УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Л. С. Пулькина

В работе исследована нелокальная задача с интегральным условием для уравнения теплопроводности и доказана ее однозначная разрешимость в пространстве $V_2^{1,0}$.

Задачи с нелокальными интегральными условиями для уравнений в частных производных активно изучаются в настоящее время. Впервые внимание к задачам с интегральными условиями для уравнения теплопроводности было привлечено в работах Д. Р. Кэннона [1] и Л. И. Камынина [2]. Впоследствии эта проблема получила развитие в работах ряда авторов. Однако, в большинстве работ рассматривается одномерный по пространственным переменным случай, а нелокальное условие содержит линейный интегральный оператор.

В настоящей работе изучается нелокальная задача для уравнения теплопроводности с n пространственными переменными, а нелокальное условие нелинейно.

Рассмотрим уравнение

$$u_t = \Delta u + f(x,t) \tag{1}$$

в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0,T)$, где Ω — ограниченная область пространства R^n с гладкой границей. Обозначим через S_T боковую поверхность цилиндра Q_T : $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$.

Для уравнения (1) поставим следующую задачу: найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую в Q_T уравнению (1), а также следующим условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{S_T} + \int\limits_{\Omega} K(x,\xi,t,u(\xi,t))d\xi = 0, \quad (x,t) \in S_T, \tag{3}$$

где функции $\varphi(x)$, $K(x,\xi,t,z)$ заданы.

Введем определение обобщенного решения поставленной задачи. Мы будем понимать его как элемент пространства $V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющий для всех $v(x,t) \in \hat{W}_2^{1,1}(Q_T)$ некоторому интегральному тождеству. Здесь, как обычно, $V_2^{1,0}(Q_T)$ — банахово пространство, состоящее из элементов $V_2(Q_T)$, непрерывных по t в норме

$$||u||_{V_2^{1,0}} = \max_{t\in[0,T]} ||u||_{2,\Omega} + ||u_x||_{2,Q_T},$$

$V^2(Q_T)$ — банахово пространство, состоящее из всех элементов $W_2^{1,1}(Q_T)$, имеющих конечную норму

$$||u||_{V_2} = \operatorname*{vrai\,max}_{t\in[0,T]} ||u||_{2,\Omega} + ||u_x||_{2,Q_T},$$

$\hat{W}_2^{1,1}(Q_T) = \{v(x,t) \in W_2^{1,1}(Q_T), \quad v(x,T) = 0\}$, $\quad W_2^{1,1}(Q_T)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u,v)_{W_2^{1,1}(Q_T)} = \int\limits_{Q_T} (uv + u_t v_t + \nabla u \nabla v) dxdt.$$

Для того, чтобы получить тождество, умножим (1) на $v(x,t) \in \hat{W}_2^{1,1}(Q_T)$, проинтегрируем по цилиндру Q_T и учтем (2) и (3). Получим

$$\int\limits_{Q_T} (-uv_t + \nabla u \nabla v) dxdt + \int\limits_{S_T} v(x,t) \int\limits_{\Omega} K(x,\xi,t,u(\xi,t)) d\xi ds dt$$
$$= \int\limits_{\Omega} \varphi(x) v(x,0) dx + \int\limits_{Q_T} fv dxdt. \quad (4)$$

Определение. *Обобщенным решением задачи* (1)–(3) будем называть функцию $u(x,t) \in V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую для всех $v(x,t) \in \hat{W}_2^{1,1}(Q_T)$ тождеству (4).

Теорема. *Пусть выполняются следующие условия:*
1. $\varphi(x) \in L_2(\Omega), \quad f(x,t) \in L_2(Q_T)$;
2. $K(x,\xi,t,u(\xi,t)) \in C(S_T \times \Omega \times R)$;
3. $|K(x,\xi,t,u_1) - K(x,\xi,t,u_2)| \le L|u_1 - u_2|$;
4. $|K(x,\xi,t,u)| \le N|u| + |h(x,\xi,t)|, \quad \int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_{\Omega} h^2(x,\xi,t) d\xi ds \in L_1(0,T)$.
Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(3).

Доказательство. 1. Покажем, что не может существовать более одного обобщенного решения задачи. Предположим, что это не так, и u_1, u_2 — два различных решения. Тогда $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{Q_T} (-uv_t + \nabla u \nabla v) dxdt + \int\limits_{S_T} v \int\limits_{\Omega} [K(x,\xi,t,u_1) - K(x,\xi,t,u_2)] d\xi ds dt = 0. \quad (5)$$

Возьмем в (5)

$$v(x,t) = \begin{cases} \int\limits_t^\tau u(x,\eta) d\eta, & 0 \le t \le \tau, \\ 0, & \tau \le t \le T. \end{cases} \quad (6)$$

Нетрудно проверить, что $v(x,t) \in \hat{W}_2^1(Q_T)$. Тогда, подставив (6) в (5), получим, заметив, что для $t \in [0,\tau]$ $u(x,t) = -v_t(x,t)$,

$$\int\limits_{Q_\tau} (v_t^2 - \nabla v_t \nabla v) dxdt + \int\limits_{S_\tau} v \int\limits_{\Omega} [K(x,t,\xi,u_1) - K(x,t,\xi,u_2)] d\xi ds dt = 0.$$

Заметив, что, в силу свойств функции $v(x,t)$

$$-\int\limits_{Q_\tau} \nabla v_t \nabla v dxdt = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla v(x,0)|^2 dx,$$

предыдущее равенство перепишем так

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|\nabla v(x,0)|^2dx+\int\limits_{Q_\tau}v_t^2(x,t)dxdt$$
$$=\int\limits_{S_\tau}v(x,t)\int\limits_{\Omega}[K(x,t,\xi,u_2(\xi,t))-K(x,t,\xi,u_1(\xi,t))]d\xi dsdt=0. \quad (7)$$

Оценим правую часть (7), учитывая, что функция $K(x,t,\xi,u)$ удовлетворяет условию Липшица,

$$|\int\limits_{S_\tau}v(x,t)\int\limits_{\Omega}[K(x,t,\xi,u_2)-K(x,t,\xi,u_1)]d\xi dsdt|$$
$$\leq\int\limits_{S_\tau}|v|\int\limits_{\Omega}|K(x,t,\xi,u_2)-K(x,t,\xi,u_1)|d\xi dsdt\leq L\int\limits_{S_\tau}|v|\int\limits_{\Omega}|u|d\xi dsdt.$$

Для оценки правой части этого неравенства применим сначала неравенство Коши "с ε", а затем неравенство [3]

$$\int\limits_{\partial\Omega}v^2ds\leq\int\limits_{\Omega}[\varepsilon v_x^2+c(\varepsilon)v^2]dx.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|\nabla v(x,0)|^2dx+\int\limits_{Q_\tau}v_t^2(x,t)dxdt\leq L\int\limits_{Q_\tau}[\varepsilon v_t^2(x,t)+|\nabla v(x,t)|^2+\frac{c(\varepsilon)}{\varepsilon}v^2(x,t)]dxdt.$$

Выберем ε так, что $1-L\varepsilon\geq 1/2$. Тогда

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|\nabla v(x,0)|^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}v_t^2(x,t)dxdt\leq L\int\limits_{Q_\tau}[|\nabla v(x,t)|^2+c_1v^2(x,t)]dxdt. \quad (8)$$

Так как в силу свойств функции $v(x,t)$ ее можно представить как $v(x,t)=\int_\tau^t v_tdt$, то справедливо неравенство

$$\int\limits_{Q_\tau}v^2(x,t)dxdt\leq\tau\int\limits_{Q_\tau}v_t^2(x,t)dxdt.$$

Воспользуемся теперь произволом выбора τ. Будем считать, что $c_1\tau\leq 1/4$. При таких τ из (8) следует

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|\nabla v(x,0)|^2dx+\frac{1}{4}\int\limits_{Q_\tau}v_t^2(x,t)dxdt\leq L\int\limits_{Q_\tau}|\nabla v(x,t)|^2dxdt. \quad (9)$$

Обозначим $y(x,t)=\int\limits_0^t u(x,\eta)d\eta$. Тогда для $t\in[0,\tau]$ $v(x,t)=y(x,\tau)-y(x,t)$, $v(x,0)=y(x,\tau)$. Из (9) мы имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|\nabla v(x,0)|^2dx\leq L\int\limits_{Q_\tau}|\nabla v(x,t)|^2dxdt.$$

Подставим в это неравенство полученное выражение для $v(x,t)$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|\nabla y(x,\tau)|^2dx \le 2L\int\limits_{Q_\tau}[|\nabla y(x,t)|^2+|\nabla y(x,\tau)|^2]dxdt$$
$$= 2L\int\limits_{Q_\tau}|\nabla y(x,t)|^2dxdt + 2L\tau\int\limits_{\Omega}|\nabla y(x,\tau)|^2dx. \quad (10)$$

При $\tau \le t^*$, где $t^* = \min\{\frac{1}{4c_1}, \frac{1}{8L}\}$, получим из (10)

$$\int\limits_{\Omega}|\nabla y(x,\tau)|^2dx \le 4L\int\limits_{Q_\tau}|\nabla y(x,t)|^2dxdt \qquad \forall\tau\in[0,t^*],$$

откуда в силу неравенства Гронуолла для этих τ $y_{x_i}(x,\tau)=0$, $i=1,\dots,n$, следовательно, $y(x,\tau)\equiv\mathrm{const}$. Так как $y(x,0)=0$, то $y(x,\tau)\equiv 0$. Но тогда $v_{x_i}(x,t)=y_{x_i}(x,\tau)-y_{x_i}(x,t)=0$, $i=1,\dots,n$, для $t\in[0,t^*]$. Теперь из (9) $v_t(x,t)=0$, а так как $v_t(x,t)=-u(x,t)$, то $u(x,t)=0$ $\forall t\in[0,t^*]$. Этим доказано совпадение u_1 u_2 в цилиндре $Q_{t^*}=\Omega\times[0,t^*]$. Повторяя эти рассуждения, получим, что $u(x,t)=0$ во всем цилиндре Q_T.

2. Для доказательства существования обобщенного решения задачи (1)–(3) применим метод Галеркина. Будем искать приближенное решение в виде

$$u^m(x,t)=\sum_{k=1}^{m}c_k(t)w_k(x),$$

где функции $w_k(x)$ образуют фундаментальную систему в $W_2^1(\Omega)$, а $c_k(t)$ подлежат определению, причем так, что

$$c_k(0)=(\varphi,w_k), \quad (11)$$

из соотношений

$$\int\limits_{\Omega}(u_t^m w_l+\nabla u^m\nabla w_l)dx+\int\limits_{\partial\Omega}w_l\int\limits_{\Omega}K(x,\xi,t,u^m)d\xi dS=\int\limits_{\Omega}fw_ldx. \quad (12)$$

Будем считать, ради несущественных упрощений, что $(w_k,w_l)_{2,\Omega}=\delta_k^l$, и, кроме того, $\max\limits_{\Omega}|w_k,w_{kx_i}|\le\beta_k$ $\forall i=1,\dots,n$. Соотношения (12) вместе с (11) представляют собой не что иное, как задачу Коши для системы m квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно функций $c_k(t)$

$$\sum_{k=1}^{m}c_k'(t)(w_k(x),w_l(x))_{2,\Omega}+\sum_{k=1}^{m}c_k(t)(\nabla w_k(x),\nabla w_l(x))_{2,\Omega}$$
$$+\int\limits_{\partial\Omega}w_l(x)\int\limits_{\Omega}K(x,\xi,t,\sum_{k=1}^{m}c_k(t)w_k(\xi))d\xi dS=f_l(t), \quad (13)$$

$$f_l(t)=\int\limits_{\Omega}f(x,t)w_l(x)dx, \qquad l=1,\dots,m.$$

Из свойств функций $w_k(x)$ следует, что система (13) разрешима относительно $c_k'(t)$. Обозначим

$$F_i(t, c_1(t), \ldots, c_m(t)) = f_i(t) - \sum_{k=1}^{m} c_k(t)(\nabla w_i \nabla w_i)_{2,\Omega}$$
$$- \int\limits_{\partial\Omega} w_i(x) \int\limits_{\Omega} K(x, \xi, t, \sum_{k=1}^{m} c_k(t) w_k(\xi)) d\xi dS.$$

Тогда (13) можем записать так

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = F_i(t, c_1(t), \ldots, c_m(t)). \tag{14}$$

Из предположений 1–4, а также свойств функций $w_k(x)$, следует, что функции $F_i(t, c_1(t), \ldots, c_m(t))$ измеримы и ограничены на каждом множестве $\{t \in [0,T], |c_k(t)| \leq \text{const}\}$ как функции t и удовлетворяют условию Липшица по $c_k(t)$. Поэтому для существования единственного решения системы (14) на всем $[0,T]$ достаточно убедиться, что все возможные решения ограничены на $[0,T]$.

Так как

$$\max_{0 \leq t \leq T} \sum_{k=1}^{m} c_k^2(t) = \max_{0 \leq t \leq T} ||u^m(x,t)||^2_{2,\Omega} \leq ||u^m(x,t)||^2_{V_2^{1,0}(Q_T)},$$

то справедливость утверждения о равномерной ограниченности решений системы (14) будет следовать из неравенства

$$||u^m(x,t)||_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leq C,$$

к выводу которого и перейдем.

Умножим k-е уравнение (12) на c_k, затем сложим по k от 1 до m и проинтегрируем по t от 0 до τ. Получим

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega u_t^m u^m dxdt + \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega |\nabla u^m|^2 dxdt$$
$$+ \int\limits_0^\tau \int\limits_{\partial\Omega} u^m \int\limits_\Omega K(x, t, \xi, u^m) d\xi dsdt = \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega f u^m dxdt. \tag{15}$$

Интегрируя первое слагаемое слева по t, получим

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega u_t^m u^m dxdt = \frac{1}{2} \int\limits_\Omega u^{m2}(x,\tau) dx - \int\limits_\Omega u^{m2}(x,0) dx.$$

Оценим теперь третье слагаемое

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_{\partial\Omega} u^m \int\limits_\Omega K(x, \xi, t, u^m(\xi,t)) d\xi dsdt \leq \frac{1}{2} \int\limits_0^\tau \int\limits_{\partial\Omega} u^{m2}(x,t) dsdt$$
$$+ \frac{1}{2} \int\limits_0^\tau \int\limits_{\partial\Omega} \left(\int\limits_\Omega K(x, \xi, t, u^m(\xi,t)) d\xi \right)^2 dsdt.$$

В силу неравенства 6.24 ([3, с.77])

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_{\partial\Omega} u^{m2}dsdt \le \varepsilon\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega u_x^{m2}dxdt + c(\varepsilon)\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega u^{m2}dxdt.$$

Так как функция $K(x,\xi,t,u)$ удовлетворяет условию 4, то

$$\int\limits_0^\tau\int\limits_{\partial\Omega}\left(\int\limits_\Omega K(x,\xi,t,u^(\xi,t))d\xi\right)^2 dsdt \le N_1\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega u^{m2}(x,t)dxdt + \int\limits_0^\tau H(t)dt,$$

где $N_1 = N^2|\Omega||\partial\Omega|$, $\quad H(t) = |\Omega||\partial\Omega|\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_\Omega h^2(x,\xi,t)d\xi ds$. Теперь, учитывая полученные неравенства, из (15) получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega u^{m2}(x,\tau)dx + (1-\varepsilon)\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega u_x^{m2}dxdt \le N_2\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega u^{m2}(x,t)dxdt$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_\Omega u^{m2}(x,0)dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega f^2(x,t)dxdt + \int\limits_0^\tau H(t)dt, \quad (16)$$

$N_2 = N_1 + 1/2 + c(\varepsilon)$. Выберем $\varepsilon \le 1/2$. Из (16)

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega u^{m2}(x,\tau)dx \le N_2\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega u^{m2}(x,t)dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega u^{m2}(x,0)dx$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega f^2dxdt + \int\limits_0^\tau H(t)dt,$$

откуда в силу неравенства Гронуолла

$$\int\limits_\Omega u^{m2}(x,\tau)dx \le e^{N_2\tau}\left(\int\limits_\Omega u^{m2}(x,0)dx + \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega f^2(x,t)dxdt + \int\limits_0^\tau H(t)dt\right). \quad (17)$$

Проинтегрируем (17) по τ от 0 до t. Тогда

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u^{m2}(x,\tau)dxd\tau \le c(t)\left(\int\limits_\Omega u^{m2}(x,0)dx + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega f^2dxd\tau + \int\limits_0^t H(\tau)d\tau\right). \quad (18)$$

Из (16), учитывая (18), имеем

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_x^{m2}dxdt \le c_1(t)\left(\int\limits_\Omega u^{m2}(x,0)dx + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega f^2dxdt + \int\limits_0^t H(\tau)d\tau\right). \quad (19)$$

Складывая (17) и (19), получим, заменив $\int\limits_\Omega u^{m2}(x,t)dx$ на $\max\limits_{0\le t\le T}\int\limits_\Omega u^{m2}(x,t)dx$,

$$||u^m||^2_{V_2^{1,0}(Q_T)} \le M_1||u^m(x,0)||^2_{2,\Omega} + M_2||f||^2_{2,Q_T} + H_1(T).$$

Так как $||u^m(x,0)||^2_{L_2(\Omega)} = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k^2(0) \le ||\varphi(x)||^2_{L_2(\Omega)}$, то

$$||u^m(x,t)||_{V_2^{1,0}(Q_T)} \le C, \tag{20}$$

где C не зависит от m.

Рассмотрим теперь функции $l_{m,k}(t) = (u^m(x,t), w_k(x))_{2,\Omega}$ и покажем, что они равностепенно непрерывны по $t \in [0,T]$. Для этого проинтегрируем (12) от t до $t+\Delta t$, но прежде заметим, что

$$\int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_\Omega u_t^m(x,t)w_k(x)dxdt = \int\limits_\Omega [u^m(x,t+\Delta t) - u^m(x,t)]w_k(x)dx$$
$$= l_{m,k}(t+\Delta t) - l_{m,k}(t).$$

Использовав результат интегрирования соотношений (12) и предыдущее равенство, получим

$$l_{m,k}(t) - l_{m,k}(t+\Delta t) = \int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_\Omega \nabla u^m \nabla w_k dxdt$$
$$+ \int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_{\partial\Omega} w_k(x)\int\limits_\Omega K(x,\xi,t,u^m(\xi,t))d\xi ds dt + \int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_\Omega f(x,t)w_k(x)dxdt.$$

Отсюда

$$|l_{m,k}(t+\Delta t) - l_{m,k}(t)| \le \int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_\Omega |\nabla u^m \nabla w_k| dxdt$$
$$+ \int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_{\partial\Omega} |w_k(x)|\int\limits_\Omega |K(x,\xi,t,u^m)|d\xi ds dt + \int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_\Omega |f(x,t)w_k(x)|dxdt.$$

Учитывая теперь, что $|w_k, w_{kx_i}| \le \beta_k \ \forall i$, а функция $K(x,\xi,t,u)$ удовлетворяет условию 4, получим

$$|l_{m,k}(t+\Delta t) - l_{m,k}(t)|$$
$$\le \beta_k\sqrt{\Delta t}\sqrt{\text{mes}\,\Omega}(||u^m||_{V_2^{1,2}(Q_T)} + ||H(t)||_{2,(0,T)} + ||f(x,t)||_{2,Q_T}).$$

В силу оценки (20), свойств функций $H(t)$, $f(x,t)$, и того факта, что β_k не зависят от m при $m \ge k$, из полученного неравенства вытекает, что функции $l_{m,k}(t)$ равностепенно непрерывны по $t \in [0,T]$. Кроме этого, из (20) также следует, что $\max\limits_{0\le t\le T} |l_{m,k}(t)| \le \text{const}$ при всех $m, k = 1,\ldots$ Это позволяет выбрать из последовательности $\{u^m\}$ подпоследовательность, сходящуюся слабо в $L_2(\Omega)$ равномерно по t к некоторой функции $u(x,t)$, $\max\limits_{0\le t\le T} ||u||_{2,\Omega} \le M$.

Из этой подпоследовательности в силу (20) можно выделить такую подпоследовательность, для которой производные $\partial/\partial x_i$ сходятся слабо в $L_2(Q_T)$ к u_{x_i}. Докажем, что предел $u(x,t)$ выделенной подпоследовательности, за которой сохраним обозначение u^m, есть обобщенное решение поставленной задачи из $V_2^{1,0}(Q_T)$.

Из (12) следует тождество

$$\int\limits_{Q_T}(-u^m\eta_t+\nabla u^m\nabla\eta)dxdt+\int\limits_{S_T}\eta(x,t)\int\limits_{\Omega}K(x,\xi,t,u^m(\xi,t))d\xi dsdt$$
$$-\int\limits_{\Omega}u^m(x,0)\eta(x,0)dx=\int\limits_{Q_T}f\eta dxdt, \quad (21)$$

справедливое для любой $\eta(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{m}d_k(t)w_k(x)$, где $d_k(t)-$ непрерывные функции, имеющие ограниченные на $[0,T]$ обобщенные производные, $d_k(T)=0$. Совокупность таких $\eta(x,t)$ обозначим $\mathcal{N}_m$. Перейдем к пределу в (21) при $m\to\infty$ для фиксированной $\eta(x,t)$. В силу оценки (20) и слабой сходимости u^m к u в $L_2(\Omega)$, равномерной по $t\in[0,T]$, функции u^m сходятся к u сильно в $L_2(\Omega)$ [4].

Покажем, что можно перейти к пределу в $\int\limits_{S_T}\eta(x,t)\int\limits_{\Omega}K(x,\xi,t,u^m)d\xi dsdt$

$$\left|\int\limits_{S_T}\eta(x,t)\int\limits_{\Omega}[K(x,\xi,t,u^m)-K(x,\xi,t,u)]d\xi dsdt\right|$$
$$\leq\int\limits_{S_T}|\eta(x,t)|\int\limits_{\Omega}|K(x,\xi,t,u^m)-K(x,\xi,t,u)|d\xi dsdt$$
$$\leq\left(\int\limits_{S_T}|\eta(x,t)|^2dsdt\right)^{1/2}\left(\int\limits_{S_T}\left(\int\limits_{\Omega}|K(x,\xi,t,u^m)-K(x,\xi,t,u)|d\xi\right)^2dsdt\right)^{1/2}$$
$$\leq N_4||\eta(x,t)||_{W_2^1(Q_T)}\left(\int\limits_0^T||u^m-u||^2_{L_2(\Omega)}dt\right)^{1/2}.$$

Отсюда вытекает возможность предельного перехода в (21), осуществляя который, приходим к тождеству

$$\int\limits_{Q_T}(-u\eta_t+\nabla u\nabla\eta)dxdt+\int\limits_{S_T}\eta(x,t)\int\limits_{\Omega}K(x,\xi,t,u)d\xi dsdt$$
$$+\int\limits_{\Omega}\varphi(x)\eta(x,0)dx=\int\limits_{Q_T}f(x,t)\eta(x,t)dxdt. \quad (22)$$

В силу плотности множества $\mathcal{N}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathcal{N}_m$ в $\hat{W}_2^{1,0}$ [4], тождество (22) выполняется для любой функции $v(x,t)\in\hat{W}_2^{1,1}(Q_T)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cannon J.R.* The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. V. 21. P. 155–160.
2. *Камынин Л.И.* Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // Ж. вычисл. матем. и мат. физики. 1964. Т. 4., № 6. С. 1006–1024.
3. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

4. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

Пулькина Людмила Степановна
Россия, Самара, Самарский государственный университет
`pulkina@ssu.samara.ru`