УДК 517.95

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ НЕЗНАКООПРЕДЕЛЕННЫХ ЗАДАЧ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

С. Г. Пятков

Мы рассматриваем самосопряженные задачи Штурма – Лиувилля вида $Lu = \lambda g(x)u$, где L — обыкновенный дифференциальный оператор порядка $2m$, определенный на некотором интервале (a, b), и g — вещественная функция, принимающая как положительные, так и отрицательные значения. Мы исследуем вопрос о условиях, гарантирующих базисность по Риссу собственных и присоединенных функций в пространстве L_2 с весом $|g|$. Наши рассмотрения основаны на теории интерполяции банаховых пространств.

1. Введение

Мы рассматриваем задачу вида

$$Lu = \lambda g(x)u, \qquad x \in (a, b), \tag{1.1}$$

где L — обыкновенный дифференциальный порядка $2m$, который определен дифференциальным выражением

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{d^i}{dx^i} a_{ik} \frac{d^j u}{dx^j} \qquad (x \in (a, b)) \tag{1.2}$$

и граничными условиями

$$\begin{gathered}
B_k u = \sum_{i=0}^{2m-1} (\alpha_{ik} u^{(i)}(a) + \beta_{ik} u^{(i)}(b)) = 0 \ (k = 1, 2, \dots, 2m), \\
B_k u = \sum_{i=0}^{2m-1} \alpha_{ik} u^{(i)}(a) = 0 \ (k = 1, 2, \dots, m), \quad \lim_{x\to+\infty} u^{(i)} = 0 \ (i = 0, 1, \dots, m-1), \\
B_k u = \sum_{i=0}^{2m-1} \beta_{ik} u^{(i)}(b) = 0 \ (k = 1, 2, \dots, m), \quad \lim_{x\to-\infty} u^{(i)} = 0 \ (i = 0, 1, \dots, m-1), \\
\lim_{x\to\infty} u^{(i)} = 0 \ (i = 0, 1, \dots, m-1),
\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь первое условие используется в случае ограниченного интервала (a, b), второе в случае $b = +\infty$, третье, когда $a = -\infty$, и последнее в случае $(a, b) = \mathbb{R}$. Предполагается, что оператор L самосопряжен в $L_2(a, b)$.

Задачи Штурма – Лиувилля с незнакоопределенной весовой функцией $g(x)$ (и эллиптические задачи этого вида) были предметом многих исследований. Эти проблемы возникают во многих областях физики и прикладной математики. Достаточно полная библиография может быть найдена в [1, 2]. Данная работа посвящена базисности по Риссу (см. определение базиса Рисса в [3]) корневых функций

Работа поддержана грантом РФФИ № 03–01–00819

задачи (1.1) в весовом пространстве $L_{2,g}((a,b)\setminus G^0)$ ($G^0=\{x\in(a,b):g(x)=0\}$), наделенном нормой

$$\|u\|^2_{L_{2,g}((a,b)\setminus G^0)}=\int\limits_{(a,b)\setminus G^0}|g||u|^2(x)\,dx.$$

Первые результаты, посвященные этой проблеме, появились недавно [1, 2, 4–19]. Некоторые достаточные условия базисности связаны с теорией интерполяции [1–18, 20], некоторые с теорией дефинизируемых в пространстве Крейна операторов [9] и теорией меры [12]. Известные условия были применимы к довольно узкому классу функций. Совсем недавно, в работах [13–16], появились уже условия, которые максимально близки к необходимым, а в некоторых случаях они являются необходимыми. Мы в данной работе используем эти условия и обобщаем некоторые из результатов работы [18].

Предполагаем, что существуют открытые подмножества G^+ и G^- множества $G=(a,b)$ такие, что $\mu(\overline{G^\pm}\setminus G^\pm)=0$, $g(x)>0$ п. в. (почти всюду) в G^+, $g(x)<0$ п. в. в G^- и $g(x)=0$ п. в. в $G^0=G\setminus\overline{G^+}\cup\overline{G^-}$). Здесь μ — мера Лебега. Без ограничения общности, предполагаем, что внутренности множеств $\overline{G^\pm}$, $\overline{G^0}$ совпадают с $G^\pm$ и G^0 соответственно. Точка $x_0\in\partial G^+\cap\partial G^-$ называется точкой поворота. Опишем содержание статьи. Пункт 2 содержит определения и вспомогательные результаты. Для удобства читателя, в пункте 3 мы приведем условия регулярности точек поворота из работ [13–16]. Главные результаты представлены в пункте 4. Вначале мы доказываем (теорема 4.1), что почти во всех случаях базисность по Риссу не зависит от вида граничных условий (1.3). Далее мы устанавливаем (теорема 4.2), что базисность по Риссу зависит только от поведения g в точках поворота и, таким образом, не зависит от поведения функции вне некоторой окрестности множества этих точек. Наконец (теорема 4.3), с использованием новых достаточных условий регулярности точки поворота из [13–16] мы уточним теорему 3.2 из [18]. В частности, мы исправим небольшую ошибку, найденную в формулировке этой теоремы. Теорема не всегда справедлива в случае нелокальных граничных условий (1.3), когда граничные точки a,b различных типов, т. е. или $a\in\partial G^+$ и $b\in\partial G^-$, или $a\in\partial G^-$ и $b\in\partial G^+$ (оператор SP, построенный на последнем шаге доказательства, не всегда непрерывен в этом случае). Соответствующий контрпример, показывающий, что в этом случае теорема не верна, был построен в [5]. Для того чтобы теорема была справедливой и в этом случае необходимо дополнительное условие регулярности граничной точки. Почти все обозначения стандартные (см. [21]).

2. Обозначения и определения

Определения соболевских пространств $W_p^k(a,b)$ ($a,b\in R$) и $\overset{\circ}{W}{}_p^k(a,b)$ ($1\le p\le\infty$), использованных ниже, могут быть найдены в [21]. Если A,B — некоторые банаховы пространства, то под $(A,B)_{\theta,2}$ мы понимаем пространство, построенное при помощи метода вещественной интерполяции (см. [21]). Символ $L(A,B)$ будет обозначать пространство линейных ограниченных операторов из A в B. Если $A=B$, тогда мы пишем $L(A)$ вместо $L(A,A)$. Область определения и область значений оператора M обозначаются через $D(M)$ и $R(M)$. Пусть H_1,H_0 ($H_1\subset H_0$) — гильбертовы пространства и вложение H_1 в H_0 плотно. Под H_1' мы понимаем негативное пространство к H_1, т. е. пополнение H_0 относительно нормы $\|u\|_{H_1'}=\sup\limits_{v\in H_1}|(u,v)|/\|v\|_{H_1}$, где скобка $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение в

H_0. Напомним [21], что

$$(H_1, H_1')_{1/2,2} = H_0 \tag{2.1}$$

Пусть F_0 — пространство Крейна со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и индефинитной метрикой $[u,v]_0 = (Ju, v)$ (см. [22]). Здесь J — каноническая симметрия, т. е. оператор представимый в виде $J = P^+ - P^-$, где $P^\pm$ — ортопроекторы такие, что $P^+ + P^- = I$ (тождественный оператор) и $P^+P^-u = P^-P^+u = 0$. Пусть F_1 — гильбертово пространство и вложение $F_1 \subset F_0$ плотно. Вместе с негативным пространством мы может построить J-негативное пространство как пополнение F_0 относительно нормы $\|u\|_{F_{-1}} = \sup\limits_{v\in F_1} |[u,v]_0|/\|v\|_{F_1}$. Положим $F_s = (F_1, F_0)_{1-s,2}$.

Мы будем использовать следующую лемму (лемма 4.1 главы 2 и лемма 3.17 гл. 1 в [1], см. также [2, 17]).

Лемма 2.1. *Если существует $s_0 > 0$ такое, что $J \in L(F_{s_0}, F_{s_0})$ (или $P^+ \in L(F_{s_0}, F_{s_0})$, или $P^- \in L(F_{s_0}, F_{s_0})$), то*

$$(F_1, F_{-1})_{1/2,2} = F_0. \tag{2.2}$$

Любое из вложений $(F_1, F_{-1})_{1/2,2} \subset F_0$, $(F_1, F_{-1})_{1/2,2} \supset F_0$ влечет (2.2).

Пусть $M \subset (a,b)$ — открытое множество и

$$(u,v)_M = \int\limits_M u(x)\overline{v(x)}\,dx, \qquad [u,v]_M = (g(x)u, v)_M.$$

Сформулируем главные условия на функцию g и оператор L. Будем предполагать, что $g(x) \in L_1(a,b)$, если (a,b) ограничен, и $g(x) \in L_1((a,b)\cap\{x : |x| < r\})$ $\forall r > 0$ в противном случае. Если интервал (a,b) неограничен, то дополнительно мы предполагаем, что для любой ограниченной в $W_2^m(a,b)$ последовательности существует подпоследовательность сходящаяся в $L_{2,g}(G\setminus G^0)$. Например, это условие выполнено, если $g(x) \to 0$ при $x \to \infty$ $(x \in G)$. Для простоты, мы считаем, что коэффициенты оператора L достаточно гладкие функции; более точно, $a_{ik} = (-1)^{i+j}\overline{a_{ki}} \in W_\infty^{\max(i,k)}(a,b)$ $\forall i,k$, $a_{m,m}, 1/a_{m,m} \in L_\infty(a,b)$ и $(-1)^m a_{m,m} > 0$ п. в. Эти условия гладкости могут быть ослаблены (см., например, [9, 20]). Предположим, что оператор L с областью определения

$$D(L) = \{u \in W_2^{2m}(a,b) : u \ \text{ удовлетворяет (1.3)}\}$$

самосопряжен в $L_2(a,b)$ и существуют постоянные $c_1, c_3 > 0$ и c_2 такие, что

$$\|u\|^2_{W_2^m(a,b)} \ge (Lu,u)_{(a,b)} \ge c_1\|u\|^2_{W_2^m(a,b)} - c_2\|u\|^2_{L_2(a,b)} \quad \forall u \in D(L), \tag{2.3}$$

где $c_2 = 0$ в случае неограниченного интервала (a,b). Неравенство (2.3) гарантирует, что $D(|L|^{1/2}) = \{u \in W_2^m(a,b) : \ B_k u = 0, \ k = 1,2,\dots,s_0\}$, где $\{B_k\}$ $(k = 1,2,\dots,s_0)$ — набор граничных операторов (1.3) содержащих производные порядка меньше, чем m. Положим $H_1(a,b) = D(|L|^{1/2})$. Из определения следует, что оператор L допускает расширение до ограниченного оператора из $H_1(a,b)$ в $H_1'(a,b)$. Если выражение $B_k u$ содержит значения функции u и ее производных только в одной из точек a или b, то мы называем граничное условие $B_k u = 0$ локальным. Если все граничные условия $B_k u = 0$ с $k = 1,\dots,s_0$ локальны (они всегда локальны в случае неограниченного интервала (a,b)), тогда мы говорим, что граничные условия локальны. В этом случае мы обозначаем выражения $B_k u$, содержащие значения $u^{(i)}$ в a и в b через $R_i u$ $(i = 1,\dots,s_1)$ и $S_i u$ $(i = 1,\dots,s_2)$ соответственно.

Лемма 2.2. *Пусть* $c, d \in (a, b)$*. Оператор, определенный дифференциальным выражением* (1.2)*, с областью определения*

$$D(L) = \{u \in W_2^{2m}(c,d) : \ u^{(i)}(c) = 0, \ u^{(i)}(d) = 0 \ (i = 0, 1, \dots, m-1)\}$$

самосопряжен в $L_2(c, d)$.

Доказательство очевидно (см. [20]).

Пусть множество M есть интервал $I \subset (a, b)$ или объединение двух непересекающихся интервалов $I^+, I^- \subset (a, b)$. Обозначим через $H_1(M)$ замкнутое подпространство $W_2^m(M)$, состоящее из функций, удовлетворяющих некоторым граничным условиям, описанным ниже, с нормой $W_2^m(M)$. Далее, положим

$$C_1 = \{u \in H_1(M) : a(u, v) = 0 \ \forall v \in H_1(M) \cap B_1\},$$

где

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^{m} (-1)^i (a_{ij} u^{(j)}, v^{(i)})_M \ (u, v \in H_1(M))$$

и $B_1 = \{v \in L_2(M) : \operatorname{supp} v \subset \overline{G^0 \cap M}\}$. Определим пространства $F_1(M)$, $F_0(M)$ следующим образом: $F_0(M) = L_{2,g}(M \setminus G^0)$ и

$$F_1(M) = \{u \in F_0(M) : \exists v \in C_1 : v|_{M \cap (G^+ \cup G^-)} = u\}.$$

Норма в $F_1(M)$ определяется равенством

$$\|u\|_{F_1(M)} = \inf_{v \in C_1, \ v|_{M \cap (G^+ \cup G^-)} = u} \|v\|_{H_1(M)}.$$

Пусть $F_{-1}(M)$ есть пополнение $F_0(M)$ относительно нормы

$$\|u\|_{F_{-1}(M)} = \sup_{v \in F_1(M)} \frac{|[u, v]_M|}{\|v\|_{F_1(M)}}.$$

Пространство $F_0(M) = L_{2,g}(M \setminus G^0)$ с индефинитной метрикой $[\cdot, \cdot]_M$ есть пространство Крейна с канонической симметрией $Ju = (\chi_{M \cap G^+} - \chi_{M \cap G^-})u$ ($\chi_{M \cap G^\pm}$ — характеристические функции соответствующих множеств).

Функция $u \in H_1(a, b)$, $u \neq 0$, называется собственной функцией задачи (1.1), если равенство (1.1) выполняется в пространстве $H_1'(a, b)$ для некоторого $\lambda \in \mathbf{C}$. Множество $\{u_k\}_{k=0}^N$ есть цепочка собственных и присоединенных векторов задачи (1.1), отвечающих собственному значению λ, если

$$Lu_k - \lambda g(x) u_k - g(x) u_{k-1} = 0, \quad u_k \in H_1(a, b), \quad k = \overline{0, N}, \quad u_{-1} = 0.$$

Фактически, собственные и присоединенные функции есть обобщенные решения соответствующих задач. Но если, например, $g(x) \in L_2(0, 1)$, то эти функции принадлежат $D(L)$ и уравнение (1.1) удовлетворяется в обычном смысле.

Мы будем использовать следующие результаты из [1, 2] (см. также [17, 18]).

Теорема 2.1. *При выполнении вышеприведенных условий существует базис по Риссу пространства* $F_1(a, b)$*, состоящий из собственных и присоединенных функций задачи* (1.1)*. Собственные и присоединенные функции задачи* (1.1) *плотны в* $F_0(a, b)$*. Базис по Риссу пространства* $F_0(a, b)$*, состоящий из этих функций, нормированных в* $F_0(a, b)$*, существует тогда и только тогда, когда*

$$(F_1(a, b), F_{-1}(a, b))_{1/2,2} = F_0(a, b). \tag{2.4}$$

3. Условия регулярности

Компонента связности I множества G^0 называется вырожденной, если задача Дирихле

$$Lu = 0, \quad u^{(i)}\Big|_{\partial I} = 0 \ \ (i = 0, 1, \dots, m-1)$$

имеет нетривиальное решение.

Предположим, что

(1) число точек поворота конечно и

(2) число компонент связности I множества G^0 таких, что $\overline{I} \cap \partial G^+ \neq \emptyset$ и $\overline{I} \cap \partial G^- \neq \emptyset$, конечно.

Пусть $\{x_k\}_{k=1}^M$ и $\{I_k\}_{k=1}^N$ — точки поворота из (a, b) и вырожденные компоненты связности множества G^0 такие, что $\overline{I_k} \subset (a, b)$, $\overline{I_k} \cap \partial G^+ \neq \emptyset$ и $\overline{I_k} \cap \partial G^- \neq \emptyset$.

Мы будем использовать условия регулярности точек поворота и вырожденных интервалов из [13–16].

(3) Для каждой точки $x_k \in \partial G^+ \cap \partial G^-$ существует правая окрестность $(x_k, x_k + \delta) = I$ или левая окрестность $(x_k - \delta, x_k) = I$ этой точки такие, что $I \subset G^+ \cup G^-$ и для некоторого $\omega \in (0, 1)$ выполнено

$$\int_{x_k}^{x_k+\omega\eta} |g(\tau)|\, d\tau \leq \frac{1}{2} \int_{x_k}^{x_k+\eta} |g(\tau)|\, d\tau \quad \forall \eta \in (0, \delta) \ \ (\text{или } \forall \eta \in (-\delta, 0)). \tag{3.1}$$

(4) Для каждого интервала $I_k = (x_0, y_0)$ существует правая окрестность $(y_0, y_0 + \delta) = I$ или левая окрестность $(x_0 - \delta, x_0) = I$ этого интервала такая, что $I \subset G^+ \cup G^-$ и для некоторого $\omega \in (0, 1)$ выполнено

$$\int_{y_0}^{y_0+\omega\eta} |g(\tau)|\, d\tau \leq \frac{1}{2} \int_{y_0}^{y_0+\eta} |g(\tau)|\, d\tau \quad (\forall \eta \in (0, \delta)) \tag{3.2}$$

в первом случае и

$$\int_{x_0-\omega\eta}^{x_0} |g(\tau)|\, d\tau \leq \frac{1}{2} \int_{x_0-\eta}^{x_0} |g(\tau)|\, d\tau \quad (\forall \eta \in (0, \delta)) \tag{3.3}$$

во втором.

В некоторых случаях нам нужно дополнительное условие регулярности граничной точки.

(5) Граничная точка $a \neq -\infty$ $(b \neq \infty)$ регулярна в следующих случаях:

a) $a \in \partial G^+$ или $a \in \partial G^-$ $(b \in \partial G^+$ или $b \in \partial G^-)$ и существует правая окрестность $I = (a, a + \delta)$ точки a (левая окрестность $I = (b - \delta, b)$ точки b) такая, что $I \subset G^+$ или $I \subset G^-$ и для некоторого $\omega \in (0, 1)$ выполнено

$$\int_{a}^{a+\omega\eta} |g(\tau)|\, d\tau \leq \frac{1}{2} \int_{a}^{a+\eta} |g(\tau)|\, d\tau \quad \forall \eta \in (0, \delta) \tag{3.4}$$

$$\left(\text{соответственно} \quad \int_{b-\omega\eta}^{b} |g(\tau)|\, d\tau \leq \frac{1}{2} \int_{b-\eta}^{b} |g(\tau)|\, d\tau \quad \forall \eta \in (0, \delta)\right); \tag{3.5}$$

b) для некоторого $x_0 \in (a, b)$ $(a, x_0) \subset G^0$ $((x_0, b) \subset G^0)$ и существует правая окрестность $I = (x_0, x_0 + \delta)$ точки x_0 (левая окрестность $I = (x_0 - \delta, x_0)$ точки x_0) такая, что $I \subset G^+ \cup G^-$ и для некоторого $\omega \in (0, 1)$ выполнено

$$\int_{x_0}^{x_0+\omega\eta} |g(\tau)|\, d\tau \leq \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0+\eta} |g(\tau)|\, d\tau \quad \forall \eta \in (0, \delta) \tag{3.6}$$

$$\text{(соответственно} \quad \int_{x_0-\omega\eta}^{x_0} |g(\tau)|\,d\tau \le \frac{1}{2}\int_{x_0-\eta}^{x_0} |g(\tau)|\,d\tau \quad \forall\eta \in (0,\delta)). \tag{3.7}$$

Нетрудно проверить, что условия (3) и (4) регулярности намного слабее использованных в [18]. В следующей теореме мы опишем эквивалентные условия регулярности из [13–16]. Чтобы упростить изложение мы их формулируем для точки $x_0 = 0$ и интервала $(0,1)$. Неравенства (3.1)–(3.7) есть фактически условие (b) с $f(\eta) = \int_0^\eta |g(\tau)|\,d\tau$, сформулированное для произвольной точки.

Теорема 3.1. *Следующие условия для неубывающей функции* $f : (0,1) \to R_+$ *эквивалентны:*

(a) $\forall\gamma \in (0,1)$ $\exists\omega \in (0,1)$ *такое, что* $\forall\varepsilon \in (0,1)$ $f(\omega\varepsilon) \le \gamma f(\varepsilon)$*;*

(b) $\exists\omega \in (0,1)$ *такое, что* $f(\omega\varepsilon) \le f(\varepsilon)/2$ $\forall\varepsilon \in (0,1)$*;*

(c) $\exists\beta \in (0,1)$ $\exists\omega \in (0,1)$ *такое, что* $\forall\varepsilon \in (0,1)$ $f(\omega\varepsilon) \le \beta f(\varepsilon)$*;*

(d) *существуют постоянные* $c, d > 0$ *такие, что*

$$f(\eta) \le c\Big(\frac{\eta}{\xi}\Big)^d f(\xi) \quad \forall 0 < \eta \le \xi < 1.$$

(e) *не существует последовательностей* a_n, b_n *таких, что* $0 < a_n < b_n < 1$ *и*

$$a_n/b_n \to 0, \quad f(a_n)/f(b_n) \to 1 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Эквивалентность (b), (d) и (e) доказана в теореме 6 из [13]. Полное доказательство может быть найдено в [16].

Пусть $g(x) \in L_1(0,1)$ и $g(x) > 0$ п. в. на $(0,1)$. Обозначим через $\tilde W_2^m(0,1)$ подпространство $W_2^m(0,1)$, включающее функции $u(x)$ такие, что $u^{(i)}(0) = 0$ при $0 \le i \le m-1$.

Теорема 3.2. (см. теорему 18 в [15] и [16]) *Любое из условий* (a)–(e)*, сформулированное для функции* $f(\eta) = \int_0^\eta |g(\tau)|\,d\tau$*, эквивалентно следующему: существует* $\theta \in (0,1)$ *такое, что* $(W_2^m(0,1), L_{2,g}(0,1))_{1-\theta,2} = (\tilde W_2^m(0,1), L_{2,g}(0,1))_{1-\theta,2}$.

Как непосредственное следствие теоремы 3.2 мы имеем следующее утверждение.

Следствие 3.1. *При выполнении условий теоремы* 3.2 *существует* $\theta \in (0,1)$ *такое, что* $(\mathring{W}{}_2^m(0,1), L_{2,g}(0,1))_{1-\theta,2} = (\bar W_2^m(0,1), L_{2,g}(0,1))_{1-\theta,2}$*, где* $\bar W_2^m(0,1) = \{u \in W_2^m(0,1) : \ u^{(i)}(1) = 0, \ i = 0,1,\ldots,m-1\}$.

4. Главные результаты

Ввиду теоремы 2.1 мы ищем условия, гарантирующие (2.4). Для начала предположим, что граничные условия (1.3) локальны. Пусть $[\alpha,\beta] \subset G^+ \cup G^-$. Положим

$$H_1(a,\beta) = \{u \in W_2^m(a,\beta) : \ R_k u = 0 \ (k = 1,2,\ldots,s_1), \quad u^{(i)}(\beta) = 0 \ (i \le m-1)\},$$
$$H_1(\alpha,b) = \{u \in W_2^m(\alpha,b) : \ S_k u = 0 \ (k = 1,2,\ldots,s_2), \quad u^{(i)}(\alpha) = 0 \ (i \le m-1)\}.$$

Можем построить пространства $F_1(a,\beta)$, $F_{-1}(a,\beta)$, $F_1(\alpha,b)$ и $F_{-1}(\alpha,b)$. Положим $(F_1(a,\beta),\ F_{-1}(a,\beta))_{(1-s)/2,2} = \tilde F_s(a,\beta)$. По аналогии также определим пространства $\tilde F_s(\alpha,b)$ и $\tilde F_s(a,b)$.

Лемма 4.1. *Пусть граничные условия локальны. Тогда* $\tilde F_0(a,b) = F_0(a,b)$, *если и только если* $\tilde F_0(a,\beta) = F_0(a,\beta)$ *и* $\tilde F_0(\alpha,b) = F_0(\alpha,b)$.

Доказательство. Найдем функцию $\varphi \in C^\infty([a,b])$ такую, что $\varphi(x) = 1$ при $x \le \alpha$, $\varphi(x) = 0$ при $x \ge \beta$, $0 \le \varphi(x) \le 1$ при $x \in (\alpha,\beta)$ и $\operatorname{supp}\varphi' \subset (\alpha,\beta)$. Построим операторы $P_1u = \varphi u$, $P_2u = (1-\varphi)u$. Имеем $P_1 : F_0(a,b) \to F_0(a,\beta)$ и $P_2 : F_0(a,b) \to F_0(\alpha,b)$. Используя определение норм, выводим что

$$\begin{aligned} P_1 &\in L(F_0(a,b),F_0(a,\beta)) \cap L(F_1(a,b),F_1(a,\beta)),\\ P_2 &\in L(F_0(a,b),F_0(\alpha,b)) \cap L(F_1(a,b),F_1(\alpha,b)). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Пусть P_{ic} есть операторы продолжения нулем на весь интервал (a,b) функций из $F_0(a,\beta)$ и $F_0(\alpha,b)$ соответственно. Очевидно, что

$$\begin{aligned} P_{1c} &\in L(F_0(a,\beta),F_0(a,b)) \cap L(F_1(a,\beta),F_1(a,b)),\\ P_{2c} &\in L(F_0(\alpha,b),F_0(a,b)) \cap L(F_1(\alpha,b),F_1(a,b)) \end{aligned}$$

и, таким образом, соответствующие операторы $P_1^c = P_{1c}\varphi u$ и $P_2^c = P_{2c}(1-\varphi)u$ обладают теми же свойствами, т. е.

$$\begin{aligned} P_1^c &\in L(F_0(a,\beta),F_0(a,b)) \cap L(F_1(a,\beta),F_1(a,b)),\\ P_2^c &\in L(F_0(\alpha,b),F_0(a,b)) \cap L(F_1(\alpha,b),F_1(a,b)). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Кроме того, мы имеем

$$[P_1u,v]_{(a,\beta)} = [u,P_1^cv]_{(a,b)}, \quad [P_2u,v]_{(\alpha,b)} = [u,P_2^cv]_{(a,b)}.$$

Отсюда, из (4.1), (4.2) и определений пространств $F_{-1}(a,b)$, $F_{-1}(a,\beta)$ и $F_{-1}(\alpha,b)$ заключаем, что операторы P_1, P_2 (так же, как и P_1^c, P_2^c) могут быть продолжены так, что

$$\begin{aligned} &P_1 \in L(F_{-1}(a,b),F_{-1}(a,\beta)), \quad P_2 \in L(F_{-1}(a,b),F_{-1}(\alpha,b)),\\ &P_1^c \in L(F_{-1}(a,\beta),F_{-1}(a,b)), \quad P_2^c \in L(F_{-1}(\alpha,b),F_{-1}(a,b)) \end{aligned} \tag{4.3}$$

(продолжения обозначаются теми же символами). Как следствие (4.1)–(4.3), мы получим

$$\begin{aligned} &P_1 \in L(\tilde F_s(a,b),\tilde F_s(a,\beta)), \quad P_2 \in L(\tilde F_s(a,b),\tilde F_s(\alpha,b)),\\ &P_1^c \in L(\tilde F_s(a,\beta),\tilde F_s(a,b)), \quad P_2^c \in L(\tilde F_s(\alpha,b),\tilde F_s(a,b)) \end{aligned} \tag{4.4}$$

для всех $s \in [-1,1]$.

Вначале предположим, что $\tilde F_0(a,\beta) = F_0(a,\beta)$ и $\tilde F_0(\alpha,b) = F_0(\alpha,b)$. Возьмем функцию $u \in \tilde F_0(a,b)$. В силу (4.4) $P_1u \in F_0(a,\beta)$ и $P_2u \in F_0(\alpha,b)$. Тогда $P_{1c}P_1u \in F_0(a,b)$ и $P_{2c}P_2u \in F_0(a,b)$ и, как следствие, $u = P_{1c}P_1u + P_{2c}P_2u \in F_0(a,b)$. Следовательно, мы пришли к вложению $\tilde F_0(a,b) \subset F_0(a,b)$. По лемме 2.1 $\tilde F_0(a,b) = F_0(a,b)$.

Пусть $\tilde F_0(a,b) = F_0(a,b)$. Докажем, что $\tilde F_0(a,\beta) = F_0(a,\beta)$. Равенство $\tilde F_0(\alpha,b) = F_0(\alpha,b)$ доказывается по аналогии. Пусть $H_1(\alpha,\beta) = \overset{\circ}{W}{}_2^m(\alpha,\beta)$. Введем вспомогательный оператор $\tilde P_2u = (1-\varphi)u$, $\tilde P_2 : F_0(a,\beta) \to F_0(\alpha,\beta)$, ограничение которого на $F_1(a,\beta)$ принадлежит $L(F_1(a,\beta),F_1(\alpha,\beta))$ (отметим, что $F_1(\alpha,\beta) = H_1(\alpha,\beta)$). В этом случае пространство $F_{-1}(\alpha,\beta)$ совпадает с $F_1'(\alpha,\beta)$ и, кроме того, $(F_1(\alpha,\beta),F_{-1}(\alpha,\beta))_{1/2,2} = F_0(\alpha,\beta)$ в силу (2.1). Как и раньше, получим, что $\tilde P_2 \in L(F_{-1}(a,\beta),F_{-1}(\alpha,\beta))$ и, таким образом, $\tilde P_2 \in L(\tilde F_s(a,\beta),\tilde F_s(\alpha,\beta))$ $\forall s \in [-1,1]$. Выберем $u \in \tilde F_0(a,\beta)$. В силу (4.4) $P_1^cu \in \tilde F_0(a,b) = F_0(a,b)$ и тогда $\varphi u \in F_0(a,\beta)$. Кроме того, $\tilde P_2u \in \tilde F_0(\alpha,\beta) = F_0(\alpha,\beta)$. В этом случае

$(1-\varphi)u \in F_0(a,\beta)$. Поэтому $u = \varphi u + (1-\varphi)u \in F_0(a,\beta)$. Поскольку функция u произвольна, мы получим вложение $\tilde F_0(a,\beta) \subset F_0(a,\beta)$. Лемма 2.1 влечет, что $\tilde F_0(a,\beta) = F_0(a,\beta)$. Мы доказали утверждение.

Пусть $[\alpha_i,\beta_i] \subset G^+ \cup G^-$ при $i = 1,2$ и пусть $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2$.

Построим вспомогательные пространства

$$H_1((a,\beta_1)\cup(\alpha_2,b)) = \{u \in W_2^m((a,\beta_1)\cup(\alpha_2,b)) :$$
$$B_k u = 0 \ (k = 1,2,\dots,s_0),\ u^{(i)}(\alpha_2) = 0,\ u^{(i)}(\beta_1) = 0, \quad i = 0,1,\dots,m-1\},$$

$$H_1(\alpha_1,\beta_2) = \overset{\circ}{W}{}_2^m(\alpha_1,\beta_2).$$

Как и ранее определим пространства $F_1((a,\beta_1)\cup(\alpha_2,b))$, $F_{-1}((a,\beta_1)\cup(\alpha_2,b))$, $F_1(\alpha_1,\beta_2)$, $F_{-1}(\alpha_1,\beta_2)$. Положим $(F_1((a,\beta_1)\cup(\alpha_2,b)), F_{-1}((a,\beta_1)\cup(\alpha_2,b)))_{(1-s)/2,2} = \tilde F_s((a,\beta_1)\cup(\alpha_2,b))$ и $(F_1(\alpha_1,\beta_2),\ F_{-1}(\alpha_1,\beta_2))_{(1-s)/2,2} = \tilde F_s(\alpha_1,\beta_2)$.

В следующей лемме мы рассмотрим случай произвольных граничных условий.

Лемма 4.2. $\tilde F_0(a,b) = F_0(a,b)$ *тогда и только тогда, когда* $\tilde F_0((a,\beta_1)\cup(\alpha_2,b)) = F_0((a,\beta_1)\cup(\alpha_2,b))$ *и* $\tilde F_0(\alpha_1,\beta_2) = F_0(\alpha_1,\beta_2)$.

Доказательство. Найдем функцию $\varphi \in C^\infty([a,b])$ такую, что $\varphi(x) = 1$ при $x \le \alpha_1$ и при $x \ge \beta_2$, $\varphi(x) = 0$ при $x \in [\beta_1,\alpha_2]$, $0 \le \varphi(x) \le 1$ при $x \in (a,b)$ и $\operatorname{supp}\varphi' \subset (\alpha_1,\beta_1)\cup(\alpha_2,\beta_2)$. Построим операторы $P_1u = \varphi u$, $P_2u = (1-\varphi)u$. Далее мы рассуждаем точно так же, как в доказательстве леммы 4.1.

Пусть U_1, U_2 — компоненты связности множеств $[a,b]\setminus G^+$ и $[a,b]\setminus G^-$, содержащие a и b соответственно. Рассмотрим вспомогательную задачу Дирихле

$$Lu = \lambda g(x)u, \quad u^{(i)}(c) = u^{(i)}(d) = 0, \quad i = 0,1,\dots,m-1, \tag{4.5}$$

где $c,d \in G^+\cup G^-\cup\{a,b\}$, $c \in U_1$, $d \in U_2$. Говорим, что имеет место базисность по Риссу в задаче (1.1) (или (4.5)), если существует базис по Риссу пространства $F_0(a,b)$ ($F_0(c,d)$), состоящий из собственных и присоединенных функций задачи.

Теорема 4.1. *Пусть выполнено одно из следующих условий:*

a) *граничные условия локальны;*

b) $U_1,U_2 \subset [a,b]\setminus G^+$ *или* $U_1,U_2 \subset [a,b]\setminus G^-$;

c) *или* $U_1 \subset [a,b]\setminus G^+$ *и* $U_2 \subset [a,b]\setminus G^-$ *или* $U_1 \subset [a,b]\setminus G^-$ *и* $U_2 \subset [a,b]\setminus G^+$ *и по крайней мере одно из множеств* U_1,U_2 *содержит невырожденную компоненту связности множества* G^0 *вида* (a,α) *или* (α,b) *соответственно.*

d) *одна из граничных точек* a *и* b *регулярна.*

Тогда базисность по Риссу в задачах (1.1) *и* (4.5) *имеет место одновременно.*

Доказательство. Пусть условие a) выполнено. Возьмем $c_1 \in U_1\cap(G^+\cup G^-)$ и $d_1 \in U_2\cap(G^+\cup G^-)$ и найдем промежутки $[c_1,\beta_1] \subset U_1\cap(G^+\cup G^-)$ и $[\alpha_2,d_1] \subset U_2\cap(G^+\cup G^-)$. Применяя лемму 4.1 два раза, мы заключаем, что $\tilde F_0(a,b) = F_0(a,b)$ тогда и только тогда, когда $\tilde F_0(a,\beta_1) = F_0(a,\beta_1)$, $\tilde F_0(c_1,d_1) = F_0(c_1,d_1)$, и $\tilde F_0(\alpha_2,b) = F_0(\alpha_2,b)$. Однако, $F_{-1}(a,\beta_1) = F_1'(a,\beta_1)$ и $F_{-1}(\alpha_2,b) = F_1'(\alpha_2,b)$. Следовательно, $\tilde F_0(a,\beta_1) = F_0(a,\beta_1)$ и $\tilde F_0(\alpha_2,b) = F_0(\alpha_2,b)$. Отсюда получим, что $\tilde F_0(a,b) = F_0(a,b)$ тогда и только тогда, когда $\tilde F_0(c_1,d_1) = F_0(c_1,d_1)$. Поскольку точки c_1 и d_1 произвольны, $\tilde F_0(a,b) = F_0(a,b)$ тогда и только тогда, когда $\tilde F_0(c,d) = F_0(c,d)$. Сейчас утверждение вытекает из теоремы 2.1.

Предположим, что выполнено условие b). Возьмем произвольные промежутки $[c_1,\beta_1] \subset U_1\cap(G^+\cup G^-)\cap$ и $[\alpha_2,d_1] \subset U_2\cap(G^+\cup G^-)$. Применяя лемму 4.2, мы выводим, что $\tilde F_0(a,b) = F_0(a,b)$, если и только если $\tilde F_0((a,\beta_1)\cup(\alpha_2,b)) = F_0((a,\beta_1)\cup$

$(\alpha_2, b))$ и $\tilde{F}_0(c_1, d_1) = F_0(c_1, d_1)$. Однако, $F_{-1}((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b)) = F_1'((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b))$ и, таким образом, $\tilde{F}_0((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b)) = F_0((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b))$ в силу (2.1). Далее, мы применим теорему 2.1 и используем тот факт, что точки c_1, d_1 с вышеприведенными свойствами произвольны.

Рассмотрим случай c). Для определенности предположим, что первый случай в c) реализуется и множество U_1 содержит невырожденную компоненту связности (a, α) множества G^0. Рассуждения в оставшихся случаях аналогичны. Возьмем произвольные промежутки $[c_1, \beta_1] \subset U_1 \cap (G^+ \cup G^-)$ и $[\alpha_2, d_1] \subset U_2 \cap (G^+ \cup G^-)$. Очевидно, что $c_1 > \alpha$. Ввиду леммы 4.2 $\tilde{F}_0(a, b) = F_0(a, b)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{F}_0((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b)) = F_0((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b))$ и $\tilde{F}_0(c_1, d_1) = F_0(c_1, d_1)$. Покажем, что оператор

$$Su = \begin{cases} u, & x \in (a, \beta_1) \cap G^-, \\ 0, & x \in (\alpha_2, b) \end{cases}$$

принадлежит классу $L(\tilde{F}_s((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b)))$ при всех $s \in [0, 1]$. Действительно, пусть $u \in F_1((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b))$. Существует функция $\tilde{u} \in W_2^m((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b))$ такая, что $u = \tilde{u}$ при $x \in ((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b)) \cap (G^+ \cup G^-)$ и $B_k \tilde{u} = 0$ при $k = 1, 2, \dots, s_0$. Решая задачу Дирихле

$$Lv_0 = 0, \quad v_0^{(i)}(a) = 0, \quad v_0^{(i)}(\alpha) = \tilde{u}^{(i)}(\alpha) = u^{(i)}(\alpha), \quad i = 0, 1, \dots, m-1,$$

мы можем построить функцию

$$v = \begin{cases} v_0, & x \in (a, \alpha), \\ \tilde{u}, & x \in (\alpha, \beta_1), \\ 0, & x > \beta_1, \end{cases}$$

которая совпадает с Su на $((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b)) \cap (G^+ \cup G^-)$. Следовательно, $Su \in F_1((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b))$. Используя определение, получим неравенство

$$\|Su\|_{F_1((a,\beta_1)\cup(\alpha_2,b))} \le c\|u\|_{F_1((a,\beta_1)\cup(\alpha_2,b))} \quad \forall u \in F_1((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b)),$$

где c — постоянная, не зависящая от u. Очевидно, $S \in L(F_0((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b)), F_0((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b)))$ и тогда $S \in L(F_s((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b)), F_s((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b)))$ для всех $s \in [0, 1]$, где $F_s((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b)) = (F_1((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b))), F_0((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b)))_{1-s,2}$. По лемме 2.1 $\tilde{F}_0((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b)) = F_0((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b))$. Утверждение вытекает из теоремы 2.1.

Для определенности предположим, что a — регулярная точка, т. е. выполнено (5). Например, пусть правая окрестность $I = (a, a + \delta) \subset G^+$ точки a со свойствами указанными в (5a) существует. Без ограничения общности, мы можем считать, что множества U_1, U_2 суть подмножества различных множеств $[a, b] \setminus G^+$ и $[a, b] \setminus G^-$. Возьмем произвольные промежутки $[c_1, \beta_1] \subset I$ ($c_1 > a$) и $[\alpha_2, d_1] \subset U_2 \cap (G^+ \cup G^-)$. Ввиду леммы 4.2 $\tilde{F}_0(a, b) = F_0(a, b)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{F}_0((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b)) = F_0((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b))$ и $\tilde{F}_0(c_1, d_1) = F_0(c_1, d_1)$. Положим $\tilde{W}_2^m(a, \beta_1) = \{u \in W_2^m(a, \beta_1) : \ u^{(i)}(\beta_1) = 0, \ i = 0, 1 \dots, m-1\}$. В соответствии со следствием 3.1 существует $s_0 > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} F_s(a, \beta_1) &= (\overset{\circ}{W}{}_2^m(a, \beta_1), L_{2,g}(a, \beta_1))_{1-s,2} \\ &= (\tilde{W}_2^m(a, \beta_1), L_{2,g}(a, \beta_1))_{1-s,2} = \tilde{W}_2^{ms}(a, \beta_1)). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Рассмотрим отображение $P : F_1((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b)) \to \tilde{W}_2^m(a, \beta_1)$, переводящее функцию $u \in F_1((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b))$ в ее сужение на интервал (a, β_1). Очевидно, что

$$P \in L(F_1((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b)), \tilde{W}_2^m(a, \beta_1)) \cap L(F_0((a, \beta_1) \cup (\alpha_2, b)), F_0(a, \beta_1))$$

и, как следствие, $P \in L(F_s((a,\beta_1)\cup(\alpha_2,b)), \tilde{W}_2^{ms}(a,\beta_1))$. Как и ранее положим $F_s((a,\beta_1)\cup(\alpha_2,b)) = (F_1((a,\beta_1)\cup(\alpha_2,b))), F_0((a,\beta_1)\cup(\alpha_2,b)))_{1-s,2}$. Построим отображение

$$Su = \begin{cases} u, & x \in (a,\beta_1), \\ 0, & x \in (\alpha_2, b), \end{cases}$$

которое принадлежит $L(\overset{\circ}{W}{}_2^m(a,\beta_1), F_1((a,\beta_1)\cup(\alpha_2,b)))\cap L(F_0(a,\beta_1), F_0((a,\beta_1)\cup(\alpha_2,b)))$ и, следовательно, $S \in L(F_s(a,\beta_1), F_s((a,\beta_1)\cup(\alpha_2,b)))$ для $s \in [0,1]$. Ввиду (4.6) оператор SP продолжения нулем в пространстве $\tilde{F}_s((a,\beta_1)\cup(\alpha_2,b))$ непрерывен для $s \in [0,s_0]$. По лемме 2.1 $\tilde{F}_0((a,\beta_1)\cup(\alpha_2,b)) = F_0((a,\beta_1)\cup(\alpha_2,b))$. Утверждение вытекает из теоремы 2.1. Аналогичные рассуждения применимы в случае (5b).

Пусть $J_i = (\alpha_i,\beta_i)$ $(i = 1,2,\dots,K)$ есть произвольное конечное множество попарно непересекающихся интервалов таких, что $\overline{J_i} \subset (a,b)$, $\beta_i < \alpha_{i+1}$, $\alpha_i,\beta_i \in G^+\cup G^-$ (для всех i) и каждая компонента связности множества $(a,b)\setminus \cup_j \overline{J_j}$ принадлежит $(a,b)\setminus G^+$ или $(a,b)\setminus G^-$.

Рассмотрим вспомогательные спектральные задачи

$$Lu = \lambda g(x)u, \quad u^{(i)}(\alpha_k) = u^{(i)}(\beta_k) = 0, \quad i = 0,1,\dots,m-1. \tag{4.7}$$

Теорема 4.2. *Пусть выполнено одно из условий теоремы* 4.1. *Тогда базисность по Риссу имеет место в задаче* (1.1) *тогда и только тогда, когда базисность по Риссу имеет место в каждой из задач* (4.7). *Утверждение остается справедливым, если мы заменим граничные условия Дирихле в* (4.7) *граничными условиями Неймана.*

Утверждение вытекает из теоремы 4.1 и леммы 4.1.

Следующая теорема — уточнение теоремы 3.2 в [18].

Теорема 4.3. *Пусть условия* (1)–(4) *и одно из условий теоремы* 4.1 *выполнены. Тогда из собственных и присоединенных функций задачи* (1.1) *мы можем построить базис по Риссу пространства* $F_0(a,b)$ *со следующими свойствами. Каждая функция* $f(x) \in F_0(a,b) = L_{2,g}(G^+\cup G^-)$ *представима единственным образом в виде*

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^+ c_i^+ + \sum_{i=1}^{\infty} u_i^- c_i^- + \sum_{i=1}^{M} u_i c_i \quad (M < \infty), \tag{4.8}$$

где u_i^+ (u_i^-) *— собственные функции отвечающие положительным (отрицательным) собственным значениям* $\lambda_i^{\pm}$,

$$[u_i^{\pm}, u_j^{\pm}]_{(a,b)} = \pm\delta_{ij},\ c_i^{\pm} = \pm[f, u_i^{\pm}]_{(a,b)},\ [u_i^{\pm}, u_j]_{(a,b)} = 0,\ [u_i^+, u_j^-]_{(a,b)} = 0$$

и $\{u_j\}_{j=1}^M$ *— базис в некотором конечномерном подпространстве, совпадающем с линейной оболочкой некоторых собственных и присоединенных функций задачи* (1.1). *Норма в* $F_0(a,b)$ *эквивалентна норме*

$$\|f\|^2_{F_0(a,b)} = \sum_{i=1}^{\infty}(|c_i^+|^2 + |c_i^-|^2) + \sum_{i=1}^{M}|c_i|^2.$$

Если $f \in F_1(a,b)$, *то функция* f *также представима в виде* (4.8) *и ее норма в* F_1 *эквивалентна норме*

$$\|f\|^2_{F_1} = \sum_{i=1}^{\infty}(|\lambda_i^+||c_i^+|^2 + |\lambda_i^-||c_i^-|^2) + \sum_{i=1}^{M}|c_i|^2.$$

Если $f \in L_{2,g}(G^+)$ $(f \in L_{2,g}(G^-))$, *то функция* f *представима в виде*

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^+ c_i^+ + \sum_{i=1}^{M^+} v_i^+ a_i^+ \quad (M^+ < \infty),$$

или в виде

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^- c_i^- + \sum_{i=1}^{M^-} v_i^- a_i^- \quad (M^- < \infty),$$

где $\{v_i^\pm\}$ — *некоторое конечное множество собственных и присоединенных функций. Норма в* $L_{2,g}(G^+)$ *или в* $L_{2,g}(G^-)$ *эквивалентна норме*

$$\|f\|^2_{L_{2,g}(G^\pm)} = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i^\pm|^2 + \sum_{i=1}^{M^\pm} |a_i^\pm|^2,$$

т. е. соответствующие “половины” из собственных и присоединенных функций образуют базисы Рисса в пространствах $L_{2,g}(G^+)$ *и*$L_{2,g}(G^-)$.

Доказательство. Чтобы доказать теорему, необходимо проверить интерполяционное условие $(F_1(a,b), F_{-1}(a,b))_{1/2,2} = F_0(a,b)$ и затем использовать теоремы 2.2–2.4 из [17] (см. также соответствующие теоремы в [1, 2]). Ввиду теоремы 4.1 мы можем свести задачу к задаче на ограниченном интервале с локальными граничными условиями (например, условиями Дирихле). Далее, мы можем сослаться на теорему 3.2 в [18]. Несмотря на факт, что мы используем другие условия регулярности точки поворота по сравнению с теми, что в [18], теорема 3.2 п. 3 выше гарантирует, что те же самые рассуждения справедливы.

Рассмотрим случай $m = 1$, т. е. задача (1.1) записывается в виде

$$-(r(x)u')' + q(x)u = \lambda g(x)u, \qquad u(a) = u(b) = 0, \tag{4.9}$$

где $r \in W^1_\infty(a,b)$ и $q, 1/r \in L_\infty(a,b)$. Предположим, что $\mu(G^0) = 0$ и имеется конечное число точек поворота. Предположим, что для любой такой точки x_0 существует число $\delta > 0$ такое, что $g(x_0 + \eta) = -g(x_0 - \eta)$ при $|\eta| \le \delta$.

В это случае мы имеем следующую

Лемма 4.3. *Существует базис по Риссу пространства* $F_0(a,b)$ *из собственных и присоединенных задачи* (4.9) (*и, таким образом, справедливо утверждение теоремы* 4.3) *тогда и только тогда, когда каждая из точек поворота регулярна* (*т. е. выполнено условие* (3)).

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы 4.2, теоремы 3.1 и теоремы 6 из [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В.* Неклассические операторно-дифференциальные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
2. *Pyatkov S. G.* Operator theory. Nonclassical problems. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2002.
3. *Gokhberg I. Ts., Krein M. G.* Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators in Hilbert spaces. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1969.
4. *Beals R.* Indefinite Sturm – Liouville problem and half-range completeness // J. Differ. Equations. 1985. V. 56, N 3. P. 391–407.

5. *Binding P., Curgus B.* A counterexample in Sturm – Liouville completeness theory // Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math. 2004. V. 134, N 2. P. 241–248.

6. *Binding P., Curgus B.* Riesz bases of root vectors of indefinite Sturm – Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions, I. 2004. (Preprint).

7. *Curgus B.* On the regularity of the critical point infinity of definizable operators // Integral Equations Oper. Theory. 1985. V. 8, N 4. P. 462–488.

8. *Curgus B., Neiman B.* A Krein space approach to elliptic eigenvalue problems with indefinite weights // Differ. Integral Equ. 1989. V. 79, N 1. P. 31–62.

9. *Curgus B., Langer H.* A Krein space approach to symmetric ordinary differential operators with an indefinite weight function // J. Differ. Equations. 1989. V. 7, N 5/6. P. 1241–1252.

10. *Faierman M., Roach G. F.* Full and half-range eigenfunction expansions for an elliptic boundary value problem involving an indefinite weight // Proc. 1987 Equadiff Conference, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. V. 118. New York and Basel: Dekker, 1989. P. 231–236.

11. *Faierman M., Langer H.* Elliptic problems involving an indefinite weight function // Operator Theory: Advances and Applications. V. 87. Basel: Birkhauser Verlag, 1996. P. 105–127.

12. *Fleige A.* Spectral theory of indefinite Krein – Feller differential operators. Math. Research. V. 98. Berlin: Akad. Verl., 1996.

13. *Парфенов А. И.* Об одном критерии вложения интерполяционных пространств и его приложении к индефинитным спектральным задачам // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 4. С. 810–819.

14. *Парфенов А. И.* Об условии Чургуса и индефинитных задачах Штурма – Лиувилля // Мат. труды. 2004. Т. 7, № 1. С. 153–188.

15. *Парфенов А. И.* Сжимающий оператор и граничные значения. Новосибирск, 2005. (Препринт/ РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 155.).

16. *Парфенов А. И.* Базисность по Риссу собственных функций индефинитных эллиптических задач: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 2005.

17. *Pyatkov S. G.* Elliptic eigenvalue problems with an indefinite weight function // Sib. Adv. Math. 1994. V. 1, N 2. P. 87–104.

18. *Pyatkov S. G.* Interpolation of some function spaces and indefinite Sturm – Liouville problems // Operator Theory: Advances and Applications. V. 102. Basel: Birkhauser Verlag, 1998. P. 179–200.

19. *Volkmer H.* Sturm – Liouville problems with indefinite weights and Everitt's inequality. Technical Report N 7. 1994-1995 Academic Year, Technical Report Series of the Department of Mathematical Sciences, University of Wisconsin-Milwaukee.

20. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

21. *Triebel H.* Interpolation theory. Function spaces. Differential operators. Berlin: VEB Deucher Verlag Wiss, 1977.

22. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М.: Наука, 1986.

Пятков Сергей Григорьевич
Россия, Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Ханты-Мансийск, Югорский государственный универститет
`pyatkov@math.nsc.ru, pyatkov@uriit.ru`