УДК 517.95

ОЦЕНКА СПЕКТРАЛЬНОГО РАДИУСА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. П. Солдатов

В работе рассматриваются операторы вида $A\varphi = a_1\varphi\circ\alpha_1 + a_2\varphi\circ\alpha_2$ на гладкой дуге плоскости, где α_j осуществляют диффеоморфизмы (сдвиги) дуги на себя с единственными неподвижными точками на концах. Получена оценка спектрального радиуса этого оператора через значения коэффициентов a_j и производных сдвигов α_j на концах дуги.

При исследовании краевых задач для гиперболических уравнений и систем на плоскости с двупараметрическим семейством характеристик возникают [1] функциональные уравнения вида

$$\varphi + a\varphi\circ\alpha = f,$$

где заданные функции a, f и искомая функция φ рассматриваются на гладкой дуге, а α осуществляет гомеоморфизм этой дуги на себя с единственными неподвижными точками на ее концах. Вопрос об обратимости этих операторов тесно связан с оценкой их спектрального радиуса, которую можно получить достаточно элементарно [2]. В случае, когда число независимых характеристик рассматриваемой гиперболической системы больше двух, аналогичным образом возникают [3] функциональные уравнения более общего вида

$$\varphi + \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi\circ\alpha_i = f.$$

Данная заметка посвящена оценке спектрального радиуса соответствующих операторов $A\varphi = \sum a_i\varphi\circ\alpha_i$.

Удобно сначала рассмотреть случай, когда роль дуги играет действительная прямая $\mathbb{R}$. Условимся под *сдвигом* понимать гомеоморфизм α прямой $\mathbb{R}$ на себя с дополнительным требованием $\alpha(\pm\infty) = \pm\infty$. Очевидно, сдвиги образуют группу относительно операции суперпозиции, целые итерации элемента α в этой группе обозначим $\alpha_{(m)},\ m = 0, \pm1, \dots$ В явном виде $\alpha_{(0)}(t) = t,\ \alpha_{(m)} = \alpha\circ\alpha\circ\dots\circ\alpha$ (m раз) при $m > 0$ и $\alpha_{(m)} = \alpha^{-1}_{(-m)}$ при $m < 0$. Запись $\alpha \le \beta$ означает, что $\alpha(t) \le \beta(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Очевидно, как функция сдвиг α строго монотонно возрастает на прямой, поэтому отношение порядка согласовано с операцией суперпозиции в том смысле, что $\alpha_j \le \beta_j, j = 1, 2$ влечет $\alpha_1\circ\alpha_2 \le \beta_1\circ\beta_2$. Заметим, что вместе с парой сдвигов α, β сдвигами будут также функции $\min(\alpha, \beta)$ и $\max(\alpha, \beta)$.

В дальнейшем будут рассматриваться лишь сдвиги без неподвижных точек, они распадаются на два класса *левых сдвигов*, для которых $\alpha(t) < t$ для всех t, и *правых сдвигов* с противоположным свойством. Очевидно, каждый из этих классов является полугруппой, операция обращения сдвигов переводит эти классы

Работа выполнена при поддержке программой “Университеты России” (проект № УР 04.01.486)

друг в друга. Если α является левым сдвигом, то $\alpha_{(m)} \to \mp\infty$ при $m \to \pm\infty$, в случае правого сдвига знаки здесь меняются местами.

Лемма 1. (a) *Пусть сдвиг α не имеет неподвижных точек и задан отрезок $I \subseteq \mathbb{R}$. Тогда для $M > 0$ найдется такое натуральное N, что для любого $t \in \mathbb{R}$ отрезку $[-M, M]$ принадлежит не более N точек последовательности $\alpha_{(n)}(t), n = 0, 1, \ldots$*

(b) *Пусть сдвиг α удовлетворяет условию*

$$\delta = \inf_t |\alpha(t) - t| > 0. \tag{1}$$

Тогда утверждение (a) справедливо по отношению к отрезкам $[m, m+1]$ с целыми m, т. е. найдется такое натуральное N, что для любого m пересечение $[-M, M] \cap \alpha_{(n)}[m, m+1]$ не пусто лишь для не более чем N номеров n.

Доказательство. Пусть для определенности сдвиг α левый. Выберем натуральное k по условиям $\alpha_{(k)}(0) \le -M, \alpha_{(-k)}(0) \ge M$. Пусть целое s таково, что $\alpha_{(s+1)}(0) \le t \le \alpha_{(s)}(0)$. Тогда $\alpha_{(n)}(t) \le \alpha_{(n+s)}(0) \le -M$ при $n \ge -s + k$ и $\alpha_{(n)}(t) \ge \alpha_{(n+s+1)}(0) \ge M$ при $n \le -s - 1 - k$. Поэтому остается положить $N = 2k + 1$.

Пусть далее выполнено условие (1), тогда $\alpha_{(s+r)}(0) - \alpha_{(s)}(0) \le -r\delta$ для любых целого s и натурального r. Следовательно, при $r\delta \ge 1$ найдется такое s, что $\alpha_{(s)}(0) \le m, m + 1 \le \alpha_{(s+r)}(0)$. Поэтому, как и выше, $\alpha_{(n)}(m+1) \le \alpha_{(n+s+r)}(0) \le -M$ при $n \ge -s - r + k$ и $\alpha_{(n)}(m) \ge \alpha_{(n+s)}(0) \ge M$ при $n \le -s - k$, так что можно положить $N = 2k + 1$.

Обозначим через C пространство всех непрерывных на прямой $\mathbb{R}$ и равномерно ограниченных комплексных l-вектор-функций φ. Оно снабжается sup-нормой $|\varphi|_0$ по отношению к некоторой фиксированной норме в $\mathbb{C}^l$. Символ $\hat{C}$ закрепим за пространством непрерывных $l \times l$-матриц-функций $a(t)$, допускающих конечные пределы $a(\pm\infty) = \lim a(t)$ при $t \to \pm\infty$. Аналогичная sup-норма в нем определяется по отношению к некоторой норме в $\mathbb{C}^{l \times l}$, которую удобно подчинить требованиям $|xy| \le |x||y|$, $|x\xi| \le |x||\xi|$, где $x, y \in \mathbb{C}^{l\times l}$, $\xi \in \mathbb{C}^l$. Относительно так определенных норм эти пространства, очевидно, банаховы. Функция $a \in \hat{C}$ и сдвиг α определяют в пространстве C соответственно операторы умножения $a : \varphi \to a\varphi$ и сдвига $T(\alpha) : \varphi \to \varphi \circ \alpha$. Очевидно, эти операторы ограничены, причем их операторные нормы допускают оценки $|a|_{\mathcal{L}} \le |a|_0$ и $|T(\alpha)|_{\mathcal{L}} \le 1$.

Рассмотрим функциональный оператор

$$A = a_1 T(\alpha_1) + a_2 T(\alpha_2), \tag{2}$$

определяемый коэффициентами $a_j \in \hat{C}$ и сдвигами α_j.

Напомним определение спектрального радиуса оператора. Пусть оператор A ограничен в некотором банаховом пространстве X. Положительное число M назовем его *спектральной границей*, если существует такое $C > 0$, что $|A^n|_{\mathcal{L}(X)} \le CM^n$ для любого $n = 0, 1 \ldots$. Примером подобной границы служит, очевидно, норма $M = |A|_{\mathcal{L}}$. Нижняя грань всех спектральных границ называется *спектральным радиусом* A и обозначается $\operatorname{spr} A$. Известно, что эта величина в точности совпадает с $\{\max |z| \mid z \in \sigma(A)\}$, где $\sigma(A)$ есть спектр оператора A.

Теорема 1. *Пусть сдвиги α_1, α_2 в (2) одновременно либо левые, либо правые. Тогда для спектрального радиуса оператора A в пространстве C справедлива оценка*

$$\operatorname{spr} A \le R_1 + R_2, \quad R_j = \max[|a_j(\pm\infty)|]. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть для определенности оба сдвига α_j являются левыми, так что к этому типу принадлежат и сдвиги

$$\alpha^+ = \max(\alpha_1, \alpha_2), \quad \alpha^- = \min(\alpha_1, \alpha_2). \tag{4}$$

Обозначим P_n множество мультииндексов $p = (p_1, \dots, p_n)$, где каждое p_j равно 0 или 1. Заметим, что число этих векторов длины $|p| = p_1 + \ldots + p_n = k$ совпадает с числом сочетаний из n по k. Зафиксируем $p \in P_n$ и положим

$$b_j = \begin{cases} a_1, & p_j = 0, \\ a_2, & p_j = 1, \end{cases} \qquad \beta_j = \begin{cases} \alpha_1, & p_j = 0, \\ \alpha_2, & p_j = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Произведение $A^{(p)}$ функциональных одночленов $b_1 T(\beta_1), \dots, b_n T(\beta_n)$ принадлежит к тому же типу

$$A^{(p)} = b_1 T(\beta_1) \cdots b_n T(\beta_n)$$

$$= b_1 (b_2 \circ \beta_1)(b_3 \circ \beta_2 \circ \beta_1) \cdots (b_n \circ \beta_{n-1} \circ \cdots \circ \beta_1) T(\beta_n \circ \cdots \circ \beta_1). \tag{6}$$

В силу (4), (5) для фигурирующих здесь сдвигов справедливо соотношение

$$\alpha^-_{(k)} \le \beta_k \circ \cdots \circ \beta_1 \le \alpha^+_{(k)}. \tag{7}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $M > 0$ по условиям

$$|a_j(t)| \le |a_j(\pm\infty)| + \varepsilon, \quad \pm t \ge M. \tag{8}$$

Определяя N как в лемме 1(a) по отношению к обоим сдвигам $\alpha^\pm$, на основании этой леммы приходим к следующему заключению. Для любого t найдется такое натуральное $m \ge N$, что

$$\alpha^\pm_{(k)}(t) \le -M,\ k \ge m; \quad \alpha^\pm_{(k)}(t) \ge M,\ k \le m - N. \tag{9}$$

С учетом (7) аналогичные соотношения справедливы и для суперпозиции k сдвигов β_j, т. е.

$$(\beta_k \circ \cdots \circ \beta_1)(t) \le -M,\ \ k \ge m; \quad (\beta_k \circ \cdots \circ \beta_1) \ge M,\ \ k \le m - N.$$

Полагая $C_0 = \max(|a_1|_0, |a_2|_0)$, отсюда совместно с (8) приходим к следующей оценке нормы оператора (6):

$$|A^{(p)}|_{\mathcal{L}(C)} \le \prod_{m \le k \le n} (|b_k(-\infty)| + \varepsilon) C_0^N \prod_{0 \le k \le m-N} (|b_k(+\infty)| + \varepsilon)$$
$$\le C_1 \prod_{1 \le k \le n} (\max[|b_k(-\infty)|, |b_k(+\infty)|] + \varepsilon).$$

Здесь C_1 означает соответствующую постоянную, зависящую только от C_0, N и ε. Если $|p| = s$, то согласно (5) в этом произведении $b_k = a_2$ для s номеров k и $b_k = a_1$ для остальных $n - s$ номеров k, так что

$$|A^{(p)}|_{\mathcal{L}} \le C_1 (R_1 + \varepsilon)^{n-s} (R_2 + \varepsilon)^s, \quad R_j = \max[|a_j(+\infty)|, |a_j(-\infty)|].$$

Следовательно,

$$|A^n|_{\mathcal{L}} \le \sum_{s=0}^{n} \sum_{|p|=s} |A^{(p)}|_{\mathcal{L}}$$
$$\le C_1 \sum_{s=0}^{n} \frac{n!}{s!(n-s)!} (R_1 + \varepsilon)^{n-s} (R_2 + \varepsilon)^s = C_1 (R_1 + R_2 + 2\varepsilon)^n,$$

так что число $R_1 + R_2 + 2\varepsilon$ является спектральной границей оператора A. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, отсюда следует оценка (3).

Для $E \subseteq \mathbb{R}$ обозначим $C^\mu(E)$, $0 < \mu < 1$, банахово пространство Гельдера заданных на E функций с конечной нормой

$$|\varphi|_{\mu,E} = |\varphi|_{0,E} + [\varphi]_{\mu,E}, \quad [\varphi]_{\mu,E} = \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu}.$$

Это пространство используется как для скалярных, так и для вектор- или матриц-функций (по отношению к соответствующим нормам в $\mathbb{C}^l$ и $\mathbb{C}^{l\times l}$). Рассмотрим вопрос об оценке спектрального радиуса оператора (2) в пространстве $C^\mu = C^\mu(\mathbb{R})$. Если матрица-функция $a \in C^\mu$, то, очевидно, норма a как оператора умножения в пространстве C^μ допускает оценку $|a|_{\mathcal{L}} \leq |a|_\mu$. Аналогично, если сдвиг α непрерывно дифференцируем и его производная α' ограничена, т. е. принадлежит C, то оператор $T(\alpha)$ ограничен в C^μ и его норма $|T(\alpha)|_{\mathcal{L}} \leq (1 + |\alpha'|_0^\mu)$. Последний результат можно несколько усилить.

Лемма 2. (a) *Пусть сдвиг α непрерывно дифференцируем и удовлетворяет условию* (1), *причем его производная положительна и*

$$\alpha'(t) = 1 + O(t^{-2}) \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{10}$$

Тогда производные $\alpha'_{(n)}$ ограничены равномерно по n и, в частности, операторы $[T(\alpha)]^n = T(\alpha_{(n)})$ как элементы $\mathcal{L}(C^\mu)$ равномерно ограничены.

(b) *Пусть сдвиги α_1, α_2 являются одновременно либо левыми, либо правыми и удовлетворяют условиям* (a). *Пусть $p \in P_n$ и $\beta = \beta_n \circ \dots \circ \beta_1$, где β_j определяются аналогично* (5). *Тогда производная β' ограничена равномерно по $p \in P_n$ и n, так что равномерно ограничены и операторы $T(\beta) \in \mathcal{L}(C^\mu)$.*

Доказательство. (a) Пусть для определенности сдвиг α является левым, так что согласно (1) для любого натурального n справедливы оценки

$$\alpha_{(n)}(t) \leq t - n\delta, \quad \alpha_{(-n)}(t) \geq t + n\delta. \tag{11}$$

В силу (10) существует такая постоянная $C > 0$, что

$$|(\ln \alpha')(t)| \leq C(1 + t^2)^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Следовательно,

$$|(\ln \alpha'_{(n)})(t)| = \Big|\sum_{k=0}^{n-1} \ln \alpha'[\alpha_{(k)}(t)]\Big| \leq C \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + [\alpha_{(k)}(t)]^2}. \tag{13}$$

Пусть целое $m < n$ таково, что $\alpha_{(m)}(t) \leq 0 < \alpha_{(m-1)}(t)$. Тогда

$$\sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{1 + [\alpha_{(k)}(t)]^2} \leq \sum_{s=0}^{n-m-1} \frac{1}{1 + [\alpha_{(s)}(t^-)]^2}, \quad t^- = \alpha_{(m)}(t),$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{1 + [\alpha_{(k)}(t)]^2} \leq \sum_{s=0}^{m-1} \frac{1}{1 + [\alpha_{(-s)}(t^+)]^2}, \quad t^+ = \alpha_{(m-1)}(t).$$

Согласно (11), (12)

$$\frac{1}{1 + [\alpha_{(\pm s)}(t^\pm)]^2} \leq \frac{1}{1 + (\delta s)^2},$$

так что сумма в правой части (13) равномерно ограничена.

(b) Зададимся произвольной последовательностью $p_1, p_2, \ldots$ нулей и единиц и пусть β_j определяются по ней аналогично (5). Для натурального n положим $\beta_{[n]} = \beta_n \circ \cdots \circ \beta_1$ и пусть $\beta_{[-n]} = \beta_{[n]}^{-1}$ и $\beta_{[0]}(t) = t$.

Пусть, как и выше, оба сдвига α_1, α_2 являются левыми и удовлетворяют условиям (1), (12). Тогда к этому типу принадлежат и все сдвиги $\beta_{[n]}$, а сдвиги $\beta_{[-n]}$ будут правыми. Для них справедливы аналогичные (11) оценки. Поэтому остается в предыдущих рассуждениях символ $\alpha_{(k)}$ заменить на $\beta_{[k]}$.

Теорема 2. *Пусть сдвиги α_1, α_2 в* (2) *одновременно либо левые, либо правые и удовлетворяют условиям* (1), (10) *леммы 2, а коэффициенты a_j принадлежат C^μ, причем существуют такие постоянные матрицы $a_j(\pm\infty)$, что*

$$\lim_{M\to\infty} |a_j(t) - a_j(\pm\infty)|_{\mu, I^\pm(M)} = 0, \quad I^+(M) = [M, \infty),\ I^-(M) = (-\infty, -M]. \tag{14}$$

Тогда для спектрального радиуса оператора A в пространстве C^μ справедлива оценка (3).

Доказательство осуществляется аналогично теореме 1 с использованием лемм 1(b) и 2. Пусть для определенности оба сдвига α_j левые. Выберем сдвиги $\alpha^\pm$ того же типа, которые удовлетворяют условиям (1), (10) и соотношению $\alpha^- \le \alpha_j \le \alpha^+$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и в соответствии с (14) выберем $M > 0$ по условию

$$|a_j(t) - a_j(\pm\infty)|_{\mu, I^\pm(M)} \le \varepsilon. \tag{15}$$

Определяя N как в лемме 1(b) по отношению к обоим сдвигам $\alpha^\pm$, на основании этой леммы приходим к следующему заключению. Для любого целого $i = 0, \pm1, \ldots$ найдется такое натуральное $m \ge N$, что

$$\alpha^\pm_{(k)}[i, i+1] \le -M,\ k \ge m; \quad \alpha^\pm_{(k)}[i, i+1] \ge M,\ k \le m - N. \tag{16}$$

С учетом (7) аналогичные соотношения справедливы и для суперпозиции k сдвигов β_j, т. е.

$$(\beta_k \circ \cdots \circ \beta_1)(t) \le -M,\ k \ge m; \quad (\beta_k \circ \cdots \circ \beta_1) \ge M,\ k \le m - N.$$

В силу леммы 2 найдется такая постоянная $K > 0$, не зависящая от k и m, что

$$|\varphi \circ \beta_k \circ \cdots \circ \beta_1|_\mu \le K|\varphi|_\mu.$$

Полагая $C_0 = \max(|a_1|_\mu, |a_2|_\mu)$, отсюда совместно с (15), (16) приходим к следующей оценке C^μ–норм

$$|A^{(p)}\varphi|_{\mu,[i,i+1]} \le K \prod_{m\le k\le n} (|b_k(-\infty)| + K\varepsilon)(KC_0)^N \prod_{0\le k\le m-N} (|b_k(+\infty)| + K\varepsilon)|\varphi|_{\mu,\mathbb{R}}$$
$$\le C_1 \prod_{1\le k\le n} (\max[|b_k(-\infty)|, |b_k(+\infty)|] + K\varepsilon)|\varphi|_{\mu,\mathbb{R}},$$

где постоянная $C_1 > 0$ зависит только от C_0, N и ε. Поскольку

$$|\psi|_{\mu,\mathbb{R}} \le 2 \sup_i |\psi|_{\mu,[i,i+1]},$$

как и при доказательстве теоремы 1 в результате приходим к оценке

$$|A^n|_{\mathcal{L}(C^\mu)} \le C_1(R_1 + R_2 + 2K\varepsilon)^n, \quad R_j = \max[|a_j(\pm\infty)|],$$

согласно которой число $R_1 + R_2 + 2\varepsilon$ является спектральной границей оператора A. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, отсюда следует оценка (3).

Для приложений основной интерес представляют собой функциональные операторы сдвига на гладкой дуге $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$. Под *сдвигами* здесь понимаются гомеоморфизмы дуги, оставляющие ее концы τ_0, τ_1 неподвижными. Считая дугу ориентируемой от τ_0 к τ_1, понятие *левого* и *правого сдвигов* вводится аналогично предыдущему. Производная функций на Γ понимается по отношению к естественному параметру длины дуги. Дуга Γ удовлетворяет *условию Ляпунова* в своих концах, если производная $z'(s)$ естественной параметризации $z = z(s)$ удовлетворяет условию Гельдера в точках $s = s_0, s_1$, отвечающих концам $\tau = \tau_0, \tau_1$.

Обозначим C_0 банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\Gamma \setminus \{\tau_0, \tau_1\})$ функций с sup-нормой, символ C закрепляется за пространством $C = C(\Gamma)$. Рассмотрим далее банахово пространство $C_0^\mu = C_0^\mu(\Gamma; \tau_0, \tau_1)$ и его подпространство $C_{(\varepsilon)}^\mu = C_{(\varepsilon)}^\mu(\Gamma; \tau_0, \tau_1)$, $\varepsilon > 0$. Класс, полученный обьединением последних пространств по $\varepsilon > 0$, обозначим $C_{(+0)}^\mu$. Рассмотрим в пространствах C_0 и C_0^μ функциональный оператор (2) со сдвигами α_j дуги Γ и матричными коэффициентами $a_j \in C$.

Теорема 3. *Пусть сдвиги α_1, α_2 в* (2) *одновременно либо левые, либо правые. Тогда для спектрального радиуса оператора A в пространстве C_0 справедлива оценка*

$$\operatorname{spr} A \le R_1 + R_2, \quad R_j = \max[|a_j(\tau_0)|, a_j(\tau_1)|]. \tag{17}$$

Если дополнительно коэффициенты $a_j \in C_{(+0)}^\mu$, дуга Γ удовлетворяет условию Ляпунова в своих концах, функции α_j непрерывно дифференцируемы и их производные всюду отличны от нуля, а в концевых точках эти производные по модулю отличны от единицы и удовлетворяют условию Гельдера, то оператор A ограничен в пространстве C_0^μ и его спектральный радиус допускает оценку (17).

Доказательство. Рассмотрим гладкую параметризацию $\gamma : [0,1] \to \Gamma$ дуги, предполагая параметр $t = \gamma^{-1}(z)$ естественным в окрестности точек $\tau_k = \gamma(k)$,$k = 0, 1$. Тогда по условию функция γ' удовлетворяет условию Гельдера в окрестности точек $t = 0, 1$ и, следовательно, сдвиги $\tilde{\alpha}_j = \gamma^{-1} \circ \alpha \circ \gamma$ отрезка $[0,1]$ обладают теми же свойствами, что и α_j. Очевидно, оператор подстановки $\varphi \to \varphi \circ \gamma$ осуществляет изоморфизм пространства $C_0(\Gamma; \tau_0, \tau_1)$ на пространство $C_0([0,1]; 0, 1)$. Аналогичный факт [2] справедлив и по отношению к пространствам C_0^μ. Таким образом, без ограничения общности можно считать $\Gamma = [0,1]$.

Рассмотрим далее оператор подстановки

$$\tilde{\varphi} \to \tilde{\varphi} \circ \omega, \quad \omega(t) = \ln \frac{t}{1-t}\, 0 < t < 1, \tag{18}$$

который, очевидно, осуществляет изоморфизм пространства $C(\mathbb{R})$ непрерывных и ограниченных функций на $C_0([0,1]; 0, 1)$. Этот изоморфизм переводит функциональный оператор (2) на $[0,1]$ в аналогичный оператор $\tilde{A}$ на прямой $\mathbb{R}$, определяемый коэффициентами $\tilde{a}_j = a_j \circ \omega^{-1}$ и сдвигами $\tilde{\alpha}_j = \omega \circ \alpha_j \circ \omega^{-1}$. Поэтому первое утверждение теоремы является следствием теоремы 1.

Известно [2], что оператор (18) осуществляет изоморфизм и пространства $C^\mu(\mathbb{R})$ на $C_0^\mu([0,1]; 0, 1)$. Поэтому с учетом теоремы 2 для завершения доказательства остается убедиться, что сдвиги $\tilde{\alpha}_j$ удовлетворяют условиям (1), (10). Этот факт составляет содержание следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть производная функции $\alpha \in C^1[0,1]$ всюду положительна на отрезке $[0,1]$ и удовлетворяет условию Гельдера на его концах, причем $\alpha(k) =$*

k, $\alpha'(k) \neq 1$ для $k = 0, 1$ и $\alpha(t) \neq t$ при $0 < t < 1$. Тогда в обозначениях (18) *сдвиг $\tilde{\alpha} = \omega \circ \alpha \circ \omega^{-1}$ удовлетворяет условиям* (1), (10).

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать $\alpha(t) < t$ при $0 < t < 1$. По определению

$$\tilde{\alpha}\Big[\ln \frac{t}{1-t}\Big] = \ln \Big[\frac{\alpha(t)}{1-\alpha(t)}\Big],$$

и, следовательно,

$$\tilde{\alpha}'\Big[\ln \frac{t}{1-t}\Big] = \frac{\alpha'(t)t(1-t)}{\alpha(t)[1-\alpha(t)]},$$

$$\tilde{\alpha}\Big[\ln \frac{t}{1-t}\Big] - \ln \frac{t}{1-t} = \ln \frac{(1-t)\alpha(t)}{[1-\alpha(t)]t}.$$

Из последнего соотношения, в частности, следует справедливость условия (1) для $\tilde{\alpha}$. Очевидно, вместе с α' функция в правой части первого равенства удовлетворяет условию Гельдера с некоторым показателем $\varepsilon > 0$ в точках $t = 0, 1$, так что

$$\tilde{\alpha}'\Big[\ln \frac{t}{1-t}\Big] = 1 + O(1)[t(1-t)]^{\varepsilon}$$

при $t \to 0$ и при $t \to 1$. Поэтому

$$\Big\{\tilde{\alpha}'\Big[\ln \frac{t}{1-t}\Big] - 1\Big\}\Big|\ln \frac{t}{1-t}\Big|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad \ln \frac{t}{1-t} \to \infty,$$

и, значит, $\tilde{\alpha}$ удовлетворяет и условию (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова Думка, 1965.

2. *Солдатов А. П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М.: Высшая школа, 1991.

3. *Жура Н. А., Солдатов А. П.* Нелокальные краевые задачи на плоскости для гиперболических систем первого порядка // Спектральная теория дифф. операторов и родственные проблемы: Тр. междунар. научн. конф. Стерлитамак, 24–28 июня 2003 г. Т. 1. Уфа: Изд-во Гилем, 2003. С. 124–130.

Солдатов Александр Павлович
Россия, Нальчик,
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН
soldatov@bsu.edu.ru