено следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $f_i^+(t,x) \in L_{p,\gamma}(R^+_{n+1})$, $\gamma \geq \gamma_0 > 0$, $i = 1, \dots, m$. *Если* $|\alpha|/p' > \mathrm{t}_{\max}$, *то задача Коши* (1.2) *имеет единственное решение* $u^+(t,x)$, $u^-(t,x)$ *с компонентами*

$$u_i^+(t,x) \in W^{1,r^+}_{p,\gamma}(R^+_{n+1}), \quad r^+ = (\frac{1}{\alpha_1}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}), \quad i = 1, \dots, m,$$

$$u_j^-(t,x) \in W^{0,r_j^-}_{p,\gamma}(R^+_{n+1}), \quad r_j^- = (\frac{\mathrm{t}_j}{\alpha_1}, \dots, \frac{\mathrm{t}_j}{\alpha_n}), \quad j = m+1, \dots, \nu,$$

при этом имеет место оценка

$$\sum_{i=1}^{m} \|u_i^+(t,x),\, W^{1,r^+}_{p,\gamma}(R^+_{n+1})\| + \sum_{j=m+1}^{\nu} \|u_j^-(t,x),\, W^{0,r_j^-}_{p,\gamma}(R^+_{n+1})\| \\ \leq c \sum_{i=1}^{m} \|f_i^+(t,x),\, L_{p,\gamma}(R^+_{n+1})\|,$$

где константа $c > 0$ *не зависит от* $f^+(t,x)$.

Из этой теоремы следует, что при исследовании разрешимости задачи (1.2) в $W^{l,q}_{p,\gamma}$ возникают ограничения на показатель суммируемости p. Как показывают примеры, эти ограничения можно ослабить только за счет дополнительных требований на данные типа условий ортогональности. Однако использование пространств $W^{l,q}_{p,\gamma,\sigma}$ позволяет получить безусловную разрешимость задачи Коши при меньших ограничениях на показатель суммируемости p.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Если* $|\alpha|/p > \sigma_j > \mathrm{t}_j - |\alpha|/p'$, $j = m+1, \dots, \nu$, *то задача Коши* (1.2) *имеет единственное решение* $u^+(t,x)$, $u^-(t,x)$ *с компонентами*

$$u_i^+(t,x) \in W^{1,r^+}_{p,\gamma}(R^+_{n+1}), \quad i = 1, \dots, m,$$

$$u_j^-(t,x) \in W^{0,r_j^-}_{p,\gamma,\sigma_j}(R^+_{n+1}), \quad j = m+1, \dots, \nu,$$

при этом имеет место оценка

$$\sum_{i=1}^{m} \|u_i^+(t,x),\, W^{1,r^+}_{p,\gamma}(R^+_{n+1})\| + \sum_{j=m+1}^{\nu} \|u_j^-(t,x),\, W^{0,r_j^-}_{p,\gamma,\sigma_j}(R^+_{n+1})\| \\ \leq c \sum_{i=1}^{m} \|f_i^+(t,x),\, L_{p,\gamma}(R^+_{n+1})\|,$$

где константа $c > 0$ *не зависит от* $f^+(t,x)$.

Пример. Рассмотрим задачу Коши для линеаризованной системы Навье – Стокса

$$\begin{array}{ll} u_t^+ - \nu\Delta u^+ + \nabla u^- = f^+(t,x), & t > 0,\ x \in R_3, \\ \operatorname{div} u^+ = 0, & \\ u^+|_{t=0} = 0, & x \in R_3, \end{array} \tag{2.1}$$

где $\nu > 0$.

В силу теоремы 1 при $p > 3/2$ задача Коши (2.1) имеет единственное решение

$$u_i^+(t,x) \in W^{1,2,2,2}_{p,\gamma}(R_4^+), \quad i = 1,2,3, \quad u^-(t,x) \in W^{0,1,1,1}_{p,\gamma}(R_4^+). \tag{2.2}$$

Как было установлено Г. В. Демиденко (см. [1, гл. 3] и [4]), возникающие ограничения на показатель суммируемости p по существу. Действительно, если $f^+(t,x) \in C_0^\infty(R_4^+)$, задача Коши (2.1) имеет единственное решение (2.2) при $p \leq 3/2$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия ортогональности

$$\int\limits_{R_3} f_j^+(t,x)\,dx \equiv 0, \quad j = 1,2,3.$$

Используя весовое соболевское пространство $W^{l,q}_{p,\gamma,\sigma}$, мы можем установить безусловную разрешимость задачи Коши (2.1) при любом показателе суммируемости $p > 1$. Действительно, в силу теоремы 2 при $3/(2p) > \sigma > 3/(2p) - 1$ задача Коши (2.1) имеет единственное решение

$$u_i^+(t,x) \in W^{1,2,2,2}_{p,\gamma}(R_4^+), \quad i = 1,2,3, \quad u^-(t,x) \in W^{0,1,1,1}_{p,\gamma,\sigma}(R_4^+)$$

при любых $p > 1$.

3. Приближенное решение

Приближенное решение задачи Коши (1.2) строится с использованием интегрального представления С. В. Успенского [5] для суммируемых функций (см. также [1, гл. 1])

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} (2\pi)^{-n} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{R_n}\int\limits_{R_n} e^{i(x-y)\xi} G(\xi v^\alpha) f(y)\,d\xi\,dy\,dv, \tag{3.1}$$

где

$$G(\xi) = 2N\langle\xi\rangle^{2N}\exp(-\langle\xi\rangle^{2N}), \quad \langle\xi\rangle^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^{2/\alpha_i},$$

N — достаточно большое натуральное число.

Для нахождения приближенного решения задачи (1.2) (см. подробный вывод в [1, гл. 3]) рассмотрим систему уравнений с параметрами τ, $\operatorname{Re}\tau \geq \gamma_0 > 0$, $\xi \in R_n$

$$\begin{aligned} &(\tau K_0 + K_1(i\xi))\omega^+ + L(i\xi)\omega^- = \widetilde{f}^+(\tau,\xi), \\ &M(i\xi)\omega^+ = 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $\widetilde{f}^+(\tau,\xi)$ — преобразование Лапласа и Фурье вектор-функции $f^+(t,x)$ по t и x соответственно. Система (3.2) получается в результате формального применения преобразований Лапласа по t и Фурье по x к задаче Коши (1.2). Решение системы (3.2) может быть записано в виде

$$\omega^+(\tau,\xi) = K^{-1}(\tau,\xi)(I - L(i\xi)N^{-1}(\tau,\xi)M(i\xi)K^{-1}(\tau,\xi))\widetilde{f}^+(\tau,\xi),$$
$$\omega^-(\tau,\xi) = N^{-1}(\tau,\xi)M(i\xi)K^{-1}(\tau,\xi)\widetilde{f}^+(\tau,\xi), \tag{3.3}$$

где

$$K(\tau,\xi) = \tau K_0 + K_1(i\xi), \qquad N(\tau,\xi) = M(i\xi)K^{-1}(\tau,\xi)L(i\xi).$$

Используя интегральное представление (3.1), построим вектор-функции

$$u_k^+(t,x) = (2\pi)^{-(n+1)/2} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{R_n} e^{ix\xi} G(\xi v^{\alpha}) \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(i\eta+\gamma)t} \omega^+(i\eta+\gamma,\xi) d\eta \Big) d\xi\, dv, \tag{3.4}$$

$$u_k^-(t,x) = (2\pi)^{-(n+1)/2} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{R_n} e^{ix\xi} G(\xi v^{\alpha}) \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{(i\eta+\gamma)t} \omega^-(i\eta+\gamma,\xi) d\eta \Big) d\xi\, dv. \tag{3.5}$$

Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} &K_0 D_t u_k^+(t,x) + K_1(D_x) u_k^+(t,x) + L(D_x) u_k^-(t,x) = f_k^+(t,x), \\ &M(D_x) u_k^+(t,x) = 0, \\ &u_k^+(0,x) = 0, \end{aligned}$$

где

$$f_k^+(t,x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{1/k}^{k} v^{-1} \int\limits_{R_n}\int\limits_{R_n} e^{i(x-y)\xi} G(\xi v^{\alpha}) f^+(t,y)\, d\xi\, dy\, dv.$$

В силу интегрального представления (3.1) имеем

$$\|f_k^+(t,x) - f^+(t,x),\, L_{p,\gamma}(R_{n+1}^+)\| \to 0, \quad k \to \infty.$$

Следовательно, вектор-функцию (3.4), (3.5) можно рассматривать в качестве приближенного решения задачи Коши (1.2).

4. Доказательство основных результатов

Из результатов, установленных в [1, гл. 3], вытекают следующие утверждения.

Лемма 4.1. *Для l-й компоненты $u_k^l(t,x)$ вектор-функции*

$$u_k^+(t,x) = (u_k^1(t,x), \dots, u_k^m(t,x))^T$$

имеет место оценка

$$\|u_k^l(t,x),\, W_{p,\gamma}^{1,r^+}(R_{n+1}^+)\| \le c \sum_{i=1}^{m} \|f_i^+(t,x),\, L_{p,\gamma}(R_{n+1}^+)\|, \quad r^+ = (\frac{1}{\alpha_1}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}),$$

с константой $c > 0$, не зависящей от k и $f^+(t,x)$, при этом

$$\|u_{k_1}^l(t,x) - u_{k_2}^l(t,x),\, W_{p,\gamma}^{1,r^+}(R_{n+1}^+)\| \to 0, \quad k_1,\ k_2 \to \infty.$$

Лемма 4.2. *Для l-й компоненты $u_k^{m+l}(t,x)$ вектор-функции*

$$u_k^-(t,x) = (u_k^{m+1}(t,x), \dots, u_k^{\nu}(t,x))^T$$

при $\beta\alpha = \mathrm{t}_{m+l}$ имеет место оценка

$$\|D_x^{\beta} u_k^{m+l}(t,x),\, L_{p,\gamma}(R_{n+1}^+)\| \le c \sum_{i=1}^{m} \|f_i^+(t,x),\, L_{p,\gamma}(R_{n+1}^+)\|,$$

где константа $c > 0$ не зависит от k и $f^+(t,x)$, при этом

$$\|D_x^\beta u_{k_1}^{m+l}(t,x) - D_x^\beta u_{k_2}^{m+l}(t,x),\, L_{p,\gamma}(R_{n+1}^+)\| \to 0, \quad k_1,\ k_2 \to \infty.$$

Из доказательства теоремы 1 следует, что ограничения на показатель суммируемости p возникают при получении L_p-оценок компонент вектор-функции $u_k^-(t,x)$. Покажем, что в норме пространства $L_{p,\gamma,\sigma}$ при соответствующем выборе весового параметра σ могут быть установлены оценки при всех $p > 1$.

Лемма 4.3. *Если $|\alpha|/p > \sigma_{m+l} > \mathrm{t}_{m+l} - |\alpha|/p'$, то для l-й компоненты $u_k^{m+l}(t,x)$ вектор-функции*

$$u_k^-(t,x) = (u_k^{m+1}(t,x), \dots, u_k^\nu(t,x))^T$$

имеет место оценка

$$\|u_k^{m+l}(t,x),\, L_{p,\gamma,\sigma_{m+l}}(R_{n+1}^+)\| \le c \sum_{i=1}^m \|f_i^+(t,x),\, L_{p,\gamma}(R_{n+1}^+)\|, \tag{4.1}$$

где константа $c > 0$ не зависит от k и $f^+(t,x)$, при этом

$$\|u_{k_1}^{m+l}(t,x) - u_{k_2}^{m+l}(t,x),\, L_{p,\gamma,\sigma_{m+l}}(R_{n+1}^+)\| \to 0, \quad k_1,\ k_2 \to \infty. \tag{4.2}$$

Доказательство. В силу формулы (3.5) при $\gamma \ge \gamma_0 > 0$, имеем

$$e^{-\gamma t} u_k^-(t,x) = \int_{1/k}^{1} \Omega(t,x,v)dv + \int_1^k \Omega(t,x,v)dv, \tag{4.3}$$

где

$$\Omega(t,x,v) = (2\pi)^{-(n+1)/2} v^{-1} \int_{R_n} e^{ix\xi} G(\xi v^\alpha) \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta t} \omega^-(i\eta + \gamma, \xi)\, d\eta \Big) d\xi.$$

Рассмотрим первый интеграл из (4.3). Отметим, что в силу условия 3 матрица $N^{-1}(\tau,\xi) M(i\xi) K^{-1}(\tau,\xi)$ не зависит от τ. В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения:

$$K(\xi, n, a, b) = (2\pi)^{-n/2} \int_a^b v^{-1} G(\xi v^\alpha)\, dv,$$

$$N_-^+(\xi) = N^{-1}(\tau,\xi) M(i\xi) K^{-1}(\tau,\xi).$$

Тогда

$$\int_{1/k}^{1} \Omega(t,x,v)dv = \int_{R_n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta t + ix\xi} K(\xi, n+1, 1/k, 1) N_-^+(\xi) \widetilde{f}^+(i\eta + \gamma, \xi)\, d\eta\, d\xi$$
$$= \int_{R_n} e^{ix\xi} K(\xi, n, 1/k, 1) N_-^+(\xi) \theta(t) e^{-\gamma t} \widehat{f}^+(t,\xi)\, d\xi, \tag{4.4}$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда, $\widehat{f}^+(t,\xi)$ — преобразование Фурье вектор-функции $f^+(t,x)$ по x.

Из условий 1, 2 на псевдопараболический оператор следует, что для любых чисел c_1, $c_2 > 0$ при $\operatorname{Re}\tau \geq 0$, $\xi \in R_n \backslash \{0\}$ имеет место тождество

$$N_-^+(\xi) \equiv T_{\nu-m}(c_2)\Big(M(c_2^\alpha i\xi)K^{-1}(c_1\tau, c_1^\alpha\xi)L(c_2^\alpha i\xi)\Big)^{-1} M(c_2^\alpha i\xi)K^{-1}(c_1\tau, c_1^\alpha\xi), \quad (4.5)$$

где $T_{\nu-m}(c)$ — диагональная матрица с элементами $c^{\mathrm{t}_{m+1}}, \ldots, c^{\mathrm{t}_\nu}$. Следовательно, элементы матрицы $T(\langle\xi\rangle)N_-^+(\xi)$, $\langle\xi\rangle^2 = \sum\limits_1^n \xi_i^{2/\alpha_i}$, удовлетворяют условиям теоремы Лизоркина о мультипликаторах [6]. Поэтому для l-й компоненты $\Omega_l(t,x,v)$ вектор-функции $\Omega(t,x,v)$ при $\sigma_{m+l} \geq 0$ получим

$$\Big\|(1+\langle x\rangle)^{-\sigma_{m+l}} \int\limits_{1/k}^{1} \Omega_l(t,x,v)dv,\ L_p(R_{n+1}^+)\Big\| \leq \Big\|\int\limits_{1/k}^{1} \Omega_l(t,x,v)dv,\ L_p(R_{n+1}^+)\Big\|$$
$$\leq c\sum_{j=1}^{m}\Big\|\int\limits_{R_n} e^{ix\xi}K(\xi,n,1/k,1)\langle\xi\rangle^{-\mathrm{t}_{m+l}}\widehat{f}_j^+(t,\xi)\,d\xi,\ L_{p,\gamma}(R_{n+1}^+)\Big\|.$$

Используя определение $K(\xi,n,1/k,1)$, неравенства Минковского и Юнга, получим

$$\Big\|(1+\langle x\rangle)^{-\sigma_{m+l}} \int\limits_{1/k}^{1} \Omega_l(t,x,v)dv,\ L_p(R_{n+1}^+)\Big\| \leq c\sum_{j=1}^{m}\|f_j^+(t,x),\ L_{p,\gamma}(R_{n+1}^+)\|, \quad (4.6)$$

где константа $c > 0$ не зависит от k и $f^+(t,x)$.

Рассмотрим теперь второй интеграл из (4.3). Аналогичным образом, как при получении (4.4), имеем

$$\int\limits_1^k \Omega(t,x,v)dv = \int\limits_{R_n} e^{ix\xi}K(\xi,n,1,k)N_-^+(\xi)\theta(t)e^{-\gamma t}\widehat{f}^+(t,\xi)\,d\xi.$$

Используя формулу обратного преобразования Фурье произведения, получим

$$\int\limits_1^k \Omega(t,x,v)dv = \int\limits_{R_n}\int\limits_{R_n} e^{i(x-y)\xi}K(\xi,0,1,k)N_-^+(\xi)\,d\xi\,\theta(t)e^{-\gamma t}f^+(t,y)\,dy.$$

Теперь, используя неравенство

$$\langle x-y\rangle(1+\langle x\rangle)^{-1} \leq c(1+\langle y\rangle), \quad c = \mathrm{const},$$

для l-й компоненты $\Omega_l(t,x,v)$ вектор-функции $\Omega(t,x,v)$ получим

$$\Big\|(1+\langle x\rangle)^{-\sigma_{m+l}} \int\limits_1^k \Omega_l(t,x,v)dv,\ L_p(R_{n+1}^+)\Big\|$$
$$\leq c\sum_{j=1}^{m}\int\limits_1^k v^{-1}\Big\|\int\limits_{R_n}\langle x-y\rangle^{-\sigma_{m+l}}\int\limits_{R_n} e^{i(x-y)\xi}G(\xi v^\alpha)(N_-^+)_{lj}(\xi)\,d\xi$$
$$\times(1+\langle y\rangle)^{\sigma_{m+l}}e^{-\gamma t}f_j^+(t,y)\,dy, L_p(R_{n+1}^+)\Big\|\,dv,$$

где $(N_-^+)_{lj}(\xi)$ — элементы l-й строки матрицы $N_-^+(\xi)$. В силу неравенства Юнга имеем

$$\left\|(1+\langle x\rangle)^{-\sigma_{m+l}}\int\limits_1^k \Omega_l(t,x,v)dv,\, L_p(R_{n+1}^+)\right\|$$
$$\leq c\sum_{j=1}^m \int\limits_1^k v^{-1}\left\|\langle x\rangle^{-\sigma_{m+l}}\int\limits_{R_n} e^{ix\xi}G(\xi v^\alpha)(N_-^+)_{lj}(\xi)\,d\xi,\, L_p(R_n)\right\|dv$$
$$\times \|\|(1+\langle y\rangle)^{\sigma_{m+l}}f_j^+(t,y),\, L_1(R_n)\|,\, L_{p,\gamma}(R_1^+)\|.$$

Сделав замену переменных

$$\widetilde{\xi}_i=\xi_i v^{\alpha_i},\quad z_i=x_i v^{-\alpha_i},\quad i=1,\ldots,n,$$

в силу (4.5) будем иметь неравенство

$$\left\|(1+\langle x\rangle)^{-\sigma_{m+l}}\int\limits_1^k \Omega_l(t,x,v)dv,\, L_p(R_{n+1}^+)\right\|$$
$$\leq c\sum_{j=1}^m \int\limits_1^k v^{-|\alpha|/p'-1+t_{m+l}-\sigma_{m+l}}dv\left\|\langle z\rangle^{-\sigma_{m+l}}\int\limits_{R_n} e^{iz\widetilde{\xi}}G(\widetilde{\xi})(N_-^+)_{lj}(\widetilde{\xi})\,d\widetilde{\xi},\, L_p(R_n)\right\|$$
$$\times \|\|(1+\langle y\rangle)^{\sigma_{m+l}}f_j^+(t,y),\, L_1(R_n)\|,\, L_{p,\gamma}(R_1^+)\|.$$

Поскольку $|\alpha|/p>\sigma_{m+l}$, используя определение функции $G(\xi)$ и соотношение (4.5), нетрудно показать, что первая норма конечна. По условию $|\alpha|/p'-t_{m+l}+\sigma_{m+l}>0$, поэтому интеграл

$$\int\limits_1^\infty v^{-|\alpha|/p'-1+t_{m+l}-\sigma_{m+l}}dv$$

сходится. Следовательно,

$$\left\|(1+\langle x\rangle)^{-\sigma_{m+l}}\int\limits_1^k \Omega_l(t,x,v)dv,\, L_p(R_{n+1}^+)\right\|$$
$$\leq c\sum_{j=1}^m \|\|(1+\langle x\rangle)^{\sigma_{m+l}}f_j^+(t,x),\, L_1(R_n)\|,\, L_{p,\gamma}(R_1^+)\|, \quad (4.7)$$

где константа $c>0$ не зависит от k и $f^+(t,x)$.

Поскольку $f^+(t,x)=0$ при $t+|x|\gg 1$, из оценок (4.6) и (4.7) вытекает неравенство (4.1). Доказательство сходимости (4.2) проводится точно так же.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.

Из лемм 4.1–4.3 следует, что для вектор-функции

$$u_k(t,x)=(u_k^+(t,x),u_k^-(t,x))^T=(u_k^1(t,x),\ldots,u_k^m(t,x),u_k^{m+1}(t,x),\ldots,u_k^\nu(t,x))^T$$

имеет место сходимость

$$\sum_{i=1}^{m} \|u^i_{k_1}(t,x) - u^i_{k_2}(t,x),\, W^{1,r^+}_{p,\gamma}(R^+_{n+1})\| \\ + \sum_{j=m+1}^{\nu} \|u^j_{k_1}(t,x) - u^j_{k_2}(t,x),\, W^{0,r^-_j}_{p,\gamma,\sigma_j}(R^+_{n+1})\| \to 0, \quad k_1,\ k_2 \to \infty.$$

В силу полноты соболевских пространств существует вектор-функция

$$u(t,x) = (u^+(t,x), u^-(t,x))^T$$

с компонентами

$$u^+_i(t,x) \in W^{1,r^+}_{p,\gamma}(R^+_{n+1}), \quad i = 1, \dots, m,$$

$$u^-_j(t,x) \in W^{0,r^-_j}_{p,\gamma,\sigma_j}(R^+_{n+1}), \quad j = m+1, \dots, \nu,$$

такая, что

$$\sum_{i=1}^{m} \|u^i_k(t,x) - u^+_i(t,x),\, W^{1,r^+}_{p,\gamma}(R^+_{n+1})\| \to 0,$$

$$\sum_{j=m+1}^{\nu} \|u^j_k(t,x) - u^-_j(t,x),\, W^{0,r^-_j}_{p,\gamma,\sigma_j}(R^+_{n+1})\| \to 0$$

при $k \to \infty$. Тогда вектор-функция $u(t,x)$ является искомым решением задачи Коши (1.2). Доказательство единственности решения проводится так же, как в [1].

Автор выражает благодарность д.ф.-м.н. Г. В. Демиденко за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
2. *Демиденко Г. В.* Задача Коши для уравнений и систем соболевского типа // Краевые задачи для уравнений с частными производными. Новосибирск: Ин-т математики АН СССР, Сиб. отд-ние, 1986. С. 69–84.
3. *Matveeva I. I.* On a class of boundary value problems for systems of Sobolev type // J. Anal. Appl. 2005. V. 3, N 2. P. 129–150.
4. *Демиденко Г. В.* О необходимых условиях корректности задачи Коши для линеаризованной системы Навье – Стокса // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 3. С. 186–189.
5. *Успенский С. В.* О представлении функций, определяемых одним классом гипоэллиптических операторов // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1972. Т. 117. С. 292–299.
6. *Лизоркин П. И.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1969. Т. 105. С. 89–167.

Матвеева Инесса Изотовна
Россия, Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
matveeva@math.nsc.ru