УДК 517.95

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТИПА ФРАНКЛЯ

М. С. Салахитдинов, А. К. Уринов

В работе для общего уравнения Лаврентьева – Бицадзе с сингулярными коэффициентами при младших членах поставлена и исследована краевая задача типа задачи Франкля. Найдены собственные значения и собственные функции этой задачи.

Рассмотрим оператор

$$L(U) \equiv U_{xx} + \operatorname{sign} y U_{yy} +$$
$$[1-\operatorname{sign}(x+y)]x^{-1}pU_x + [1+\operatorname{sign}(x+y)]|y|^{-1}pU_y + \lambda \operatorname{sign}(x+y)U,$$

где λ — комплексный параметр, $p \in R$, причем $0 < p < 1/2$, в области Ω, ограниченной дугой $\sigma_0 : x^2 + y^2 = 1$, $(x > 0, y > 0)$ и отрезками

$$AA^* = \{(x,y) : x = 0, -1 \le y \le 1\},$$

$$A^*B = \{(x,y) : x - y = 1, -1 \le y \le 0\}.$$

Пусть далее

$$\Omega_0 = \Omega \cap (y > 0), \quad \Omega_1 = \Omega \cap (x + y > 0) \cap (y < 0),$$

$$\Omega_2 = \Omega \cap (x + y < 0) \cap (x > 0), \quad OB = \{(x,y) : y = 0,\ 0 < x < 1\},$$
$$OA = \{(x,y) : x = 0,\ 0 < y < 1\}, \quad OA^* = \{(x,y) : x = 0,\ -1 < y < 0\}.$$

Задача Φ_λ. Найти значения параметра λ и соответствующие им функции $U(x,y) \not\equiv 0$, удовлетворяющие условиям

$$U(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega_0 \cup \sigma_0) \cap C^2(\Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2),$$

$$x^{-1}U_x(x,y) \in C(\Omega_0 \cup OA), \quad x^{2p}U_x(x,y) \in C(\Omega_2 \cup OA^*),$$
$$|y|^{2p}U_y(x,y) \in C(\Omega_j \cup OA), \quad j = 0, 1,$$
$$L[U(x,y)] = 0, \quad (x,y) \in \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2, \tag{1}$$

$$\alpha U(x,y) + \beta \frac{\partial U(x,y)}{\partial n} = 0, \quad (x,y) \in \sigma_0, \tag{2}$$

$$\lim_{x\to 0} x^{-1}U_x(x,y) = 0, \quad 0 < y < 1, \tag{3}$$

$$\lim_{x\to 0} x^{2\beta}U_x(x,y) = 0, \quad -1 < y < 0, \tag{4}$$

$$U(0,y) = U(0,-y), \quad 0 \le y \le 1, \tag{5}$$

$$\lim_{y\to -0} (-y)^{2p}U_y(x,y) = \lim_{y\to +0} y^{2p}U_y(x,y), \quad 0 < x < 1, \tag{6}$$

где α, $\beta \in R$, причем $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$, n — внешняя нормаль к σ_0.

Ранее задачи на собственные значения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом изучены в [1–3].

Нетрудно убедиться [2, 4] в том, что решение уравнения (1) в областях Ω_1 и Ω_2 соответственно представимо в виде

$$U(x,y)=\gamma_1\int\limits_0^1 \tau_1\left[x+y(1-2t)\right]\left[t(1-t)\right]^{p-1}\bar I_{p-1}\left[2y\sqrt{\lambda t(1-t)}\right]dt$$
$$-\gamma_2(-y)^{1-2p}\int\limits_0^1 \nu_1\left[x+y(1-2t)\right]\left[t(1-t)\right]^{-p}\bar I_{-p}\left[2y\sqrt{\lambda t(1-t)}\right]dt, \quad (7)$$

$$U(x,y)=\gamma_1\int\limits_0^1 \tau_2^*\left[y+x(1-2t)\right]\left[t(1-t)\right]^{p-1}\bar I_{p-1}\left[2x\sqrt{\lambda t(1-t)}\right]dt$$
$$+\gamma_2 x^{1-2p}\int\limits_0^1 \nu_2^*\left[y+x(1-2t)\right]\left[t(1-t)\right]^{-p}\bar I_{-p}\left[2x\sqrt{\lambda t(1-t)}\right]dt, \quad (8)$$

где $\bar I_q(x)=(1+q)(x/2)^{-q}I_q(x)$, $I_q(x)$ — модифицированная функция Бесселя порядка q,

$$\gamma_1=\Gamma(2p)/\Gamma^2(p), \quad \gamma_2=\Gamma(2-2p)/\Gamma^2(1-p),$$
$$\tau_1(x)=U(x,0), \quad \nu_1(x)=\lim_{y\to 0}(-y)^{2p}U_y(x,0), \quad 0<x<1,$$
$$\tau_2^*(y)=U(0,y), \quad \nu_2^*(y)=\lim_{x\to 0}x^{2p}U_x(x,y), \quad -1<y<0.$$

Полагая в (7), (8) $y=-x$, $x\in[0,1/2]$ и принимая во внимание непрерывность решения $U(x,y)$ при переходе через линии $x+y=0$, после некоторых преобразований, имеем

$$\gamma_1 x^{1-2p}\int\limits_0^x [\tau_1(t)-\tau_2^*(-t)][t(x-t)]^{p-1}\bar I_{p-1}[\sqrt{\lambda t(x-t)}]dt$$
$$-\gamma_2\int\limits_0^x [\nu_1(t)+\nu_2^*(-t)][t(x-t)]^{-p}\bar I_{-p}\left[\sqrt{\lambda t(x-t)}\right]dt=0, \quad 0\le x\le 1.$$

Обращая последнее уравнение [5] относительно $\tau_1(x)-\tau_2^*(-x)$ и принимая во внимание условия (4), (5), находим

$$\tau_1(x)-\tau_2(x)=\gamma_3\int\limits_0^x \nu_1(t)(x-t)^{-2p}\bar J_{-p}\left[\sqrt{\lambda}(x-t)\right]dt, \quad \le x\le 1, \quad (9)$$

где $\tau_2(x)=U(0,x)$, $0\le x\le 1$, $\gamma_3=2^{2p-1}\Gamma[p]/[\Gamma(1-p)\Gamma(2p)]$, $\bar J_{-p}(x)=\Gamma(1-p)(x/2)^p J_{-p}(x)$, $J_{-p}(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка $(-p)$.

Отсюда, учитывая условие (6), заключаем, что задача Φ_λ в области Ω_0 эквивалентна следующей эллиптической задаче C_λ: найти те значения параметра λ,

при которых существуют нетривиальные регулярные в области Ω_0 решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям (2), (3), (9) и

$$U \in C(\bar{\Omega}_0) \cap C^1(\Omega_0 \cup \sigma_0), \quad x^{-1}U_x \in C(\Omega_0 \cup OA), \quad y^{2p}U_y \in C(\Omega_0 \cup OB).$$

Выполнив замену переменных $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ($0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le \pi/2$), решение задачи C_λ ищем в виде $U(x,y) = R(r)\Phi(\varphi)$. Тогда задача C_λ распадается на две:

$$r^2R''(r) + (1+2p)rR'(r) + (\lambda r^2 - \mu^2)R(r) = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{10}$$

$$|R(0)| < +\infty, \quad \alpha R(r) + \beta R'(r) = 0, \quad r = 1, \tag{11}$$

$$\Phi(\varphi) + 2p\operatorname{ctg}\varphi \cdot \Phi'(\varphi) + \mu^2\Phi(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \pi, \tag{12}$$

$$\lim_{\varphi\to\pi/2}[\cos\varphi]^{-1}\Phi'(\varphi) = 0, \tag{13}$$

$$[\Phi(0) - \Phi(\pi/2)]R(r) = \gamma_3\Gamma(1-p)\left(2\sqrt{\lambda}\right)^{\,p}$$
$$\times\left[\lim_{\varphi\to 0}\Phi'(\varphi)(\sin\varphi)^{2p}\right]\int\limits_0^r (r-t)^{-p}t^{2p-1}\,R(t)J_{-p}\left[\sqrt{\lambda}(r-t)\right]dt, \tag{14}$$

где m — константа разделения.

Ограниченным в $r = 0$ решением уравнения (10) при $\lambda \ne 0$ является функция $R(r) = r^{-p}J_\omega\left(\sqrt{\lambda}r\right)$, $\omega = \sqrt{p^2+\mu^2}$. Подставляя эту функцию в (14) и используя формулу [6]

$$\int\limits_0^r t^\ell(r-t)^{-\ell-1}J_\ell(t)J_q(r-t)dt = \frac{(2r)^\ell\Gamma(\ell+1/2)\Gamma(q-\ell)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\ell+q+1)}J_q(r),$$

$$\operatorname{Re} q > \operatorname{Re}\ell > -1/2,$$

находим

$$\Phi(0) - \Phi(\pi/2) = \lim_{\varphi\to 0}\left[\Phi'(\varphi)(\sin\varphi)^{2p}\right]$$
$$\times\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)\Gamma(\omega+p)/[\Gamma(p+1/2)\Gamma(1+\omega-p)]. \tag{15}$$

Пользуясь заменой $\psi = \sin^2\varphi$ и решениями гипергеометрического уравнения Гаусса, нетрудно убедиться в том, что общее решение уравнения (12) имеет вид

$$\Phi(\varphi) = c_0\,F\left(a,b,c;\sin^2\varphi\right) + c_0^1(\sin^2\varphi)^{1-c}F(1+a-c, 1+b-c, 2-c; \sin^2\varphi), \tag{16}$$

где c_0, c_0^1 — произвольные действительные числа, $2a = p+\omega$, $2b = p-\omega$, $2c = 1+2p$, $F(a,b,c;x)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Потребовав от функции (16) выполнения условий (13) и (15), находим, что нетривиальные решения задачи (12)–(14) существуют лишь при

$$\mu = \mu_n = \sqrt{\omega_n^2 - p^2},$$

где

$$\omega_n = p + 2n - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2^{2p}+\sin p\pi}{\cos p\pi}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и эти решения определяются формулами

$$\Phi_n(\varphi) = c_n[F(a_n, b_n, c; \sin^2\varphi) \\ + k_n(\sin^2\varphi)^{1-c}F(1 + a_n - c, 1 + b_n - c), 2 - c; \sin^2\varphi)], \quad (17)$$

где $2a_n = p + \omega_n$, $2b_n = p - \omega_n$, $2c = 1 + 2p$,

$$k_n = \Gamma(c)\Gamma(1 + \omega_n - p)[1 - F(a_n, b_n, c; 1)] \\ \times [2\Gamma(2 - c)\Gamma(\omega_n + p) + \Gamma(c)\Gamma(1 + \omega_n - p) \\ \times F(1 + a_n - c,\, 1 + b_n - c,\, 2 - c; 1)]^{-1}.$$

Подставляя в (10) $\mu = \mu_n$, $(n = 1, 2, \dots)$ и используя условия (11), имеем

$$(\alpha - p\beta)J_{\omega_n}\left(\sqrt{\lambda}\right) + \beta\sqrt{\lambda}J'_{\omega_n}\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (18)$$

В силу $\omega_n > 0$, $\quad n = 1, 2, \dots$, из теории бесселевых функций следует [7], что если $\beta = 0$ или $\beta \neq 0$, $(\alpha/\beta)+2-(2/\pi)\operatorname{arctg}[(2^{2p}+\sin p\pi)/\cos p\pi] \geq 0$, то каждое из уравнений (18) имеет только (счетное число) действительные корни. Обозначив через $\theta_m^{(\omega_k)}$ m-ый корень уравнения (18) при $n = k$, получим собственные значения $\lambda_{n,m} = \left[\theta_m^{(\omega_n)}\right]^2$, $n, m = 1, 2, \dots$, задачи C_λ (задачи Φ_λ).

Соответствующие этим собственным значениям собственные функции в области Ω_0 даются формулами

$$U_{n,m}(x, y) = c_{n,m}r^{-p}J_{\omega_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}}r)\{F(a_n, b_n, c; \sin^2\varphi) \\ + k_n(\sin\varphi)^{1-2p}F(1 + a_n - c, 1 + b_n - c, 2 - c; \sin^2\varphi)\}, \quad (19)$$

где $c_{n,m} \neq 0$ — произвольные действительные числа, $n, m = 1, 2, \dots$

Собственные функции задачи Φ_λ в области Ω_1 определяются как решения уравнений

$$U_{xx} - U_{yy} - \frac{2p}{y}U_y + \lambda_{n,m}U = 0, \quad n, m = 1, 2, \dots$$

с начальными данными

$$U(x, 0) = U_{n,m}(x, 0), \quad \lim_{y\to0}(-y)^{2p}U_y(x, y) = \lim_{y\to0} y^{2p}\frac{\partial}{\partial y}U_{n,m}(x, y), \quad 0 < x < 1,$$

а в области Ω_2 — как решения задач

$$U_{yy} - U_{xx} - \frac{2p}{x}U_x + \lambda_{n,m}U = 0, \quad n, m = 1, 2, \dots,$$

$$U(0, y) = U_{n,m}(0, -y), \quad \lim_{x\to0} x^{2p}\frac{\partial}{\partial x}U_{n,m}(x, y) = 0, \quad -1 < y < 0,$$

и определяются формулами (7), (8) соответственно, где $U_{n,m}(x, y)$ — функции, определяемые равенствами (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Салахитдинов М. С., Уринов А. К.* Задачи на собственные значения для одного класса уравнений смешанного типа // Тр. Междунар. научн. конф. “Современные проблемы математической физики и информационной технологии”. Т. I. Ташкент: Университет, 2005. С. 305–308.

2. *Уринов А. К.* Задачи на собственные значения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом // Узб. мат. журн. 2005. № 1.

3. *Сабитов К. Б., Ильясов Р. Р.* Спектральные задачи для оператора смешанного типа с сингулярным коэффициентом // Тр. Междунар. конф. "Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики". Т. I. Ташкент, 2004. С. 266–269.

4. *Капилевич М. Б.* Об одном уравнении смешанного эллиптико-гиперболического типа // Мат. сб. 1952. Т. 30(72), № 1. С. 11–38.

5. *Салахитдинов М. С., Уринов А. К.* Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным уравнениям. Ташкент: Фан, 1997.

6. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962.

7. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Дифференциальные уравнения математической физики. М., 1962.

Салахитдинов Махмуд Салахитдинович
Узбекистан, Ташкент, Институт Математики АН РУз
mathinst@uzsci.net

Уринов Ахмаджон Кушакович
Узбекистан, Ташкент, Институт Математики АН РУз
mathinst@uzsci.net