УДК 517.946

О ПОСТАНОВКЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Б. Б. Ошоров

В статье приводятся примеры систем уравнений первого порядка, тип которых по классификации Петровского не играет существенной роли при постановке краевых задач. Тем не менее, именно с этой точки зрения они являются аналогами эллиптической системы уравнений Коши – Римана.

В данной работе речь пойдет об эллиптических по Петровскому системах уравнений с частными производными вида

$$LU \equiv \sum_{|\alpha| \le m} A_\alpha(x) D^\alpha U(x) = F(x),$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, α — мультииндекс,

$$\det \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x)\lambda^\alpha \ne 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \ne 0. \tag{1}$$

Несмотря на многочисленные исследования по данному направлению, достаточно полную библиографию о которых можно найти в работах [1, 2], вопрос о корректных постановках краевых задач, по мнению автора, остается актуальным.

Условие эллиптичности по Петровскому (1) является существенным для систем двух уравнений первого порядка, поскольку известно [1], что, например, все такие системы вида

$$\left\{\begin{aligned} &a_{11}(x,y)u_{1x} + a_{12}(x,y)u_{2x} + b_{11}(x,y)u_{1y} + b_{12}(x,y)u_{2y} + \\ &\qquad\qquad c_{11}(x,y)u_1 + c_{12}(x,y)u_2 = f_1(x,y), \\ &a_{21}(x,y)u_{1x} + a_{22}(x,y)u_{2x} + b_{21}(x,y)u_{1y} + b_{22}(x,y)u_{2y} + \\ &\qquad\qquad c_{21}(x,y)u_1 + c_{22}(x,y)u_2 = f_2(x,y). \end{aligned}\right. \tag{2}$$

с помощью некоторого преобразования плоскости приводятся к обобщенной системе уравнений Коши – Римана. При этом условие (1) играет важную роль. Следовательно, задачи, поставленные корректно для обобщенной системы уравнений Коши – Римана, будут корректными и для целого класса систем уравнений вида (2).

Например, для системы уравнений (2) можно предложить постановки краевых задач, которые сводятся к краевой задаче [3] для обобщенной системы уравнений Коши – Римана

$$\left\{\begin{aligned} &u_{1x} - u_{2y} + c_{11}(x,y)u_1 + c_{12}(x,y)u_2 = f_1(x,y), \\ &u_{2x} + u_{1y} + c_{21}(x,y)u_1 + c_{22}(x,y)u_2 = f_2(x,y). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

где требуется найти в прямоугольнике $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x < k,\ 0 < y < l\}$ решение системы уравнений (3) при выполнении краевых условий

$$u_1(x,0) = u_1(k,y) = u_2(0,y) = u_2(x,l) = 0. \tag{4}$$

В работе автора [4] рассматривается произвольная область D с достаточно гладкой границей Γ. Разобьем границу области на части следующим образом $\Gamma^+ = \{(x,y) \in \Gamma :\ n_1 > 0\}$, $\Gamma^- = \{(x,y) \in \Gamma :\ n_1 < 0\}$, $\Gamma^0 = \Gamma \setminus (\overline{\Gamma^+ \cup \Gamma^-})$. Здесь $n = (n_1, n_2)$ — единичный вектор внешней нормали к Γ. Требуется найти в области D решение системы (3), удовлетворяющее краевым условиям

$$u_1|_{\Gamma^- \cup \Gamma^0} = u_2|_{\Gamma^+} = 0.$$

Для обеих задач доказана их однозначная разрешимость в пространствах Соболева $W_2^1(D)$, при этом существенно использовались априорные оценки

$$(KU,U)_0 \geq 0, \quad \exists c, c' > 0 :\ c\|U\|_1 \leq \|KU\|_0 \leq c'\|U\|_1\ \forall U(x,y) \in C_L,$$

где K — оператор Коши – Римана, записанный в матричном виде, $U^T = (u_1, u_2)$, $(\cdot,\cdot)_p$, $\|\cdot\|_p$ — скалярное произведение и норма в пространстве $W_2^p(D)$, $W_2^0(D) = L_2(D)$.

Пример. Пусть $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x - 4a < y < x,\ -x < y < 2b - x\}$. Требуется найти в области G решение системы уравнений

$$LU \equiv AU_x + BU_y + CU = F(x,y), \tag{5}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C(x,y) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \in C(\overline{D}),$$

если заданы краевые условия

$$u_1|_{y=-x} = u_1|_{y=x-4a} = u_2|_{y=x} = u_2|_{y=2b-x} = 0. \tag{6}$$

Характеристический детерминант системы уравнений (5) имеет вид $\det(A\lambda_1 + B\lambda_2) = 5\lambda_1^2 - 6\lambda_1\lambda_2 + 5\lambda_2^2$, $\Delta = 16 > 0$, т. е. это эллиптическая система уравнений в области G.

Сделаем линейную замену переменных $\xi = \alpha x + \beta y$, $\eta = \gamma x + \delta y$. Тогда $U_x = \alpha U_\xi + \gamma U_\eta$, $U_y = \beta U_\xi + \delta U_\eta$, $LU = (\alpha A + \beta B)U_\xi + (\gamma A + \delta B)U_\eta + CU$, где

$$\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} 2(\alpha - \beta) & -(\alpha + \beta) \\ \alpha + \beta & 2(\alpha - \beta) \end{pmatrix}, \quad \gamma A + \delta B = \begin{pmatrix} 2(\gamma - \delta) & -(\gamma + \delta) \\ \gamma + \delta & 2(\gamma - \delta) \end{pmatrix}.$$

Потребуем, чтобы $\alpha + \beta = 0$, $2(\alpha - \beta) = 1$, $\gamma - \delta = 0$, $\gamma + \delta = 1$, откуда $\alpha = -\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \delta = \frac{1}{2}$. Следовательно, замена $\xi = \frac{x-y}{4}$, $\eta = \frac{x+y}{2}$, якобиан которой $J(\xi,\eta) = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \neq 0$, приводит систему уравнений (5) к виду

$$LU = A_1 U_\xi + B_1 U_\eta + C_1 U = F_1(\xi,\eta),$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_1(\xi,\eta) = C(2\xi + \eta, -2\xi + \eta), \quad F_1(\xi,\eta) = F(2\xi + \eta, -2\xi + \eta).$$

При осуществленном преобразовании область G отображается на прямоугольник $D = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < \xi < a, \ 0 < \eta < b\}$, а краевые условия (6) принимают следующий вид

$$u_1(\xi,0) = u_1(a,\eta) = u_2(0,\eta) = u_2(\xi,b) = 0.$$

Отсюда делаем вывод, что краевая задача (5), (6) редуцируется к краевой задаче (3), (4) для обобщенной системы уравнений Коши – Римана в переменных (ξ,η).

В случае, когда размерность вектор-функции больше двух, эллиптичность по Петровскому не играет столь существенной роли при постановке краевых задач, которые являются аналогами предложенных выше задач.

В области $D \subset \mathbb{R}^2$ будем рассматривать системы уравнений

$$L_m U \equiv AU_x + BU_y + CU = F(x,y), \tag{7}$$

где A, B и C — $m \times m$-матрицы, заданные в области D, а $U(x,y)$ и $F(x,y)$ — соответственно, искомая и заданная вектор-функции размерности $m > 2$.

Очевидно, что в класс (7) входят системы уравнений различных типов. Ограничимся некоторыми модельными случаями.

Пусть $m = 3$ и

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

В этом случае характеристический детерминант задается формулой $\det(A\lambda_1 + B\lambda_2) = -\lambda_1^3$, т. е. система уравнений (7), (8) по классификации Петровского не имеет определенного типа.

Если же $m = 4$ и

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

то $\det(A\lambda_1 + B\lambda_2) = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2 > 0$, т. е. система уравнений (7), (9) эллиптическая в любой области $D \subset \mathbb{R}^2$.

В качестве канонической области на плоскости, по-прежнему, берем прямоугольник $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < k, \ 0 < y < l\}$.

Задача 1. В прямоугольнике D найти решение системы уравнений (7), (8) при граничных условиях

$$u_1(x,0) = u_1(k,y) = u_2(0,y) = u_2(x,l) = u_3(x,0) = u_3(k,y) = 0. \tag{10}$$

Задача 2. В прямоугольнике D найти решение системы уравнений (7), (9) при граничных условиях

$$u_1(x,0) = u_1(k,y) = u_2(0,y) = u_2(x,l) = \\ u_3(x,0) = u_3(k,y) = u_4(0,y) = u_4(x,l) = 0. \tag{11}$$

Не проводя подробного исследования разрешимости поставленных задач, получим некоторые априорные оценки.

Пусть $T_m U = AU_x + BU_y$.

Лемма. *Для любой вектор-функции* $U(x,y) \in C^\infty(\overline{D})$, *удовлетворяющей условиям* (10) *при* $m=3$ *или условиям* (11) *при* $m=4$, *справедливы неравенства*

$$(T_mU,U)_0 \geq 0, \quad m=3,4,$$
$$\|T_3U\|_0^2 \geq c\Big(\|U_x\|_0^2 + \int\limits_D [u_{2y}^2 + (u_1-u_3)_y^2]\,dD\Big),$$
$$\|T_4U\|_0^2 \geq c_1\Big(\|U_x\|_0^2 + \int\limits_D [u_{2y}^2 + u_{4y}^2 + (u_1-u_3)_y^2]\,dD\Big).$$

Доказательство первой оценки проводится интегрированием по частям в интеграле $(T_mU,U)_0$.

Доказательство второго неравенства осуществляется непосредственной оценкой нормы $\|T_3U\|_0^2$.

Случай $m=4$ рассматривается аналогично.

Из леммы непосредственно следует справедливость следующей теоремы.

Теорема. *Пусть для матрицы* $C(x,y) \in C(\overline{D})$ *выполнено одно из двух условий:*

1) $C(x,y)$ *положительно определена в области* D,

2) $\exists\alpha$, $0<\alpha<\frac{\sqrt{2}}{k}$, *такое, что* $\|CU\|_0 \leq \alpha\|U\|_0$.

Тогда для $\forall U(x,y) \in W_2^1(D)$, *удовлетворяющей условиям* (10) *при* $m=3$ *и условиям* (11) *при* $m=4$, *справедливы оценки*

$$\|L_mU\|_0 \geq c\|U\|_0, \quad c>0.$$

Такие же неравенства имеют место для формально сопряженного оператора L_m^* на вектор-функциях $V(x,y) \in C^\infty(\overline{D})$, удовлетворяющих естественным образом заданным сопряженным краевым условиям.

Отсюда следует, что поставленные задачи имеют, по крайней мере, единственные слабые обобщенные решения из пространства $L_2(D)$, которые совпадают с сильными решениями, а для классических решений этих задач справедлива теорема единственности.

Из условия 2) теоремы мы можем сделать такие же выводы и в том случае, когда $C(x,y)=0$, т. е. $L_m = T_m$.

Кроме того, рассматривая пространства, полученные замыканием множества вектор-функций $U(x,y) \in C^\infty(\overline{D})$, для которых выполнены условия (10) или (11), в норме $\|U\|_1' = \|TU\|_0$, можно исследовать разрешимость поставленных задач в таких пространствах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.

2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

3. *Ошоров Б. Б., Ошорова Т. Я., Сордохонова Е. Н.* Одна краевая задача для обобщенной системы уравнений Коши – Римана и некоторые ее приложения // Сб. научн. тр. Физ.-мат. Вып. 4. Улан-Удэ: ВСГТУ, 1999. С. 58–64.

4. *Ошоров Б. Б.* Краевые задачи для некоторых модельных систем уравнений в частных производных. Новосибирск, 2002. (Препринт/ НГУ).

Ошоров Батор Батуевич
Россия, Улан-Удэ,
Восточно-Сибирский государственный технологический университет
`scalderfree@land.ru`