УДК 517.95

О ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

И. М. Петрушко, Т. В. Капицына

Работа посвящена изучению разрешимости первой смешанной задачи для параболических уравнений второго порядка, вырождающихся на части боковой поверхности цилиндрической области с ляпуновской боковой границей. Изучается тот случай Трикоми вырождения в нуль квадратической формы, соответствующей главной части дифференциального оператора. Устанавливаются условия однозначной разрешимости первой смешанной задачи с граничными и начальными значениями из пространств типа L_2.

Пусть Q — ограниченная область n–мерного пространтсва R_n, $n \geq 2$ ($x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка пространства R_n), граница которой ∂Q — $(n-1)$-мерная замкнутая поверхность без края класса $C^{1+\lambda}$, $0 < \lambda \leq 1$.

Обозначим через $\rho(x)$ решение задачи Дирихле для уравнения

$$\Delta\rho = -1, \quad x \in Q, \qquad \rho|_{\partial Q} = 0.$$

Как известно [1], функция $\rho(x) \in C^{1+\lambda}(Q)$ и существует такая постоянная $\gamma_1 > 0$, что для всех $x \in Q$ выполняются неравенства

$$\gamma_1^{-1} r(x) \leq \rho(x) \leq \gamma_1 r(x),$$

где $r(x)$ — расстояние от точки $x \in Q$ до границы ∂Q области Q

$$r(x) = \min_{y \in \partial Q} |x - y|.$$

Кроме того, существует такая постоянная $C(\cdot)$, что

$$|\rho_{x_i x_j}| \leq \frac{C(\lambda')}{[r(x)]^{1-\lambda'}} \quad \forall\, i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad \forall \lambda', \quad 0 < \lambda' < \lambda.$$

Будем предполагать, что функция $\rho(x)$ продолжена нечетным образом за границу области Q и на все пространство R_n так, что

$$\rho(x) \in C^1(R_n).$$

В силу леммы Жиро существуют такие числа r_0 и $\gamma_2 > 0$, что для всех $x \in Q \setminus \{Q \cap (r(x) > r_0)\}$

$$|\bigtriangledown \rho| > \gamma_2.$$

Обозначим через δ_0 столь малое число, что поверхности уровня функции $\rho(x)$: $\rho(x) = \delta$, $0, \delta \leq \delta_0$, $x \in Q$, находятся в области $Q \setminus Q \cap \{r(x) > r_0\}$. Кроме того, будем предполагать число δ_0 настолько малым, чтобы подмножество Q_δ

$$Q_\delta = Q \cap \{x \in Q,\ \rho(x) > \delta\}, \quad 0 < \delta < \delta_0,$$

c 2005 Петрушко И. М., Капицына Т. В.

точек области Q являлось областью с границей ∂Q_δ (класса C^2) и нормаль, проведенная в любой точке $x^\circ \in \partial Q$, пересекала

$$\partial Q_\delta \cap \{|x - x^\circ| < r_0\}$$

для всех $\delta \in (0, \delta_0]$.

Пусть x° — произвольная точка поверхности ∂Q. Проведем через точку x° прямую, совпадающую с нормалью в этой точке к поверхности ∂Q, и обозначим через x°_δ точку пересечения этой прямой с поверхностью ∂Q_δ (ближайшую к x°).

Введем ортогональную систему координат $Oy_1, y_2, \ldots, y_n$ так, чтобы точка x°_δ была началом координат, а внешняя нормаль к границе ∂Q в точке x° имела направление, совпадающее с направлением оси Oy_n. Такую систему координат будем называть *местной* системой координат. Координаты точки x в местной системе координат будем обозначать через $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n) = (y', y_n)$. Координаты точки x° это $(0, 0, \ldots, 0, y^\circ_n)$. Функцию $\rho(x)$ в местной системе координат обозначим через $\tilde{\rho}(y)$.

Рассмотрим функцию $(n+1)$-го переменного $R(\delta, y', y^n) = \tilde{\rho}(y) - \delta$.

При фиксированном $\delta \in [0, \delta_0]$ поверхность нулевого уровня функции $R(\delta, y', y_n)$, находящаяся в Q, совпадает с поверхностью ∂Q_δ. Так как

$$\frac{\partial R}{\partial y_n}(0, 0, y^\circ_n) = \frac{\partial \rho(x^\circ)}{\partial \nu} < 0,$$

то по теореме о неявной функции существуют такие положительные числа r_1, $\delta < \delta_0/2$, h, что при $\delta \in [0, \delta_0]$ связный кусок Γ_δ поверхности ∂Q_δ, находящийся в пересечении

$$\partial Q_\delta \cap \{y : \ |y'| < r_1, \ y^\circ_n - h < y_n < y^\circ_n + h\},$$

описывается уравнением $y_n = \varphi(\delta, y')$, где

$$\varphi(\delta, y') \in C^1\left([0, \delta_1], \ |y'| < r_1\right).$$

При этом можно считать r_1 настолько малым, что гиперплоскость $y_n = 0$ не пересекает Γ_δ поверхности ∂Q_δ для всех $\delta \in (0, \delta_0/2)$, угол между нормалью к ∂Q в точке x_0 и нормалью, проведенной в любой точке к поверхности

$$\Gamma_0(x^0) = \partial Q \cap \ \{ y : |y'| < r_1, \ y^0_n - h < y_n < y^0_n + h\},$$

не превышает $\pi/8$ и цилиндр $\Omega^h = \{ \ y : |y'| < r_1, \ 0 < y_n < \varphi(0, y') + h\}$ при любом $\delta \in (0, \delta_1]$ не содержит точек поверхности ∂Q_δ, отличных от точек Γ_δ, описываемой уравнением $y_n = \varphi(\delta, y')$ при $|y'| < r_1$.

Пусть $0 < \delta \leq \delta_1$. Обозначим через

$$\Omega_\delta = \{y : \ |y'| < r, \ 0 < y_n < \varphi(\delta, y')\}.$$

Построим отображение A_δ цилиндра Ω_δ на $\Omega = \Omega^h \cap Q$ следующим образом: точка $x \in \Omega_\delta$ с местными координатами (y', y_n) переходит в точку $A_\delta(x) \in \Omega$ с местными координатами

$$\Big(y', \frac{y_n}{\varphi(\delta, y')} \ \varphi(0, y')\Big).$$

При этом поверхность Γ_δ переходит в $\Gamma_0(x^0)$. Обратное отображение A_δ^{-1} задается аналогично. Точка $x \in \Omega$ с местными координатами (y', y_n) переходит в точку $A_\delta^{-1} \in \Omega$ с местными координатами

$$\Big(y', \frac{y_n}{\varphi(0, y')} \ \varphi(\delta, y')\Big).$$

Заметим, что в силу свойств функции $\varphi(\delta, y')$ для любых $\delta \in (0, \delta_1]$ отображения $A_\delta(x)$ и $A_\delta^{-1}(x)$ принадлежат C^1. Отображение точек $\Gamma_0(x^0)$ на Γ_δ будем отображать через $x_{\delta_{x_0}}(x)$, а обратное к нему отображение Γ_δ на $\Gamma_0(x^0)$ — через $x^{-1}_{\delta_{x_0}}(x)$.

Возьмем некоторое $\delta \in (0, \delta_1]$, и пусть $\bar{x_\delta}$ — произвольная точка поверхности Γ_δ. Обозначим через

$$\frac{dS_\delta}{dS_0}\,(\bar{x_\delta})$$

предел при $\varepsilon \to 0$ отношения площади поверхности $\Gamma_\delta \cap \{|x - \bar{x_\delta}| < \varepsilon\}$ к площади куска поверхности ∂Q, состоящей из точек

$$x = x^{-1}_{\delta_{x_0}}\,(x^\delta), \quad x_\delta \in \Gamma_\delta \cap \{|x - \bar{x_\delta}| < \varepsilon\}.$$

Из свойств функции $\varphi(\delta, y')$ вытекает, что существует $\gamma_0 > 0$ такое, что для всех точек $x_\delta \in \Gamma_\delta$, $\delta \in (0, \delta_0]$, имеют место неравенства

$$\gamma_0^{-1} \le \frac{dS}{dS_0} < \gamma_0$$

и

$$\frac{dS_\delta}{dS_0}(x_\delta) \to 1 \quad \delta \to +0.$$

Обозначим через Q^T цилиндр $Q^T = Q \times (0, T)$.

Рассмотрим в Q^T уравнение

$$L_u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \,(a_{ij}(x,t) u_{xi}\,)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n}\, a_i(x,t) u_{x_i} + a(x,t) u = f(x,t) \qquad (1)$$

с вещественными коэффициентами $a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t)$, $a_i(x,t)$, $a(x,t)$, принадлежащими $C^1(\bar{Q}^T)$.

Уравнение (1) будем предполагать параболическим в Q^T, т. е. для любой точки $x \in \bar{Q}_\delta$, $\delta \in (0, \delta_0]$, и для любых $t \in [0, T]$ существует такое $\gamma_\delta > 0$, $\gamma_\delta \to 0$ при $\delta \to +0$, что для всех $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in R_n$

$$\Phi(x, \xi, t) = \sum_{i,j=1} a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \ge \gamma_\delta |\xi|^2.$$

Для $(x_0, t) \in \partial Q \times (0, T]$ квадратичная форма вырождается, т. е.

$$\Phi(x_0, \xi, t) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0, t) \xi_i \xi \ge 0.$$

Однако будем предполагать, что существует такая постоянная $\gamma^0 > 0$, что для всех $(x_0, t) \in (\partial Q \times [0, T])$

$$\gamma^0 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0, t) \nu_i(x_0)\, \nu_j(x_0) \le (\gamma^0)^{-1}.$$

Будем также предполагать, что правая часть (1) $f(x,t) \in L_{2,loc}(Q^T)$ принадлежит банаховому пространству $L_{2,1}(Q^T)$, полученному пополнением множества функций из $C^\infty(\bar{Q}^T)$ по норме

$$\parallel f \parallel_{L_{2,1}(Q^T)} = \parallel f \parallel_{L_2(Q_{\delta_0} \times (0,T))} + \int\limits_0^t \int\limits_0^{\delta_0} \mu \parallel f \parallel_{L_2(\partial Q_\mu)}\, d\mu dt.$$

Обозначим через $L_2(Q,r)$ — банахово пространтсво, получающееся в результате пополнения $C^\infty(\bar{Q})$ по норме

$$\| v \|^2_{L_2(Q,r)} = \int\limits_Q |v|^2 r(x)\,dx.$$

Определение 1. Функцию $u(x,t) \in W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ называют *обобщенным решением* из $W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ уравнения (1), если для всех финитных в Q^T функций $\eta(x,t) \in H^1_2(Q^T)$

$$\int\limits_{Q^T} \Big[-u\eta_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta + au\eta \Big]\,dx\,dt = \int\limits_{Q^T} f \cdot \eta\,dx\,dt.$$

Будем говорить, что функция $w(x,t)$ *финитна* по x в Q^T, если существует область Q', строго лежащая в Q, такая, что $w(x,t)$ равна нулю вне Q'^T.

Предположим, что функция $u(x,t)$, определенная в Q^T, является обобщенным решением уравнения (1) из $W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$. Тогда для любой функции $w(x,t)$, принадлежащей $H^1_1(Q^T)$ и финитной по x в Q^T, и для любого $\beta \in (0,T/2)$ и любого $T' \in (T/2,T)$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} &\int\limits_Q u(x,T')\,w(x,T') - \int\limits_Q u(x,\beta)\,w(x,\beta)\,dx \\ &\qquad + \int\limits_\beta^{T'} \int\limits_Q \left[-uw_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} w + auw \right] dx\,dt \\ &\qquad\qquad = \int\limits_\beta^{T'} \int\limits_Q f \cdot w\,dx\,dt. \end{aligned} \tag{2}$$

Так как уравнение (1) параболично в Q^T, то справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $u(x,t)$ — обобщенное из $W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ решение уравнения (1), правая часть которого $f \in L_{2,loc}(Q^T)$. Тогда для любого $\delta \in (0,\delta_0]$, для любого $\beta \in (0,\delta_0]$ и для любого $T' \in (T/2,T)$ справедливо равенство*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int\limits_{Q_\delta} u^2(x,T')(\rho-\delta)\,dx - \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\delta} u^2(x,\beta)(\rho-\delta)\,dx \\ &\quad + \int\limits_\beta^{T'} \int\limits_{Q_\delta} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} (\rho-\delta)\,dx\,dt - \frac{1}{2} \int\limits_\beta^{T'} \int\limits_{\partial Q_\delta} \sum_{i,j=1}^n \frac{a_{ij}\rho_{x_i}\rho_{x_j}}{|\nabla\rho|} u^2\,ds\,dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int\limits_\beta^{T'} \int\limits_{Q_\delta} (a_i(\rho-\delta))_{x_i}\,u^2\,dx\,dt - \frac{1}{2} \int\limits_\beta^{T'} \int\limits_{Q_\delta} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\rho_{x_i})_{x_j}\,u^2\,dx\,dt \\ &\qquad + \int\limits_\beta^{T'} \int\limits_{Q_\delta} au^2(\rho-\delta)\,dx\,dt = \int\limits_\beta^{T'} \int\limits_{Q_\delta} f \cdot u(\rho-\delta)\,dx\,dt. \end{aligned}$$

Пусть $T' \in (T/2, T)$, $\delta \in (\bar{0}, \delta_0]$, $\beta \in (0, \delta_0]$.

Обозначим через

$$M_{\delta,\beta}(u) = \max_{\delta_0 \le \mu \le \delta_0} \Big[\int\limits_{\beta}^{T'} \int\limits_{\partial Q_\mu} u^2 \, ds \, dt + \int\limits_{Q_\mu} u^2(x\beta)(\rho - \mu) \, dx \Big]$$

и

$$N_{\delta,\beta}(u) = \int\limits_{\beta}^{T'} \int\limits_{Q_\delta} \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} u_{x_i} u_{x_j} (\rho - \delta) \, dx + \int\limits_{Q_v} u^2(x, T')(\rho - \delta) \, dx.$$

Лемма 2. *Пусть $u(x,t)$ — обобщенное из $W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ решение уравнения (1), правая часть которого $f \in L_{2,loc}(Q^T) \cap L_{2,1}(Q^T)$. Тогда для любых $\delta \in (0, \delta_0]$, $\beta \in (0, \delta_0]$, $T' \in (T/2, T)$ справедлива оценка*

$$M_{\delta,\beta}(u) + \int\limits_{\beta}^{T'} \int\limits_{Q_\delta} u^2 (\rho - \delta) \, dx \, dt \le C_1 [\| \, f \, \|^2_{L_{2,1}(Q^T)} + N_{\delta,\beta}(u)].$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $v(x,t) = u(x,t)e^{\lambda t}$, $\lambda > 0$. Функция $v(x,t)$ является обобщенным решением из $W^{2,1}_{2,loc}(Q^T)$ уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} v_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot v_{x_i} + (a - \lambda) v = f \cdot e^{\lambda t} = f_1(x,t)$$

и, следовательно, для него (см. лемму 1) справедливо равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int\limits_{\beta}^{T'} \int\limits_{\partial Q_\delta} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_{ij} \rho_{x_i} \rho_{x_j}}{|\nabla_\rho|} v^2 \, ds \, dt + \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\delta} v^2(x, \beta)(\rho - \delta) \, dx + \lambda \int\limits_{\beta}^{T'} \int\limits_{Q_\delta} v^2 (\rho - \delta) \, dx \, dt \\ = \int\limits_{\beta}^{T'} \int\limits_{Q_\delta} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} (\rho - \delta) \, dx \, dt + \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\delta} v^2(x, T')(\rho - \delta) \, dx \\ - \frac{1}{2} \int\limits_{\beta}^{T'} \int\limits_{Q_\delta} \sum_{i=1}^{n} (a_i (\rho - \delta))_{x_i} v^2 \, dx \, dt - \frac{1}{2} \int\limits_{\beta}^{T'} \int\limits_{Q_\delta} \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} \rho_{x_i})_{x_j} \, v^2 \, dx \, dt \\ + \int\limits_{\beta}^{T'} \int\limits_{Q_\delta} a v^2 (\rho - \delta) \, dx \, dt - \int\limits_{\beta}^{T'} \int\limits_{Q_\delta} f_1 \, v (\rho - \delta) \, dx \, dt. \quad (3) \end{aligned}$$

Из (3) легко следует неравенство

$$\begin{aligned} M_{\delta,\beta}(v) + \lambda \int\limits_{\beta}^{T'} \int\limits_{Q_\delta} v^2 (\rho - \delta) \, dx \, dt \; \le \; K_1 \Big[\int\limits_{\beta}^{T'} \int\limits_{Q_\delta} |f_1||v|(\rho - \delta) \, dx \, dt \\ + N_{\delta,\beta}(v) + \int\limits_{\beta}^{T'} \int\limits_{Q_\delta} \frac{v^2}{[\rho(x)]^{1-\lambda'}} \, dx \, dt \Big], \quad (4) \end{aligned}$$

в котором постоянная K_1 зависит от коэффициентов уравнения, функции $\rho(x)$ и ее производных, и не зависит от $\delta \in (0, \delta_0)$, $\beta \in (0, \beta_0)$, $T' \in (T/2, T)$.

Прежде всего, отметим, что

$$\int_\beta^{T'} \int_{Q_\delta} |f_1||v|(\rho-\delta)\,dxdt = \int_\beta^{T'} \int_{Q_{\delta_0}} |f_1||v|(\rho-\delta)\,dxdt + \int_\beta^{T'} \int_{Q_\delta \setminus Q_{\delta_0}} |f_1||v|(\rho-\delta)\,dxdt$$

$$\leq \left[\| v \|_{L_2(Q_{\delta_0}\times(\beta,T'))} \| f_1 \|_{L_2(Q_{\delta_0}\times(\beta,T'))} + \int_\beta^{T'} \int_\delta^{\delta_0} (\rho-\delta)\,d\rho \int_{\partial Q_\rho} |v|\cdot|f_1|\,dsdt \right]$$

$$\leq \Big[\| v \|_{L_2(Q_{\delta_0}\times(\beta,T'))} \cdot \| f_1 \|_{L_2(Q_{\delta_0}\times(\beta,T'))}$$

$$+ M^{\frac{1}{2}}_{\delta,\beta}(v) \cdot \int_\delta^{\delta_0} (\rho-\delta) \| f_1 \|_{L_2(Q_{\partial Q_\delta}\times(\beta,T'))}\; d\rho \Big]$$

$$\leq \left[\| v \|_{L_2(Q_{\delta_0}\times(\beta,T'))} + M^{\frac{1}{2}}_{\delta,\beta}(v) \right] \| f_1 \|_{L_{2,1}(Q^T)}$$

$$\leq \left[K_2 \sqrt{\int_\beta^{T'} \int_{Q_\delta} v^2(\rho-\delta)\,dxdt} + M^{\frac{1}{2}}_{\delta,\beta}(v) \right] \| f_1 \|_{L_{2,1}(Q^T)}$$

$$\leq \varepsilon_1 \left[\int_\beta^{T'} \int_{Q_\delta} v^2(\rho-\delta)\,dxdt + M_{\delta,\beta}(v) \right] + K_3(\varepsilon_1) \| f_1 \|^2_{L_{2,1}(Q^T)} . \quad (5)$$

Кроме того, для любого $\delta_2 \in (\delta, \delta_0]$ справедливо неравенство

$$\int_\beta^{T'} \int_{Q_\delta} \frac{v^2}{[\rho(x)]^{1-\lambda'}}\,dxdt = \int_\beta^{T'} \int_{Q_{\delta_2}} \frac{v^2}{[\rho(x)]^{1-\lambda'}}\,dxdt + \int_\beta^{T'} \int_{Q_\delta \setminus Q_{\delta_2}} \frac{v^2}{[\rho(x)]^{1-\lambda'}}\,dxdt$$

$$\leq \int_\beta^{T'} \int_{Q_{\delta_2}} \frac{v^2}{[\rho(x)]^{1-\lambda'}}\,dxdt + K_4 \int_\delta^{\delta_2} \frac{d\rho}{\rho^{1-\lambda'}} \int_\beta^{T'} \int_{\partial Q_\rho} v^2\,dsdt$$

$$\leq \int_\beta^{T'} \int_{Q_{\delta_2}} \frac{v^2}{[\rho(x)]^{1-\lambda'}}\,dxdt + K_4 \frac{\delta_2^{\lambda'}}{\lambda'} M_{\delta,\beta}(v)$$

$$\leq K_5(\delta_2) \int_\beta^{T'} \int_{Q_\delta} v^2(\rho-\delta)\,dxdt + K_4 \frac{\delta_2^{\lambda'}}{\lambda'} M_{\delta,\beta}(v), \quad (6)$$

в котором K_4 не зависит от δ_2.

Подставляя (5) и (6) в неравенство (4), получим

$$M_{\delta,\beta}(v) \left[1 - K_1\varepsilon_1 - K_1 K_4 \frac{\delta_2^{\lambda'}}{\lambda'} \right] + (\lambda - K_1\varepsilon_1 - K_1 K_5) \int_\beta^{T'} \int_{Q_\delta} v^2(\rho-\delta)\,dxdt$$

$$\leq K_1 K_3 \| f_1 \|^2_{L_{2,1}(Q^T)} + K_1 N_{\delta,\beta}(v).$$

Выберем ε_1 и δ_2 настолько малым (уменьшая, если нужно $\delta < \delta_2$), чтобы

$$1 - K_1\varepsilon_1 - K_1K_4\frac{\delta_1^{\lambda'}}{\lambda'} > \frac{1}{2}.$$

Затем, выбирая λ настолько большим, чтобы

$$\lambda - K_1\varepsilon_1 - K_1K_5 > \frac{1}{2},$$

получим неравенство

$$M_{\delta,\beta}(v) + \int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta} v^2(\rho-\delta)dxdt \le K_6\Big[||f||^2_{L_{2,1}(Q^T)} + N_{\delta,\beta}(v)\Big],$$

из которого (учитывая, что $u = ve^{-\lambda t}$) немедленно следует утверждение леммы 2.

Лемма 3. *Пусть $u(x,t)$ — обобщенное из $W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ решение уравнения* (1), *правая часть которого $f \in L_{2,1}(Q^T) \cap L_{2,loc}(Q^T)$. Тогда для любых $\delta \in (0,\delta_0]$, $\beta \in (0,\delta_0]$, $T' \in (T/2,T)$ справедлива оценка*

$$N_{\delta,\beta}(u) + \int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta} u^2(\rho-\delta)dxdt$$
$$\le C_2\Big[||f||^2_{L_{2,1}(Q^T)} + ||u||^2_{L_2(\partial Q_\delta\times(\beta,T'))} + ||u(x,\beta)||^2_{L_2(Q,\rho)}\Big].$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $v_1(x,t) = u(x,t)e^{-\lambda_1 t}$, $\lambda_1 > 0$. Функция $v_1(x,t)$ является обобщенным из $W^{2,1}_{2,loc}(Q^T)$ решением уравнения

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}v_{1x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_iv_{1x_i} + (a+\lambda_1)v_1 = fe^{-\lambda_1 t} = f_2(x,t).$$

Следовательно, для него справедливо равенство

$$\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}v_{1x_i}v_{1x_j}(\rho-\delta)dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\delta} v_1^2(x,T')(\rho-\delta)dx + \lambda_1\int\limits_{\rho}^{T'}\int\limits_{Q_\delta} v_1^2(\rho-\delta)dxdt$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{\partial Q_\delta}\sum_{i,j=1}^n \frac{a_{ij}\rho_{x_i}\rho_{x_j}}{|\nabla\rho|}v_1^2dsdt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\delta} v_1^2(x,\beta)(\rho-\delta)dx$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\rho}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}\sum_{i,j=1}^n (a_i(\rho-\delta))_{x_i}v_1^2dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{\rho}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\rho_{x_i})_{x_j}v_1^2dxdt$$
$$- \int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta} av_1^2(\rho-\delta)dxdt + \int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta} f_2v_1(\rho-\delta)dxdt. \quad (7)$$

Из равенства (7) следует

$$N_{\delta,\rho}(v_1)+\lambda_1\int\limits_{\rho}^{T'}\int\limits_{Q_\delta} v_1^2(\rho-\delta)dxdt\le K_7\Big[\int\limits_{\rho}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}|f_2||v_1|(\rho-\delta)dxdt$$

$$+\int\limits_{\rho}^{T'}\int\limits_{\partial Q_\delta}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_{ij}\rho_{x_i}\rho_{x_j}}{|\nabla\rho|}v_1^2dsdt+\int\limits_{Q_\delta}v_1^2(x,\rho)(\rho-\delta)dx+\int\limits_{\rho}^{T'}\int\limits_{\partial Q_\delta}\frac{v^2}{[\rho(x)]^{1-\lambda'}}dxdt\Big].$$

Прежде всего, отметим, что в силу леммы 2 из неравенства (5) имеем

$$\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}|f_2||v_1|(\rho-\delta)dxdt\le\varepsilon_2\Big[\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}v_1^2(\rho-\delta)dxdt+M_{\delta,\rho}(v_1)\Big]$$

$$+K_3(\varepsilon_2)||f_2||^2_{L_{2,1}(Q^T)}\le\varepsilon_2\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}v_1^2(\rho-\delta)dxdt+\varepsilon_2C_1||f_2||^2_{L_{2,1}(Q^T)}$$

$$+\varepsilon_2C_1N_{\delta,\beta}(v_2)+K_3(\varepsilon_2)||f_2||^2_{L_{2,1}(Q^T)}. \quad (8)$$

Аналогично,

$$\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}\frac{v_1^2}{[\rho(x)]^{1-\lambda'}}dxdt\le K_5(\delta_3)\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}v_1^2(\rho-\delta)dxdt+K_4\frac{\delta_3^{\lambda'}}{\lambda'}M_{\delta,\rho}(v_1)$$

$$\le K_5\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}v_1^2(\rho-\delta)dxdt+K_4\frac{\delta_3^{\lambda'}}{\lambda'}C_1||f_2||^2_{L_{2,1}(Q^T)}+K_4\frac{\delta_3^{\lambda'}}{\lambda'}C_1N_{\delta,\rho}(v_1). \quad (9)$$

Здесь $\delta_3\in(\delta,\delta_0]$.
Таким образом, из (7), учитывая (8) и (9), получаем

$$N_{\delta,\beta}(v_1)+\lambda_1\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}v_1^2(\rho-\delta)dxdt\le K_7\Big[\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}|f_2||v_1|(\rho-\delta)dxdt$$

$$+\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}\frac{v_1^2}{[\rho(x)]^{1-\lambda'}}dxdt+\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{\partial Q_\delta}v_1^2dsdt+\int\limits_{Q_\delta}v_1^2(x,\beta)(\rho-\delta)dx\Big]$$

$$\le K_7\varepsilon_2\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}v_1^2(\rho-\delta)dxdt+K_7(\varepsilon_2C_1+K_3)||f_2||^2_{L_{2,1}(Q^T)}+K_7\varepsilon_2C_1N_{\delta,\beta}(v_2)$$

$$+K_7K_5\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}v_1^2(\rho-\delta)dxdt+K_7K_4\frac{\delta_3^{\lambda'}}{\lambda'}C_1||f_2||^2_{L_{2,1}(Q^T)}+K_7K_4C_1\frac{\delta_3^{\lambda'}}{\lambda'}N_{\delta,\beta}(v_1).$$

Следовательно,

$$\Big[1-\varepsilon_2K_7C_1-\delta_3^{\lambda'}\frac{K_7K_4C_1}{\lambda'}\Big]N_{\delta,\beta}(v_1)+(\lambda-K_7\varepsilon_2-K_7K_5)\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}v_1^2(\rho-\delta)dxdt$$

$$\leq K_7\Big(\varepsilon_2 C_1+K_3+K_4\frac{\delta_3^{\lambda'}}{\lambda'}C_1\Big)||f_2||^2_{L_{2,1}(Q^T)}+K_7\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{\partial Q_\delta}v_1^2dsdt+K_7\int\limits_{Q_\delta}v_1(x,\beta)(\rho-\delta)dx.$$

Выберем ε_2 и $\delta_3 \in (\delta,\delta_0]$ настолько малым (уменьшая, если нужно δ), чтобы

$$1-\varepsilon_2 K_7 C_1-\delta_3^{\lambda'}\frac{K_7K_4C_1}{\lambda'}>\frac{1}{2}.$$

Выбирая λ_1 настолько большим, чтобы

$$\lambda_1-K_7\varepsilon_2-K_7K_5>\frac{1}{2},$$

получим неравенство

$$N_{\delta,\beta}(v_2)+\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}v_2(\rho-\delta)dxdt\leq K_8\Bigg[||f||^2_{L_{2,1}(Q^T)}+\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{\partial Q_\delta}v_1^2dsdt+\int\limits_{Q_\delta}v_1(x,\beta)(\rho-\delta)dx\Bigg],$$

из которого немедленно следует утверждение леммы 3.

Будем говорить, что функция $u(x,t)$ *принадлежит классу* H_2, если

$$\sup_{\substack{\delta,\beta\in[0,\delta_0]\\ T'\in(T/2,T)}}\Bigg[\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{Q_\delta}u^2dsdt+\int\limits_{Q_\delta}u^2(x,\rho)(\rho(x)-\delta)dx\Bigg]<\infty.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы обобщенное из* $W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ *решение уравнения* (1) *с* $f\in L_{2,1}(Q^T)\cap L_{2,loc}(Q^T)$ *принадлежало классу* H_2 *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_0^T\int\limits_Q\sum_{i,j=1}^n\frac{a_{ij}\rho_{x_i}\rho_{x_j}}{|\nabla\rho|}u^2(\rho-\delta)dxdt+\sup_{\delta,T'}\Bigg\{\int\limits_{Q_\delta}u^2(x,T')(\rho-\delta)dx\Bigg\}<\infty.$$

Доказательство. Необходимость следует из леммы 3.
Достаточность следует из леммы 2.
Теорема доказана.

Будем говорить, что принадлежащая $W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ функция $u(x,t)$ *удовлетворяет граничному условию*

$$u|_{\partial Q\times(0,T)}=\varphi(x,t), \tag{10}$$

где $\varphi(x,t)\in L_2(\partial Q\times(0,T))$, *в смысле* L_2, если для любой точки $x_0\in\partial Q$ существует такая окрестность $B(x_0)\in\Gamma(x_0)$, что для любого $T'\in[T/2,T)$

$$\lim_{\substack{\delta\to+0\\ \beta\to+0}}\int\limits_{\beta}^{T'}\int\limits_{B(x_0)}|u(x_{\delta,x_0}(x),t)-\varphi(x,t)|^2dsdt=0. \tag{10'}$$

Будем также говорить, что принадлежащая $W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ функция $u(x,t)$ *удовлетворяет начальному условию*

$$u|_{t=0}=u_0(x), \tag{11}$$

где $u_0(x) \in L_2(Q, r)$, *в смысле* L_2 *с весом* $r(x)$, если

$$\lim_{\substack{\delta\to+0\\ \beta\to+0}} \int\limits_{Q_\delta} (u(x,\beta) - u_0(x))^2 r(x)dx = 0. \tag{11$'$}$$

Определение 2. Принадлежащая $W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ функция $u(x,t)$ называется *обобщенным из* $W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ *решением* первой смешанной задачи (1), (10), (11) с $f(x,t) \in L_{2,1}(Q^T) \cap L_{2,loc}(Q^T)$, если она удовлетворяет интегральному тождеству (2) для всех финитных в Q^T функциях $w(x,t) \in H^1(Q^T)$ и удовлетворяет граничному и начальному условиям (10), (11) в смысле равенств (10$'$), (11$'$).

Теорема 2. *При любых* $\varphi \in L_2(\partial Q \times (0,T))$, $u_0(x) \in L_2(Q,r)$ *и любой* $f \in L_{2,1}(Q^T) \cap L_{2,loc}(Q^T)$ *первая смешанная задача* (1), (10), (11) *имеет обобщенное из* $W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ *решение. Это решение единственно и для него справедлива оценка*

$$\max_{\substack{\delta\in(0,\delta_0]\\ \beta\in(0,\delta_0]}} \Big[||u||^2_{L_2(\partial Q_\delta\times(\beta,T))} + ||u(x,\beta)||^2_{L_2(Q_\delta,r)}\Big] + \int\limits_0^T\int\limits_Q \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}) r(x)dxdt$$

$$+ \int\limits_0^T\int\limits_Q u^2(x,t)r(x)dxdt \le C\Big(||f||^2_{L_{2,1}(Q^T)} + ||\varphi||^2_{L_2(\partial Q\times(0,T))} + ||u_0||^2_{L_2(Q,r)}\Big). \tag{12}$$

Доказательство. Докажем сначала справедливость для решения из $W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ задачи (1), (10), (11) оценки (12), а следовательно, единственность решения.

Пусть $u(x,t)$ — обобщенное из $W^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ решение задачи (1), (10), (11). В силу (10$'$), (11$'$)

$$\lim_{\substack{\delta\to+0\\ \beta\to+0}} \int\limits_\beta^{T'}\int\limits_{\partial Q_\delta} u^2 ds = \int\limits_0^{T'}\int\limits_{\partial Q} \varphi^2 ds,$$

$$\lim_{\substack{\delta\to+0\\ \beta\to+0}} \int\limits_{Q_\delta} u^2(x,\rho)(\rho(x)-\delta)dx = \int\limits_Q u_0^2(x)\rho(x)dx,$$

и, следовательно, функция $u(x,t)$ принадлежит классу H_2. Но тогда по теореме 1 для любого $T' \in (T/2, T)$ функция $\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\rho(x)$ интегрируема по Q^T, и на основании теоремы Лебега при $\delta \to +0$ и $\beta \to +0$

$$\int\limits_\beta^{T'}\int\limits_{Q_\delta} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}(\rho-\delta)dxdt \longrightarrow \int\limits_0^{T'}\int\limits_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\rho(x)dxdt.$$

Аналогично,

$$\int\limits_\rho^{T'}\int\limits_{Q_\delta} u^2(\rho-\delta)dxdt \longrightarrow \int\limits_0^{T'}\int\limits_Q u^2\rho(x)dxdt \ \text{ при } \ \delta\to+0,\ \beta\to+0,$$

$$\int\limits_\rho^{T'}\int\limits_{Q_\delta} \frac{u^2}{[\rho(x)]^{1-\lambda'}}dxdt \longrightarrow \int\limits_0^{T'}\int\limits_Q \frac{u^2}{[\rho(x)]^{1-\lambda'}}dxdt \ \text{ при } \ \delta\to+0,\ \beta\to+0.$$

Следовательно, в неравенствах из лемм 2 и 3 можно перейти к пределу при $\delta \to +0,\ \beta \to +0$. В результате получим неравенство

$$\int_0^{T'}\int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\rho dxdt + \int_0^{T'}\int_Q |u|^2\rho(x)dxdt + \lim_{\substack{\delta\to+0\\ \beta\to+0}} M_{\delta,\rho}(u)$$
$$\le C\Big[||f||^2_{L_{2,1}(Q^T)} + ||\varphi||^2_{L_2(\partial Q\times(0,T))} + ||u_0||^2_{L_2(Q,r)}\Big],$$

из которого следует оценка (12).

Перейдем теперь к доказательству существования решения. Возьмем произвольные функции $\varphi \in L_2(\partial Q \times (0,T))$, $u_0 \in L_2(Q,r)$ и произвольную $f(x,t) \in L_{2,1}(Q^T) \cap L_{2,loc}(Q^T)$.

Пусть $\{\varphi_m\}$ — некоторая последовательность функций из $C^2(\partial Q \times [0,T])$, сходящаяся в $L_2(\partial Q \times (0,T))$ к функции $\varphi(x,t)$:

$$||\varphi_m - \varphi||_{L_2(\partial Q\times(0,T))} \to 0 \ \text{ при } \ m \to \infty, \tag{13}$$

а $\{u_{0m}\}$ — некоторая последовательность функции из $C^2(Q)$, сходящаяся в $L_2(Q,r)$ к функции $u_0(x)$:

$$||u_{0m} - u_0||_{L_2(Q,r)} \to 0 \ \text{ при } \ m \to \infty,$$

и пусть $\{f_m\}$ — некоторая последовательность функции из $C^1(\bar{Q}^T)$, сходящаяся в $L_{2,1}(Q^T)$ к функции $f(x,t)$:

$$||f_m - f||_{L_{2,1}(Q^T)} \to 0 \ \text{ при } \ m \to \infty.$$

Обозначим через $u_m(x,t)$ решение из $W_2^{2,1}(Q^T)$ задачи (1), (10), (11) с функциями φ_m, u_{0m}, f_m.

Так как решение из $W_{2,loc}^{2,1}(Q^T)$ является также решением из $W_{2,loc}^{1,0}(Q^T)$, то для $u_m(x,t)$ справедлива оценка (12). Следовательно, последовательность $\{u_m\}$ сходится к некоторой функции $u(x,t)$ в банаховом пространстве B с нормой

$$||u||^2_B = \int_0^{T'}\int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\rho(x)dx + \int_0^{T'}\int_Q |u|^2\rho(x)dx$$
$$+ \max_{\substack{\delta\in[0,\delta_0]\\ \beta\in[0,\beta_0]}} \Big[\int_\beta^{T'}\int_{\partial Q_\delta} |u|^2 dsdt + \int_{Q_\delta} u^2(x,\beta)(\rho-\delta)dx\Big],$$

т. е.

$$||u_m - u|| \to 0 \ \text{ при } \ m \to \infty. \tag{14}$$

Так как для любой $Q' \subset Q$ последовательность $\{u_m(x,t)\}$ сходится в $W_2^{1,0}(Q\times(0,T))$ к функции $u(x,t)$, то функция $u(x,t)$ является обобщенным решением уравнения (1) из $W_{2,loc}^{1,0}(Q^T)$. Следовательно, нам необходимо только установить, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет соотношениям $(10')$ и $(11')$.

Возьмем произвольную точку $x_0 \in \partial Q$, и пусть $B(x_0) \subset \partial Q$ — окрестность точки x_0, для которой выполняется соотношение

$$\lim_{\substack{\delta\to+0\\ \beta\to+0}} \int_\beta^{T'}\int_{B(x_0)} (u_m(x_{\delta,x_0}(x),t) - \varphi_m(x,t))^2 dsdt = 0. \tag{15}$$

Так как при любых $\delta \in (0, \delta_1]$, $\beta \in (0, B_0]$

$$\int\limits_{\beta}^{T'} \int\limits_{B(x_0)} (u(x_{\delta,x_0}(x),t) - \varphi(x,t))^2 ds dt$$
$$\leq \int\limits_{\beta}^{T'} \int\limits_{B(x_0)} (u(x_{0,x_0}(x),t) - u_m(x_{\delta,x_0}(x),t))^2 ds dt$$
$$+ \int\limits_{\beta}^{T'} \int\limits_{B(x_0)} (u_m(x_{\delta,x_0}(x),t) - \varphi_m(x,t))^2 ds dt + \int\limits_{\beta}^{T'} \int\limits_{B(x_0)} (\varphi_m(x,t) - \varphi(x,t))^2 ds dt,$$

то в силу (13), (14), (15) получаем, что

$$\lim_{\substack{\delta\to+0\\ \beta\to+0}} \int\limits_{\beta}^{T'} \int\limits_{B(x_0)} |u(x_{\delta,x_0}(x),t) - \varphi(x,t)|^2 ds dt = 0,$$

т. е. $u(x,t)$ стремится к граничной функции $\varphi(x,t)$ в смысле равенства $(10')$.

Аналогично показывается, что функция $u(x,t)$ стремится к начальной функции в смысле равенства $(11')$.

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: ИЭЛ, 1957.

Петрушко Игорь Мелетиевич
Россия, Москва,
Московский энергетический институт (технический университет)
PetrushkoIM@mpei.ru, petrushko@mail.ru

Капицына Татьяна Владимировна
Россия, Москва,
Московский энергетический институт (технический университет)
KapitsynaTV@mpei.ru