УДК 517.956.32

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В КРАЕВОМ УСЛОВИИ

О. А. Репин

Для уравнения параболо-гиперболического типа исследована нелокальная задача. Характерной особенностью этой задачи является присутствие в краевом условии обобщенных дробных производных. Единственность решения доказана с помощью принципа экстремума для операторов дробного дифференцирования, а существование решения рассматриваемой задачи эквивалентно сведено к вопросу разрешимости интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$0 = \begin{cases} U_{xx} - U_y, \ (y > 0), \\ |y|^m U_{xx} - U_{yy}, \ (m > 0, y < 0) \end{cases} \tag{1}$$

в области D, которая представляет собой объединение квадрата $D^+ = ABMN$ с вершинами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$, $M(1,1)$, $N(0,1)$, интервала $J = AB = (0,1)$ и характеристического треугольника $D^- = ACB$ уравнения (1) с вершинами в точках A, B и $C(\frac{1}{2}, -(\frac{m+2}{4})^{\frac{2}{m+2}})$.

Заметим, что D^+ и D^- — соответственно параболическая и гиперболическая части области D.

Уравнение (1) примечательно тем, что оно представляет собой простую модель уравнения смешанного параболо-гиперболического типа, для которого линия $y = 0$ изменения типа является характеристикой параболического уравнения.

Пусть $\Theta_0 = \frac{x}{2} - i(\frac{m+2}{4}x)^{\frac{2}{m+2}}$ — аффикс точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точек $(x,0) \in J$ с характеристикой AC; $(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} f)(x)$ — оператор обобщенного дробного интегродифференцирования в смысле М. Сайго [1; 2, с. 326–327].

Для уравнения (1) изучим следующую нелокальную краевую задачу.

Задача. Найти решение $U(x,y)$ уравнения (1) из класса $U(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$U(0,y) = \varphi_1(y), \quad U(1,y) = \varphi_2(y) (y \in \bar{J}),$$

$$a(x)(I_{0+}^{\beta-1,1-2\beta,0} U[\Theta_0])(x) = b(x)x^\beta (I_{0+}^{2\beta-1,0,1-\beta} t^{\beta-1} U(t,-0))(x) + g(x) \quad (x \in J, \ \beta = \frac{m}{2m+4}), \tag{2}$$

$$U(x,+0) = U(x,-0) \quad (x \in \bar{J}),$$
$$\lim_{y\to+0} U_y(x,y) = \lim_{y\to-0} U_y(x,y) \quad (x \in J). \tag{3}$$

Здесь $\varphi_{1,2}(x)$, $g(x)$, $a(x)$, $b(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J)$, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$, а функции $a(x)$ и $b(x)$ являются разными по знаку для всех

$$x \in \bar{J}. \tag{4}$$

Отметим, что рассматриваемая задача продолжает наши исследования для уравнения (1), которые представлены в работе [3].

2. Единственность решения задачи

Пусть существует решение $U(x,y)$ поставленной задачи для уравнения (1).

Введем обозначения

$$U(x,+0) = \tau_1(x), \quad U(x,-0) = \tau_2(x),$$

$$\lim_{y\to+0} U_y(x,y) = \nu_1(x), \quad \lim_{y\to-0} U_y(x,y) = \nu_2(x).$$

Из уравнения (1) непосредственно вытекает, что $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$ связаны следующим соотношением, принесенным из параболической части D^+ смешанной области D на линию $y = 0$ [4, с. 98].

$$\tau_1''(x) = \nu_1(x), \quad \tau_1(0) = \tau_1(1) = 0, \tag{5}$$

или

$$\tau_1(x) = \int\limits_0^x (x-t)\nu_1(t)dt + x\int\limits_0^1 (t-1)\nu_1(t)dt,$$

которое получатся из предыдущего решением однородной двухточечной задачи (5).

Найдем функциональное соотношение между $\tau_2(x)$ и $\nu_2(x)$, принесенное на линию $y = 0$ из гиперболической части D^- области D. Для этого выпишем решение задачи Коши для уравнения (1) при $y < 0$, которое в характеристических координатах

$$\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}, \quad \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}},$$

выражается формулой [5]

$$U(\xi,\eta) = \gamma_1 \int\limits_\xi^\eta \frac{\tau_2(t)(\eta-\xi)^{1-2\beta}dt}{(\eta-t)^{1-\beta}(t-\xi)^{1-\beta}} - \gamma_2 \int\limits_\xi^\eta \frac{\nu_2(t)dt}{(\eta-t)^\beta(t-\xi)^\beta}, \tag{6}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2}(\frac{4}{m+2})^{2\beta}\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}.$$

На основании (6) имеем

$$U[\Theta_0(x)] = \gamma_1\Gamma(\beta)(I_{0+}^{\beta,0,\beta-1}\tau_2)(x) - \gamma_2\Gamma(1-\beta)(I_{0+}^{1-\beta,2\beta-1,\beta-1}\nu_2)(x). \tag{7}$$

Подставив (7) в краевое условие (2) и используя соотношение

$$(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} I_{0+}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta} f)(x) = (I_{0+}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta} f)(x)(\gamma > 0),$$

получим

$$\gamma_1 \Gamma(\beta) a(x) (I_{0+}^{2\beta-1,1-2\beta,\beta-1} \tau_2)(x) - \gamma_2 \Gamma(1-\beta) a(x) \nu_2(x) \\ = b(x) x^{\beta} (I_{0+}^{2\beta-1,0,1-\beta} t^{\beta-1} U(t,-0))(x) + g(x). \quad (8)$$

Докажем, что справедливо следующее равенство

$$(I_{0+}^{2\beta-1,0,1-\beta} t^{\beta-1} \tau_2)(x) = x^{-\beta} (D_{0+}^{1-2\beta} \tau_2)(x),$$

где $(D_{0+}^{1-2\beta} \tau_2)(x)$ — оператор дробного дифференцирования в смысле Римана – Лиувилля [2, с. 43; 6, с. 9].

Рассмотрим функцию

$$\psi_1(x) = (I_{0+}^{2\beta-1,0,1-\beta} t^{\beta-1} \tau_2(t))(x) = \frac{d}{dx} (I_{0+}^{2\beta,-1,-\beta} t^{\beta-1} \tau_2(t))(x)$$
$$= \frac{d}{dx} [\frac{x^{1-2\beta}}{\Gamma(2\beta)} \int_0^x (x-t)^{2\beta-1} t^{\beta-1} F(2\beta-1,\beta;2\beta;\frac{x-t}{x}) \tau_2(t) dt]$$
$$= \frac{1}{\Gamma(2\beta)} \frac{d}{dx} [\int_0^x t^{\beta-1} (\frac{x-t}{x})^{2\beta-1} F(2\beta-1,\beta;2\beta;\frac{x-t}{x}) \tau_2(t) dt].$$

Введем функцию $\psi_{1_\varepsilon}(x) = \frac{1}{\Gamma(2\beta)} \frac{d}{dx} [\int\limits_0^{x-\varepsilon} t^{\beta-1} (\frac{x-t}{x})^{2\beta-1} F(2\beta-1,\beta;2\beta;\frac{x-t}{x}) \tau_2(t) dt]$ и покажем, что $\psi_1(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \psi_{1_\varepsilon}(x) = \frac{x^{-\beta}}{\Gamma(2\beta)} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x (x-t)^{2\beta-1} \tau_2(t) dt$.

Воспользуемся известными формулами

$$\frac{d}{dz} (z^{\alpha} F(\alpha,\beta;\gamma;z)) = \alpha z^{\alpha-1} F(\alpha+1,\beta;\gamma;z), F(\alpha,\beta;\alpha;z) = (1-z)^{-\beta}.$$

Тогда можно записать $\psi_{1_\varepsilon}(x) = \frac{1}{\Gamma(2\beta)} (x-\varepsilon)^{2\beta-1} (\frac{\varepsilon}{x})^{2\beta-1} F(2\beta-1,\beta;2\beta;\frac{\varepsilon}{x})$ $\tau_2(x-\varepsilon) + \frac{2\beta-1}{\Gamma(2\beta)} x^{-\beta} \int\limits_0^{x-\varepsilon} (x-t)^{2\beta-2} \tau_2(t) dt]$.

Заметим теперь, что $\frac{2\beta-1}{\Gamma(2\beta)} x^{-\beta} \int\limits_0^{x-\varepsilon} (x-t)^{2\beta-2} \tau_2(t) dt] = \frac{x^{-\beta}}{\Gamma(2\beta)} \frac{d}{dx} \int\limits_0^{x-\varepsilon} (x-t)^{2\beta-1} \times$ $\tau_2(t) dt - \frac{x^{-\beta}}{\Gamma(2\beta)} (\varepsilon)^{2\beta-1} \tau_2(x-\varepsilon)$.

А поэтому $\psi_{1_\varepsilon}(x) = \frac{\varepsilon^{2\beta-1} x^{-\beta}}{\Gamma(2\beta)} [(\frac{x}{x-\varepsilon})^{1-\beta} F(2\beta-1,\beta;2\beta;\frac{\varepsilon}{x}) - 1] \tau_2(x-\varepsilon) + \frac{x^{-\beta}}{\Gamma(2\beta)} \times$ $\frac{d}{dx} \int\limits_0^{x-\varepsilon} (x-t)^{2\beta-1} \tau_2(t) dt]$.

Поскольку $F(2\beta-1,\beta;2\beta;\frac{\varepsilon}{x}) = 1 + 0(\frac{\varepsilon}{x})$, то переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\psi_1(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \psi_{1_\varepsilon}(x) = \frac{x^{-\beta}}{\Gamma(2\beta)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{2\beta-1} \tau_2(t) dt = x^{-\beta} (D_{0+}^{1-2\beta} \tau_2)(x). \quad (9)$$

Так как $(I_{0+}^{2\beta-1,1-2\beta,\beta-1}\nu_2)(x) = (D_{0+}^{1-2\beta}\nu_2)(x)$, то, учитывая (9), из (8) имеем

$$\nu_2(x) = (\frac{\Gamma(\beta)\gamma_1}{\Gamma(1-\beta)\gamma_2} - \frac{b(x)}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)a(x)})(D_{0+}^{1-2\beta}\tau_2)(x) - \frac{g(x)}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)a(x)}. \quad (10)$$

Для доказательства единственности решения исходной задачи рассмотрим соответствующую однородную задачу $(\varphi_i(x) \equiv 0, i = 1, 2, g(x) \equiv 0)$.

Пусть положительный максимум функции $U(x, y)$ достигается в точке $(x_0, 0) \in J$. Тогда из (5) следует, что $\nu_1(x_0) = 0$, а в соответствии с принципом экстремума для операторов дробного дифференцирования [6] и условий (4) получаем $\nu_2(x_0) > 0$. Это противоречит условию сопряжения (3). Если же в точке $(x_0, 0) \in J$ функция $U(x, y)$ достигает отрицательный минимум, то $\nu_1(x_0) = 0$, $\nu_2(x_0) < 0$, что также противоречит условию сопряжения (3). Полученные противоречия и доказывают единственность решения исследуемой задачи.

3. Существование решения задачи

Докажем существование решения задачи, если $a(x) = c_1 = \text{const}$, $b(x) = c_2 = \text{const}$.

Учитывая условия сопряжения (3), обозначая $\tau_1(x) = \tau_2(x) = \tau(x)$, $\nu_1(x) = \nu_2(x) = \nu(x)$, исключая $\tau(x)$ из системы (3), (10), получим

$$\nu(x) = \kappa_1 D_{0+}^{1-2\beta}(\int_0^x (x-t)\nu(t)dt + x\int_0^1 (t-1)\nu(t)dt) + g_1(x),$$

где

$$\kappa_1 = \frac{\Gamma(\beta)\gamma_1}{\Gamma(1-\beta)\gamma_2} - \frac{c_2}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)c_1}, \quad g_1(x) = -\frac{g(x)}{\gamma_2\Gamma(1-\beta)c_1}.$$

Последнее уравнение (относительно $\nu(x)$) перепишем в виде

$$\nu(x) = \frac{\kappa_1}{\Gamma(2\beta)}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^{2\beta-1}dt[\int_0^t (t-s)\nu(s)ds + t\int_0^1 (s-1)\nu(s)ds] + g_1(x). \quad (11)$$

На основании формулы перестановки Дирихле имеем

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^{2\beta-1}dt\int_0^t (t-s)\nu(s)ds = \frac{d}{dx}\int_0^x \nu(s)ds\int_s^x (x-t)^{2\beta-1}(t-s)ds$$
$$= \frac{d}{dx}[B(2,2\beta)\int_0^x (x-s)^{2\beta+1}\nu(s)ds] = \frac{1}{2\beta}\int_0^x (x-s)^{2\beta}\nu(s)ds. \quad (12)$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^{2\beta-1}dt(t\int_0^1 (s-1)\nu(s)ds) = \frac{d}{dx}\int_0^1 (s-1)\nu(s)ds\int_0^x (x-t)^{2\beta-1}tdt$$
$$= \frac{d}{dx}\int_0^1 (s-1)\nu(s)dsx^{2\beta+1}\int_0^1 (1-z)^{2\beta-1}zdz = \frac{1}{2\beta}x^{2\beta}\int_0^1 (s-1)\nu(s)ds. \quad (13)$$

С учетом (12) и (13) (11) примет вид

$$\nu(x) - \lambda \int\limits_0^x (x-s)^{2\beta} \nu(s) ds = \lambda x^{2\beta} \int\limits_0^1 (s-1)\nu(s) ds + g_1(x), \tag{14}$$

где $\lambda = \frac{\kappa_1}{2\beta\Gamma(2\beta)}$.

Уравнение вида (14) исследовано в [4, с. 101–104]. Будем использовать методику решения уравнения (14), предложенную авторами работы [4].

Пусть $\Gamma(x, s, \lambda)$ резольвента ядра $(x-s)^{2\beta}$ оператора Вольтерра в левой части уравнения (14). После обращения интегрального оператора Вольтерра, уравнение (14) примет вид

$$\nu(x) - \lambda \int\limits_0^1 K(x,s)\nu(s) ds = f(x), \tag{15}$$

где

$$f(x) = g_1(x) + \lambda \int\limits_0^x \Gamma(x, s, \lambda) g_1(s) ds, \tag{16}$$

$$K(x,s) = (s-1)[x^{2\beta} + \lambda \int\limits_0^x t^{2\beta} \Gamma(x, t, \lambda) dt]. \tag{17}$$

Так как $g(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J)$, то и $g_1(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J)$. Поскольку резольвента $\Gamma(x, s, \lambda)$ в квадрате $0 \le x, s \le 1$ ведет себя также, как ядро $(x-s)^{2\beta}$, то в силу (16) правая часть $f(x)$ уравнения (15) обладает тем же свойством, что и $g_1(x)$.

Из (17) следует, что

$$K(x,s) \in C(0 \le x, s \le 1) \cap C^2(0 < x, s < 1).$$

Таким образом, если существует решение $\nu(x)$ интегрального уравнения Фредгольма второго рода (15), то оно принадлежит классу $C(\bar{J}) \cap C^2(J)$.

В работе [4, с. 102–104] доказано, что однородное уравнение

$$\nu(x) - \lambda \int\limits_0^1 K(x,s)\nu(s) ds = 0,$$

соответствующее уравнению (15), не имеет решений отличных от тривиального. Следовательно, по альтернативе Фредгольма неоднородное уравнение (15) безусловно разрешимо, что и доказывает существование решения исследуемой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Saigo M.* A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions // Math. Rep. Kyushu Univ. 1978. V. 11, No 2. P. 135–143.
2. *Самко С. Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
3. *Килбас А. А., Репин О. А.* Задача со смещением для параболо-гиперболического уравнения // Диффер. уравн. 1998. Т. 34, № 6. С. 799–805.
4. *Бжихатлов Х. Г., Карасев И. М., Лесковский И. П., Нахушев А. М.* Избранные вопросы дифференциальных и интегральных уравнений. Нальчик, 1972.

5. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука, 1966.
6. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.

Репин Олег Александрович
Россия, Самара, Самарская государственная экономическая академия
matstat@mail.ru