УДК 517.956.4

КОНТАКТНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ГЕЛЬДЕРОВСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

С. В. Попов

В работе изучаются краевые задачи для уравнений параболического типа с меняющимся направлением эволюции в пространствах Гёльдера. Для таких задач показано, что гёльдеровские классы решений параболических уравнений переменного типа четвертого порядка существенно зависят как от нецелого показателя $p-[p]$, так и от условий сопряжения. Кроме того, в работе устанавливается разрешимость краевой задачи для параболического уравнения второго порядка с меняющимся направлением эволюции. Рассматривается общий случай границы раздела двух сред, в который, в частности, включаются ортогональные потоки, косое соударение и т.д.

Изучаются параболические уравнения с меняющимся направлением эволюции с помощью применения теории сингулярных интегральных уравнений [1–4], а также систем этих уравнений [5].

В краевых задачах для строго параболических уравнений гладкость начальных и граничных данных без дополнительных условий на данные задачи полностью определяет принадлежность решения гёльдеровским пространствам $H_{x\ t}^{p,p/2}$. В случае уравнений с меняющимся направлением эволюции гладкость начальных и граничных данных не обеспечивает принадлежность решения пространствам $H_{x\ t}^{p,p/2}$. Применение теории сингулярных уравнений дает возможность наряду с гладкостью данных задачи указать дополнительно необходимые и достаточные условия, обеспечивающие принадлежность решения пространствам $H_{x\ t}^{p,p/2}$ при $p \geq 2$. Более того, применением единого подхода при общих условиях сопряжения (склеивания) для таких уравнений удается показать, что нецелый показатель $p-[p]$ пространства $H_{x\ t}^{p,p/2}$ может существенно влиять как на количество условий разрешимости, так и на гладкость искомого решения.

В работе [6] предлагается единообразный подход к построению моделей сопряжения различных физических процессов, таких, как распространение тепла в неоднородных средах (задачи типа дифракции), взаимодействие фильтрационных и каналовых потоков жидкости (фильтрация в скважину), возвратные течения в пограничном слое за точкой его отрыва и другие.

Цель настоящей работы — показать также, что гёльдеровские классы решений параболических уравнений переменного типа существенно зависят от нецелого показателя $p-[p]$. Некоторые предварительные результаты о связи гладкости решений параболических уравнений переменного типа с условиями склеивания и нецелым показателем гёльдеровских классов были установлены в работах [7–9]. Кроме того, в работе рассматривается общий случай границы раздела двух сред, в который, в частности, включаются также и ортогональные потоки, косое соударение и т.д.

Работа поддержана научной программой "Развитие научного потенциала высшей школы" Министерством образования и науки РФ (коды проектов 8427 и УР 04.01.449)

Отметим, что большое число работ посвящено изучению линейных уравнений второго порядка. Общая теория краевых задач для уравнений смешанного типа с произвольными коэффициентами и многообразием смены типа были предметом исследований многих авторов (см. [10, 11] и имеющуюся там библиографию). В работах [1, 13–15] устанавливается разрешимость краевых задач в гёльдеровских пространствах для некоторых классов уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени с границей раздела, имитирующей противоположные спутные потоки.

1. Уравнения четвертого порядка

В области $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \equiv \mathbb{R}$ рассмотрим параболические уравнения четвертого порядка

$$\operatorname{sgn} x\, u_t = Lu, \tag{1}$$

где

$$Lu = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(k(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + c(x,t)u,$$

$$k(x,t) \geq \delta > 0, \quad c(x,t) \leq 0.$$

Решение уравнения ищется из пространства Гельдера $H^{p,p/4}_{x\ t}(Q^{\pm})$, $p = 4l + \gamma$, $0 < \gamma < 1$ (в обозначениях [16]), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = u_0(x) \ \ (x \in \Omega^+), \quad u(x,T) = u_T(x) \ \ (x \in \Omega^-) \tag{2}$$

и условиям склеивания

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(-0,t) = \sigma_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(+0,t) \quad (k = 0,1,2,3), \tag{3}$$

где σ_k — действительные постоянные, $l \geq 1$ — целое число.

Методом параболических потенциалов простого слоя, с неизвестными плотностями, построенных при помощи фундаментального решения и элементарных решений Б. Пини [17, 18], краевая задача (1)–(3) приводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений нормального типа

$$K\vec{\beta} \equiv A\vec{\beta}(t) - \frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{B(t,\tau)\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \vec{Q}(t), \tag{4}$$

где

$$\vec{\beta}(t) = (\tilde{\beta}_0^{(l-1)}(t), \tilde{\beta}_1^{(l-1)}(t)),$$

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_0 - \sigma_2 - 2\sqrt{2}\sigma_3 & \sigma_0 + \sigma_2 \\ \sigma_0 + \sigma_2 & \sigma_0 - \sigma_2 \end{pmatrix},$$

$$B(t,\tau) = \begin{pmatrix} \sigma_0(\frac{t}{\tau})^{5/4} + \sigma_2(\frac{t}{\tau})^{3/4} & \sigma_0(\frac{t}{\tau})^{5/4} - \sigma_2(\frac{t}{\tau})^{3/4} \\ \sigma_0(\frac{t}{\tau})^{5/4} - \sigma_2(\frac{t}{\tau})^{3/4} & \sigma_0(\frac{t}{\tau})^{5/4} + \sigma_2(\frac{t}{\tau})^{3/4} + 2\sqrt{2}\sigma_1(\frac{t}{\tau})^{1/2} \end{pmatrix},$$

$$\vec{Q}(t) = (\bar{F}_0^{l-1} + \bar{F}_2^{l-1} - 2\sqrt{2}\bar{F}_3^{l-1}, \bar{F}_0^{l-1} - \bar{F}_2^{l-1} - 2\sqrt{2}\bar{F}_1^{l-1}).$$

Систему сингулярных уравнений (4) можно переписать так

$$K\vec{\beta} \equiv A\vec{\beta}(t) - \frac{B}{\pi}\int\limits_0^T \frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T M(t,\tau)\vec{\beta}(\tau)\,d\tau = \vec{Q}(t), \tag{5}$$

где

$$B \equiv B(t,t) = \begin{pmatrix} \sigma_0 + \sigma_2 & \sigma_0 - \sigma_2 \\ \sigma_0 - \sigma_2 & \sigma_0 + \sigma_2 + 2\sqrt{2}\sigma_1 \end{pmatrix},$$

$$M(t,\tau) = \frac{B - B(t,\tau)}{\tau - t}.$$

Для того чтобы выделить характеристическую часть оператора K, перепишем систему сингулярных уравнений (5) в виде

$$CK\vec{\beta} = C\vec{Q}(t), \tag{6}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_0 + \sigma_2 + 2\sqrt{2}\sigma_1 & \sigma_2 - \sigma_0 \\ \sigma_2 - \sigma_0 & \sigma_0 + \sigma_2 \end{pmatrix},$$

$$CA = 2\sqrt{2}\begin{pmatrix} \sigma_0\sigma_1 - \sigma_0\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_2 - 2\sqrt{2}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_0\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2 + \sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 \\ \sigma_0\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 + \sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$CB = 2\sqrt{2}\begin{pmatrix} \sigma_0\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2 + \sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_0\sigma_1 + \sigma_1\sigma_2 + \sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь формулой перестановки Пуанкаре – Бертрана [2, 3, 5], выделим характеристическую часть K^0 оператора CK системы уравнений (6)

$$K^0\vec{\beta} \equiv aE\vec{\beta}(t) - \frac{bE}{\pi}\int\limits_0^T \frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau,$$

где E — единичная матрица,

$$a = \sigma_0\sigma_1 + \sigma_0\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 + \sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3,$$

$$b = \sigma_0\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 + \sqrt{2}\sigma_1\sigma_2 - \sigma_0\sigma_1.$$

Полученную систему сингулярных интегральных уравнений

$$K^0\vec{\beta} = \vec{G}, \quad \vec{G} = aA^{-1}\left(\vec{Q} - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T M(t,\tau)\vec{\beta}(\tau)\,d\tau\right) \tag{7}$$

будем решать в классе функций ограниченных на концах отрезка $(0,1)$. Для этого введем кусочно-голоморфную функцию

$$\vec{\Psi}(\eta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^T \frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau - \eta}\,d\tau.$$

Тогда система (7) примет вид

$$\begin{cases} \vec{\Psi}^+(t) = \frac{a+bi}{a-bi}\vec{\Psi}^-(t) + \frac{\vec{G}(t)}{a-bi} \quad (0 < t < T), \\ \\ \vec{\Psi}^+(t) = \vec{\Psi}^-(t), \quad t < 0, \quad t > 0, \end{cases} \tag{8}$$

Решение уравнений (7) эквивалентно решению задачи Римана (8) при дополнительном условии $\vec{\Psi}(\infty) = 0$. Рассмотрим $k = 1$. Так как $g = \frac{a+ib}{a-ib} = e^{i2\pi\theta}$, $\theta = \frac{1}{\pi}\arctan|\frac{a}{b}|$ и

$$\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^T \frac{\ln g}{\tau - \eta}\right) = \eta^{-\theta}(\eta - T)^{\theta},$$

то в указанном классе в случае, когда a и b одного знака, каноническая функция $X(\eta) = \eta^{1-\theta}(\eta - T)^{\theta}$, индекс задачи (8) $\varkappa = -1$. В случае же, когда a и b разного знака, каноническая функция $X(\eta) = \eta^{\theta}(\eta - T)^{1-\theta}$. Согласно общей теории [2, 3]

$$\vec{\Psi}(\eta) = \frac{X(\eta)}{2\pi i}\int\limits_0^T \frac{\vec{G}(\tau)\,d\tau}{(a-bi)X^+(\tau)(\tau - \eta)}$$

при условии

$$\int_0^T \frac{\vec{G}(\tau)}{X(\tau)}\,d\tau = 0. \tag{9}$$

Тогда

$$\vec{\beta}(t) = \vec{\Psi}^+(t) - \vec{\Psi}^-(t) = \frac{1}{2}\vec{G}(t) + \frac{X(t)}{2\pi}\int\limits_0^T \frac{\vec{G}(\tau)\,d\tau}{X(\tau)(\tau - t)}. \tag{10}$$

Формулы (9) можно рассматривать как необходимое и достаточное условие ограниченности $\vec{\beta}(t)$ при $t = T$.

Подставляя в (10) значения $\vec{G}_k(t)$, приходим к системе уравнений Фредгольма

$$\vec{\beta} + K^* k\vec{\beta} = \vec{Q}^*, \tag{11}$$

где

$$K^* k\vec{\beta} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T N(t,\tau)\vec{\beta}(\tau)\,d\tau.$$

Всякие ограниченные и интегрируемые решения систем уравнений Фредгольма (11) будут, очевидно, принадлежать пространству Гельдера во всех точках контура $(0, T)$ отличных от концов. В самом деле, функции $\vec{Q}^*$ будут, очевидно, удовлетворять условию Гельдера во всех точках контура $(0, T)$ отличных от концов. Функция $M(t, \tau)$ имеет интегрируемые особенности при $t = \tau$ во всех точках контура $(0, T)$ отличных от концов. В силу соответствующих теорем поведения интегралов типа Коши на концах контура интегрирования [1–3] легко вывести, что $M(t, \tau)$, $\vec{Q}^*$ на концах $0, T$ будут вести себя как $t^{\frac{1}{2}+\theta}(T-t)^{\frac{1}{2}-\theta}$ или $t^{\frac{1}{2}-\theta}(T-t)^{\frac{1}{2}+\theta}$, причем соответственно [3, § 51] $\vec{\beta}(t) \in H^{\frac{1+\gamma}{4}}(0, T - \delta)$ или $\vec{\alpha}(t) \in H^{\frac{1+\gamma}{4}}(\delta, T)$, где δ — положительное фиксированное малое число.

Таким образом, ядро $M(t,\tau)$, имея подвижные и неподвижные бесконечности порядка меньше единицы, удовлетворяет всем условиям, которые накладываются на эти функции в теории интегральных уравнений Фредгольма. Более того [3, § 101], путем замены аргумента интегрирования τ можно избавиться от неподвижных бесконечностей. Из указанных свойств ядра $M(t,\tau)$ и свободного члена $\vec{Q}^*$ следует, что всякие ограниченные и интегрируемые решения систем уравнений Фредгольма (11) на концах $0, T$ ведут себя как $t^{\frac{1}{2}+\theta}(T-t)^{\frac{1}{2}-\theta}$, если a и b одинакового знака, или как $t^{\frac{1}{2}-\theta}(T-t)^{\frac{1}{2}+\theta}$, если же a и b разного знака.

В силу леммы о принадлежности классу Гельдера интеграла типа Коши на концах контура интегрирования (см. [12, 13]) при выполнении неравенства $\frac{1+\gamma}{4} < \frac{1}{2}-\theta$ $(\theta < \frac{1}{4})$ получим, что решения уравнений Фредгольма (11) принадлежат пространству $H^{\frac{1+\gamma}{4}}(0,1)$ и обращаются в нуль на концах $0,1$ порядка $\frac{1+\gamma}{4}$. Кроме того, решения уравнений Фредгольма (11) удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\frac{1}{2}-\theta$ при $1-4\theta < \gamma < 1$ и условию Гельдера с показателем $\frac{1}{2}-\theta-\varepsilon$ при $\gamma = 1-4\theta$.

Разрешимость системы уравнений Фредгольма (11) следует из единственности решения основной задачи (1)–(3) и однозначности представления их через потенциалы. Так как решения уравнения (1) ищутся из пространства $H^{p,p/4}_{x\ t}$, то для разрешимости задачи (1)–(3) получим $4l$ условий разрешимости [8, 9]

$$L_s(u_0, u_T) = 0, \quad s = 1, \dots, 4l. \tag{12}$$

Теорема 1. *Пусть $u_0, u_T \in H^p$ $(p = 4l+\gamma)$. Тогда при выполнении $4l$ условий (12) существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (3) из пространства $(\theta = \frac{1}{\pi}\arctan|\frac{a}{b}| < \frac{1}{4})$*

1) *$H^{p,p/4}_{x\ t}$, если $0 < \gamma < 1-4\theta$;*

2) *$H^{q,q/4}_{x\ t}$, $q = 4l+1-4\theta$, если $1-4\theta < \gamma < 1$;*

3) *$H^{q-\varepsilon,(q-\varepsilon)/4}_{x\ \ \ t}$, если $\gamma = 1-4\theta$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.*

Замечание. Если выполнены условия теоремы при $\theta \geq \frac{1}{4}$, то, как показано в [7], единственное решение задачи (1)–(3) существует из искомого пространства $H^{p,p/4}_{x\ t}$ при выполнении $6l+2$ условий вида (12).

Пример 1. Для уравнения (1) с начальными условиями (2) рассмотрим условия склеивания (3) при $\sigma_0 = 1, \sigma_1 = 1, \sigma_2 = -1, \sigma_3 = -1$. В этом случае система сингулярных уравнений (7) будет иметь вид

$$(\sqrt{2}+1)E\vec{\beta}(t) - \frac{(\sqrt{2}+1)E}{\pi}\int_0^T \frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \vec{G},$$

и единственное решение исходной задачи существует при выполнении $6l+2$ условий вида (12).

Пример 2. Для уравнения (1) с начальными условиями (2) рассмотрим условия склеивания (3) при $\sigma_0 = 1, \sigma_1 = -1, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = -1$. В этом случае система сингулярных уравнений (7) будет иметь вид

$$(\sqrt{2}-1)E\vec{\beta}(t) - \frac{(\sqrt{2}+1)E}{\pi}\int_0^T \frac{\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \vec{G},$$

в этом случае $\theta = \frac{1}{\pi}\arctan\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \approx 0,054 < 0,25$ и мы находимся в условиях доказанной теоремы и единственное решение исходной задачи существует при выполнении $4l$ условий (12).

2. Уравнения второго порядка

В области Q рассмотрим уравнение

$$g(x)\,u_t = u_{xx}, \quad g(x) = \operatorname{sgn} x. \tag{13}$$

В пространстве Гельдера $H_{x\ t}^{p,p/2}(Q^{\pm})$, $p = 2l+\gamma$, $0<\gamma<1$, ищется решение уравнения (13), удовлетворяющее следующим начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad x>0; \quad u(x,T) = \varphi_2(x), \quad x<0, \tag{14}$$

и условиям склеивания

$$u(-0,t) = u(+0,t), \quad z\cdot u_x(-0,t) = u_x(+0,t), \tag{15}$$

где $l \geq 1$ — целое число, $Q^{\pm} = \mathbb{R}^{\pm}\times(0,T)$, $z = r\cdot\exp(i\varphi)$ — комплексное число.

Для удобства вместо уравнения (13) будем рассматривать систему уравнений

$$u_t^1 = u_{xx}^1, \quad -u_t^2 = u_{xx}^2 \tag{16}$$

в области Q^+. При этом начальные условия и условия склеивания будут иметь вид

$$u^1(x,0) = \varphi_1(x), \quad u^2(x,T) = \varphi_2(x), \quad x>0, \tag{17}$$

$$u^1(0,t) = u^2(0,t), \quad u_x^1(0,t) + z\cdot u_x^2(0,t) = 0. \tag{18}$$

Будем предполагать, что $\varphi_i(x) \in H^p(\mathbb{R})$ $(i=1,2)$. Тогда функции

$$\omega_1(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right)\varphi_1(\xi)\,d\xi,$$
$$\omega_2(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(T-t)}}\int\limits_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(T-t)}\right)\varphi_2(\xi)\,d\xi,$$

являются решениями уравнений (16), удовлетворяющими условиям (17) в $\mathbb{R}$. В силу метода исследования будем пользоваться интегральным представлением решения для системы уравнений (16)

$$\begin{aligned} u^1(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t x\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}\alpha(\tau)\,d\tau + \omega_1(x,t),\\ u^2(x,t) &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_t^T x\exp\left(-\frac{x^2}{4(\tau-t)}\right)(\tau-t)^{-\frac{3}{2}}\beta(\tau)\,d\tau + \omega_2(x,t). \end{aligned} \tag{19}$$

Функции, представленные формулами (19), удовлетворяют начальным условиям (17) и уравнениям (16) соответственно.

Согласно [16, 13] u^k принадлежат пространству $H_{x\ t}^{p,p/2}$, если введенные нами неизвестные плотности $\alpha(t)$, $\beta(t)$ принадлежат пространству $H^{p/2}$, причем

$$\alpha^{(s)}(0) = \beta^{(s)}(T) = 0 \quad (s = 0,\ldots,l).$$

Из условий склеивания (18) получим систему уравнений относительно α, β

$$\begin{cases} \alpha(t)+\omega_1(0,t)=-\beta(t)+\omega_2(0,t), \\ -\frac{1}{\sqrt{\pi}}t^{-\frac12}\alpha(0)-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{\alpha'(\tau)}{(t-\tau)^{\frac12}}\,d\tau+\omega_{1x}(0,t) \\ \qquad\qquad +\frac{z}{\sqrt{\pi}}(T-t)^{-\frac12}\beta(T)-\frac{z}{\sqrt{\pi}}\int\limits_t^T \frac{\beta'(\tau)}{(\tau-t)^{\frac12}}\,d\tau+z\cdot\omega_{2x}(0,t)=0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \alpha(t)+\beta(t)=\Phi_0(t), \\ \int\limits_0^t \frac{\alpha'(\tau)}{(t-\tau)^{\frac12}}\,d\tau+z\cdot\int\limits_t^T \frac{\beta'(\tau)}{(\tau-t)^{\frac12}}\,d\tau+t^{-\frac12}\alpha(0)-z\cdot(T-t)^{-\frac12}\beta(T)=\Phi_1(t), \end{cases} \tag{20}$$

где

$$\Phi_0(t)=\omega_2(0,t)-\omega_1(0,t),$$
$$\Phi_1(t)=\sqrt{\pi}(z\cdot\omega_{2x}(0,t)+\omega_{1x}(0,t)).$$

При выполнении условий

$$\beta(0)=\Phi_0(0), \quad \beta(T)=0 \tag{21}$$

систему уравнений (20) можно переписать так

$$\begin{cases} \alpha(t)+\beta(t)=\Phi_0(t), \\ \int\limits_0^t \frac{\alpha'(\tau)}{(t-\tau)^{\frac12}}\,d\tau+z\cdot\int\limits_t^T \frac{\beta'(\tau)}{(\tau-t)^{\frac12}}\,d\tau=\Phi_1(t). \end{cases} \tag{22}$$

Отметим, что первое условие в (21) необходимо и достаточно для того, чтобы было выполнено условие $\alpha(0)=0$.

Если второе уравнение в (22) обратить при помощи известных формул обращения оператора Абеля, то

$$\begin{cases} \alpha(t)+\beta(t)=\Phi_0(t), \\ \alpha'(t)+\frac{z}{\pi}\int\limits_0^T (\frac{\tau}{t})^{1/2}\frac{\beta'(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{\Phi_1(\tau)}{(t-\tau)^{\frac12}}\,d\tau. \end{cases} \tag{23}$$

Введем обозначения $F_0^s(t)=\Phi_0^{(s)}(t)-\Phi_0^{(s)}(0)$,

$$F_1^s(t)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{\Phi_1^{(s-1)}(\tau)-\Phi_1^{(s-1)}(0)}{(t-\tau)^{\frac12}}\,d\tau \quad (s=1,\dots,l).$$

Легко видеть, что $F_0^l(t)$, $F_1^l(t)$ принадлежат пространству Гельдера с показателем $\gamma/2$, причем $F_0^l(t)=F_1^l(t)=O(t^{\gamma/2})$ для малых t.

Предположим, что функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ принадлежат пространству $H^{p/2}(0,T)$. Тогда из системы (23) следует, что

$$z\cdot\int\limits_0^T \frac{\beta'(\tau)}{\tau^{1/2}}\,d\tau=\Phi_1(0). \tag{24}$$

При выполнении (24) систему (23) можно переписать так

$$\begin{cases} \alpha'(t)+\beta'(t)=\Phi_0'(0)+F_0^1(t), \\ \alpha'(t)+\frac{z}{\pi}\int\limits_0^T (\frac{t}{\tau})^{1/2}\frac{\beta'(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=F_1^1(t). \end{cases} \tag{25}$$

Пусть выполнены условия

$$\beta'(0) = \Phi_0'(0), \quad \beta'(T) = 0, \tag{26}$$

введем в системе (25) новые искомые функции $\bar{\beta}'(t) = \beta'(t) - \beta'(0)\frac{T-t}{T}$. Тогда систему (25) представим в виде

$$\begin{cases} \alpha'(t) + \bar{\beta}'(t) = \beta'(0)\frac{t}{T} + F_0^1(t), \\ \alpha'(t) + \frac{z}{\pi}\int\limits_0^T (\frac{t}{\tau})^{1/2}\frac{\bar{\beta}'(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \frac{4z}{\pi}\beta'(0)F(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; \frac{t}{T})(\frac{t}{T})^{\frac{1}{2}} + F_1^1(t), \end{cases} \tag{27}$$

где

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{T-\tau}{T(\tau - t)}\,d\tau = -\frac{4}{\pi}F\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; \frac{t}{T}\right)\left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, если $l > 1$, то продифференцируем полученную систему уравнений (27)

$$\begin{cases} \alpha''(t) + \bar{\beta}''(t) = \Phi_0''(t), \\ \alpha''(t) + \frac{z}{2\pi}\left(t^{-\frac{1}{2}}\int\limits_0^T \frac{\bar{\beta}'(\tau)}{\tau^{1/2}(\tau - t)}\,d\tau + t^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}\int\limits_0^T \frac{\bar{\beta}'(\tau)}{\tau^{1/2}(\tau - t)}\,d\tau\right) \\ \qquad = \frac{2z}{T\pi}\beta'(0)F(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}; \frac{t}{T})(\frac{t}{T})^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\pi}\Phi_1'(0)t^{-\frac{1}{2}} + F_1^2(t). \end{cases} \tag{28}$$

Из этой системы следует, что

$$\frac{z}{2}\int\limits_0^T \frac{\bar{\beta}'(\tau)}{\tau^{3/2}}\,d\tau = 2\frac{z}{\sqrt{T}}\beta'(0) + \Phi_1'(0). \tag{29}$$

Систему (28) при выполнении условия (29) и $\beta'(T) = 0$ можно переписать в виде

$$\begin{cases} \alpha''(t) + \beta''(t) = \Phi_0''(0) + F_0^2(t), \\ \alpha''(t) + \frac{z}{\pi}\int\limits_0^T (\frac{t}{\tau})^{1/2}\frac{\beta''(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = F_1^2(t). \end{cases} \tag{30}$$

Таким образом, мы получили уравнения (30), имеющие точно такой же вид, как и уравнения (25). Легко видеть, что при выполнении условий

$$\begin{cases} \beta^{(s)}(0) = \Phi_0^{(s)}(0), \quad \beta^{(s)}(T) = 0, \\ \frac{z}{2}\int\limits_0^T \frac{\beta^{(s)}(\tau) - \beta^{(s)}(0)\frac{T-\tau}{T}}{\tau^{3/2}}\,d\tau = 2\frac{z}{\sqrt{T}}\beta^{(s)}(0) + \Phi_1^{(s)}(0), \quad s = 2, \ldots, l-1, \end{cases} \tag{31}$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha^{(l)}(t) + \beta^{(l)}(t) = \Phi_0^{(l)}(0) + F_0^l(t), \\ \alpha^{(l)}(t) + \frac{z}{\pi}\int\limits_0^T (\frac{t}{\tau})^{1/2}\frac{\beta^{(l)}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = F_1^l(t). \end{cases} \tag{32}$$

Потребуем выполнение условий

$$\beta^{(l)}(0) = \Phi_0^{(l)}(0), \quad \beta^{(l)}(T) = 0 \tag{33}$$

и введем новую искомую функцию $\tilde{\beta}^{(l)}(t) = \beta^{(l)}(t) - \beta^{(l)}(0)\frac{T-t}{T}$. Тогда систему (32) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \alpha^{(l)}(t) + \tilde{\beta}^{(l)}(t) = \overline{F}_0^{\,l}(t), \\ \alpha^{(l)}(t) + \frac{z}{\pi}\int\limits_0^T (\frac{t}{\tau})^{1/2}\frac{\tilde{\beta}^{(l)}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \overline{F}_1^{\,l}(t), \end{cases} \tag{34}$$

где $\overline{F}_0^{\,l}(t) = \beta^{(l)}(0)\frac{t}{T} + F_0^l(t)$, $\overline{F}_1^{\,l}(t) = \frac{4z}{\pi}\beta^{(l)}(0)F(-\frac{1}{2},1,\frac{3}{2};\frac{t}{T})(\frac{t}{T})^{\frac{1}{2}} + F_1^l(t)$, принадлежат пространству $H^{\gamma/2}(0,T)$, причем $\overline{F}_0^{\,l}(t) = \overline{F}_1^{\,l}(t) = O(t^{\gamma/2})$ для малых t.

Исключая $\alpha^{(l)}(t)$ в системе (34), получим сингулярное уравнение относительно $\tilde{\beta}^{(l)}(t)$

$$\tilde{\beta}^{(l)}(t) - \frac{z}{\pi}\int\limits_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2}\frac{\tilde{\beta}^{(l)}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = Q(t), \tag{35}$$

где

$$Q(t) = \overline{F}_0^{\,l}(t) - \overline{F}_1^{\,l}(t).$$

Сингулярное интегральное уравнение (35) будем рассматривать как уравнение относительно $\beta_0(t) = \tilde{\beta}^{(l)}t^{-\frac{1}{2}}$. Найдем решения $\beta_0(t)$, неограниченные при $t = 0$ (допускающие особенность меньше единицы) и ограниченные при $t = T$. Для этого введем кусочно-голоморфную функцию (см. [2, 3])

$$\Psi(\eta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^T \frac{\beta_0(\tau)}{\tau - \eta}\,d\tau.$$

Тогда на основании формул Сохоцкого – Племеля уравнение (35) эквивалентно решению краевой задачи Римана

$$\Psi^+(t) = \frac{1 + i\cdot z}{1 - i\cdot z}\Psi^-(t) + \frac{Q(t)}{t^{\frac{1}{2}}(1 - i\cdot z)}, \quad t \in (0,T),$$

$$\Psi^+(t) = \Psi^-(t), \quad t \in (-\infty,0)\cup(0,+\infty),$$

при дополнительном условии $\Psi(\infty) = 0$. Отметим, что

$$G = \frac{1 + i\cdot z}{1 - i\cdot z} = \frac{(1 - r\sin\varphi) + i\cdot r\cos\varphi}{(1 + r\sin\varphi) - i\cdot r\cos\varphi},$$

$$\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^T \frac{\ln G}{\tau - \eta}\,d\tau\right) = (\eta - T)^{\theta - \theta_1\cdot i}\eta^{-\theta + \theta_1\cdot i}, \quad \theta_1 = \frac{\ln|G|}{2\pi},$$

$$\theta = \frac{1}{2\pi}\left(\arctan\frac{r\cos\varphi}{1 - r\sin\varphi} + \arctan\frac{r\cos\varphi}{1 + r\sin\varphi}\right)$$

при $|r\sin\varphi| \le 1$, $\varphi \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ и при $|r\sin\varphi| > 1$, $\varphi \in (-\frac{\pi}{2};0)\cup(\frac{\pi}{2};\pi)$, кроме того,

$$\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^T \frac{\ln G}{\tau - \eta}\,d\tau\right) = (\eta - T)^{-\theta - \theta_1\cdot i}\eta^{\theta + \theta_1\cdot i}$$

при $|r\sin\varphi| \le 1$, $\varphi \in (-\pi;-\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2};\pi)$ и при $|r\sin\varphi| > 1$, $\varphi \in (-\pi;-\frac{\pi}{2})\cup(0;\frac{\pi}{2})$. В указанном выше классе каноническая функция равна $\chi(\eta) = (\eta - T)^{\theta}\eta^{-\theta}\omega(\eta)$ или $\chi(\eta) = (\eta - T)^{1-\theta}\eta^{-1+\theta}\omega(z)$, индекс $\varkappa = 0$, где $\omega(\eta) = (\eta - T)^{-\theta_1\cdot i}\eta^{\theta_1\cdot i}$.

Согласно общей теории [2, 3]

$$\Psi(\eta) = \frac{\chi(\eta)}{2\pi i}\int\limits_0^T \frac{Q(\tau)}{\tau^{\frac{1}{2}}(1 + r\sin\varphi - i\cdot r\cos\varphi)\chi^+(\tau)(\tau - \eta)}\,d\tau.$$

Тогда

$$\tilde\beta^{(l)}(t) = t^{\frac12}(\Psi^+(t) - \Psi^-(t))$$
$$= \frac{Q(t)}{1+z^2} + \frac{z}{\pi(1+z^2)}(T-t)^{\theta}t^{\frac12-\theta}\omega(t)\int\limits_0^T \frac{Q(\tau)}{(T-\tau)^{\theta}\tau^{\frac12-\theta}\omega(\tau)(\tau-t)}\,d\tau, \quad (36)$$

или

$$\tilde\beta^{(l)}(t) = \frac{Q(t)}{1+z^2}$$
$$+ \frac{z}{\pi(1+z^2)}(T-t)^{1-\theta}t^{-\frac12+\theta}\omega(t)\int\limits_0^T \frac{Q(\tau)}{(T-\tau)^{1-\theta}\tau^{-\frac12+\theta}\omega(\tau)(\tau-t)}\,d\tau. \quad (37)$$

Из формулы (37) следует, что $\tilde\beta^{(l)}(0) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_0^T \frac{Q(\tau)}{(T-\tau)^{1-\theta}\tau^{\frac12+\theta}\omega(\tau)}\,d\tau = 0. \quad (38)$$

При выполнении (38) формула (37) примет вид

$$\tilde\beta^{(l)}(t) = \frac{Q(t)}{1+z^2}$$
$$+ \frac{z}{\pi(1+z^2)}(T-t)^{1-\theta}t^{\frac12+\theta}\omega(t)\int\limits_0^T \frac{Q(\tau)}{(T-\tau)^{1-\theta}\tau^{\frac12+\theta}\omega(\tau)(\tau-t)}\,d\tau. \quad (39)$$

Так как $Q(t)$ принадлежит пространству $H^{\gamma/2}(0,T)$, то функция $\tilde\beta^{(l)}(t)$, представленная формулами (36), (39), удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\frac{\gamma}{2}$ во всех точках контура $(0,T)$ отличных от концов. Рассмотрим его поведение на концах. Согласно формуле поведения интеграла типа Коши на концах контура интегрирования [3, с. 76] легко видеть, что $\tilde\beta^{(l)}(0) = \tilde\beta^{(l)}(T) = 0$. Для дальнейшего исследования поведения их на концах контура воспользуемся леммой Мусхелишвили – Терсенова [3, с. 82–86; 1, с. 14–17].

В силу этой леммы получаем, что, если $\theta \ge \frac14$, то в формуле (36) функция $\tilde\beta^{(l)}(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\frac{\gamma}{2}$ при $0<\gamma<1-2\theta$, условию Гельдера с показателем $\frac12-\theta$ при $1-2\theta<\gamma<1$ и условию Гельдера с показателем $\frac12-\theta-\varepsilon$ при $\gamma = 1-2\theta$. Кроме того, заметим, что если $\theta \le \frac14$, то функция $\tilde\beta^{(l)}(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\frac{\gamma}{2}$ при $0 < \gamma < 2\theta$, условию Гельдера с показателем θ при $2\theta<\gamma<1$ и условию Гельдера с показателем $\theta-\varepsilon$ при $\gamma = 2\theta$.

В формуле (39) в силу леммы Мусхелишвили – Терсенова и в силу неравенства $\frac{\gamma}{2} < \min\{1-\theta, \frac12+\theta\}$ при $0<\gamma<1$ функция $\tilde\beta^{(l)}(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\frac{\gamma}{2}$.

Таким образом, при выполнении условий (21), (24), (26), (29), (31), (33), имеющих вид

$$\begin{cases} z\cdot\int\limits_0^T \frac{\beta'(\tau)}{\tau^{1/2}}\,d\tau = \Phi_1(0), \\ \frac{z}{2}\int\limits_0^T \frac{\beta^{(s)}(\tau)-\Phi_0^{(s)}(0)\frac{T-\tau}{T}}{\tau^{3/2}}\,d\tau = 2\frac{z}{\sqrt{T}}\Phi_0^{(s)}(0) + \Phi_1^{(s)}(0), \quad s=1,\dots,l-1, \\ \beta^{(k)}(T) = 0, \quad k=0,1,\dots,l-1, \end{cases} \quad (40)$$

мы получили функцию $\beta(t)$ из искомого пространства $H^{p/2}(0,T)$, удовлетворяющую условиям

$$\beta^{(s)}(0)=\Phi_0^{(s)}(0),\quad s=0,1,\dots,l-1,\quad \beta^{(l)}(T)=0.$$

Значения $\beta^{(s)}(t)$ определяются по формуле Тейлора

$$\beta^{(s)}(t)=\sum_{k=s}^{l-1}\frac{\Phi_0^{(k)}(0)}{(k-s)!}t^{k-s}+\frac{1}{(l-1-s)!}\int\limits_0^t(t-\tau)^{l-1-s}\beta^{(l)}(\tau)\,d\tau,$$
$$s=0,1,\dots,l-1.$$

Тогда для выполнения условий $\beta^{(k)}(T)=0$ при $k=0,1,\dots,l-1$ необходимо и достаточно, чтобы

$$0=\sum_{k=s}^{l-1}\frac{\Phi_0^{(k)}(0)}{(k-s)!}T^{k-s}+\frac{1}{(l-1-s)!}\int\limits_0^T(T-\tau)^{l-1-s}\beta^{(l)}(\tau)\,d\tau,$$
$$s=0,1,\dots,l-1. \quad (41)$$

Подставив найденные значения функций $\beta^{(s)}(t)$ в первые l условий (40), получим

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{z}{2(l-1-s)!}\int\limits_0^T\tau^{l-s-3/2}\,d\tau\int\limits_0^1(1-\sigma)^{l-1-s}\beta^{(l)}(\sigma\tau)\,d\sigma=\\ \qquad -\frac{z}{2}\sum\limits_{k=s+1}^{l-1}\frac{\Phi_0^{(k)}(0)T^{k-s-1/2}}{(k-s)!(k-s-1/2)}+\frac{z}{\sqrt{T}}\Phi_0^{(s)}(0)+\Phi_1^{(s)}(0),\\ s=0,\dots,l-1.\end{array}\right. \quad (42)$$

Отметим, что функция $\beta^{(l)}(t)$ дана формулой (36).

Во втором случае при выполнении условий аналогичных (21), (24), (26), (29), (31), (33) и (38) получим функцию $\beta(t)$ по формуле (39) из искомого пространства $H^{p/2}(0,T)$, удовлетворяющую условиям $\beta^{(s)}(0)=\Phi_0^{(s)}(0)$ $(s=0,1,\dots,l-1)$, $\beta^{(l)}(T)=0$. Таким образом, доказаны

Теорема 2. *Пусть $\varphi_1,\varphi_2\in H^p$, $p=2l+\gamma$, и $|r\sin\varphi|\le 1$ при $\varphi\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, $|r\sin\varphi|>1$ при $\varphi\in(-\frac{\pi}{2};0)\cup(\frac{\pi}{2};\pi)$.*

Тогда при выполнении $2l$ условий (41), (42) существует хотя бы одно решение уравнения (13), удовлетворяющее условиям (14), (15) из пространства

1) $H^{p,p/2}_{x\ t}$, *если $0<\gamma<\min\{2\theta,1-2\theta\}$;*

2) $H^{q,q/2}_{x\ t}$, $q=2l+\min\{2\theta,1-2\theta\}$, *если $\min\{2\theta,1-2\theta\}<\gamma<1$;*

3) $H^{q-\varepsilon,(q-\varepsilon)/2}_{x\ \ t}$, *если $\gamma=\min\{2\theta,1-2\theta\}$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.*

Теорема 3. *Пусть $\varphi_1,\varphi_2\in H^p$, $p=2l+\gamma$ и пусть при $|r\sin\varphi|\le 1$, $\varphi\in(-\pi;-\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2};\pi)$, при $|r\sin\varphi|>1$, $\varphi\in(-\pi;-\frac{\pi}{2})\cup(0;\frac{\pi}{2})$.*

Тогда при выполнении $2l+1$ условий вида (41), (42) и (38) существует хотя бы одно решение уравнения (13) из пространства $H^{p,p/2}_{x\ t}$, удовлетворяющее условиям (14), (15).

Замечание. Случаи $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$ были рассмотрены в работах [12, 13]. При $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ имеем $G=\frac{1\mp r}{1\pm r}$, следовательно, каноническая функция $\chi(\eta)=(\eta-T)^{1-\theta_1\cdot i}\eta^{-1+\theta_1\cdot i},\theta_1=\frac{\ln|G|}{2\pi}$ при $0<r<1$ или $\chi(\eta)=(\eta-T)^{\frac{1}{2}-\theta_1\cdot i}\eta^{-\frac{1}{2}+\theta_1\cdot i}$ при $r>1$. При этом, очевидно, мы находимся в условиях теоремы аналогичной 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Терсенов С. А.* Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
4. *Монахов В. Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977.
5. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1968.
6. *Монахов В. Н., Попов С. В.* Контактные краевые задачи математической физики // Динамика сплошной среды. 2000. Вып. 116. С. 62–72.
7. *Popov S. V.* Parabolic equations of the fourth order with varying evolution direction // Мат. заметки ЯГУ. 2001. Т. 8, № 2. С. 112–133.
8. *Попов С. В.* Гёльдеровские классы решений параболических уравнений четвертого порядка с меняющимся направлением эволюции // Мат. заметки ЯГУ. 2004. Т. 11, № 1. С. 84–100.
9. *Попов С. В.* О гладкости решений параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции // Докл. РАН. 2005. Т. 400, № 1. С. 29–31.
10. *Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В.* Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
11. *Кислов Н. В., Пулькин И. С.* Краевая задача с обобщенными условиями склейки для уравнения параболического типа // Вестн. МЭИ. 2000. № 6. С. 51–59.
12. *Попов С. В.* Об одной краевой задаче со сдвигом для параболического уравнения переменного типа // Динамика сплошной среды. 2000. Вып. 116. С. 82–89.
13. *Пинигина Н. Р., Попов С. В.* Разрешимость краевых задач для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Мат. заметки ЯГУ. 2002. Т. 9, № 1. С. 71–82.
14. *Пинигина Н. Р., Попов С. В.* Гладкость решений параболических уравнений с меняющимся направлением времени с условиями склеивания, содержащими производные первого и второго порядков // Мат. заметки ЯГУ. 2003. Т. 10, № 1. С. 86–97.
15. *Пинигина Н. Р., Попов С. В.* О параболических уравнениях с меняющимся направлением времени с условиями склеивания, содержащими производные второго порядка // Мат. заметки ЯГУ. 2004. Т. 11, № 1. С. 72–83.
16. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
17. *Pini B.* Sul probleme fondamentale di valori contorno per una classe di equazioni paraboliche lineari // Ann. Mat. Pura ed Appl. 1957. V. 43. P. 261–297.
18. *Pini B.* Su una equazione paraboliche non lineare del quarto ordine // Rend. Sem. Fac. Sc. Univ. Cagliari. 1957. V. 27, N 3–4. P. 136–168.

Попов Сергей Вячеславович
Россия, Якутск, Институт математики и информатики ЯГУ
`madu@sitc.ru`