УДК 517.9

# УРАВНЕНИЯ ОСКОЛКОВА НА МНОГООБРАЗИИ БЕЗ КРАЯ

**Г. А. Свиридюк, Д. Е. Шафранов**

Описана морфология фазового пространства для уравнений Осколкова на гладком компактном римановом многообразии без края.

Система уравнений

$$(\lambda - \nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v - \nabla p + f, \qquad \nabla\cdot v = 0 \tag{1}$$

моделирует динамику вязкоупругой несжимаемой жидкости Кельвина – Фойгта [1]. Здесь $v = col(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $v_k = v_k(x,t)$ и $f = col(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $f_k = f_k(x)$-вектор-функции, отвечающие скорости и внешним силам; $p = p(x,t)$-функция, соответствующая давлению; параметры $\lambda, \nu \in \mathbb{R}_+$ характеризуют упругие и вязкие свойства жидкости, причем экспериментально замечено, что отрицательные значения параметра $\lambda$ не противоречат физическому смыслу [2].

Система Осколкова относится к уравнениям соболевского типа, составляющим ныне обширную область во множестве неклассических уравнений математической физики [3]. Разрешимость начально-краевых задач для уравнений (1) изучалась ранее при различных постановках [4–7]. Мы рассмотрим разрешимость задачи Коши для уравнений (1), заданных на ориентированном компактном римановом многообразии $\Omega_n$ без края.

Данная статья организована следующим образом. В п. 1 содержатся уже известные результаты, почерпнутые из [8], гл. 4 и адаптированные к нашей ситуации. Результаты п. 2 тоже хорошо известны , хотя и разбросаны по нескольким статьям [9–12]. В п. 3 приведен основной результат статьи — доказательство простоты фазового пространства уравнений (1).

## 1. Относительно $p$-ограниченные операторы

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т. е. линейны и непрерывны). Введем в рассмотрение $L$-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ и $L$-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора $M$. Назовем оператор $M$ $(L,\sigma)$-*ограниченным*, если

$$\exists\, a \in \mathbb{R}_+ \ \forall \mu \in \mathbb{C}\ (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Если оператор $M$ $(L,\sigma)$-ограничен, то при подходящем выборе контура $\gamma$ (скажем $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$) можно построить проекторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R^L_\mu(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}),\ Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma L^L_\mu(M)d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}),$$

где $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$-*правая*, а $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$-*левая* $L$-*резольвенты оператора* $M$. Положим $\mathfrak{U}^0(\mathfrak{F}^0) = \ker P(\ker Q)$, $\mathfrak{U}^1(\mathfrak{F}^1) = \operatorname{im} P(\operatorname{im} Q)$ и через $L_k$ $(M_k)$ обозначим сужение оператора $L$ $(M)$ на $\mathfrak{U}^k$ , $k = 0, 1$.

**Теорема 1** (теорема о расщеплении). *Пусть оператор $M$ $(L,\sigma)$-ограничен, тогда*

(i) *операторы* $L_k, M_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k), k = 0,1;$

(ii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0), L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$.

Положим $G = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ , $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$, тогда *$L$-резольвенту* $(\mu L - M)^{-1}$ оператора $M$ можно разложить в ряд Лорана

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k G^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) + \sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k}S^{k-1}L_1^{-1}Q.$$

Определение. Точка $\infty$ для $L$-резольвенты оператора $M$ называется

(i) *устранимой особой точкой* , если оператор $G \equiv \mathbb{O}$;

(ii) *полюсом порядка* $p \in \mathbb{N}$, если оператор $G^p \neq \mathbb{O}$, но $G^{p+1} \equiv \mathbb{O}$;

(iii) *существенно особой точкой*, если оператор $G^q \neq \mathbb{O}$, $q \in \mathbb{N}$.

Пусть $\ker L \neq \{0\}$. Условимся векторы $\varphi \in \ker L\setminus\{0\}$ называть *собственными.* Упорядоченное множество $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ называется *цепочкой $M$-присоединенных* векторов собственного вектора $\varphi_0$, если $L\varphi_{q+1} = M\varphi_q$, $q \in \{0\}\cup\mathbb{N}$; $\varphi_q \notin \ker L \setminus \{0\}$, $q \in \mathbb{N}$. Цепочка $M$-присоединенных векторов может быть бесконечной. В частности, она может быть заполнена нулями, если $\ker L \cap \ker M \neq \{0\}$. Однако она обязательно конечна, если существует число $p \in \mathbb{N}$ такое, что $M\varphi_p \notin \mathrm{im}\ L \setminus \{0\}$. Порядковый номер $M$-присоединенного вектора называется его *высотой.*

**Теорема 2.** *Пусть оператор $M$ $(L,\sigma)$-ограничен, причем*

(i) $\infty$ — *устранимая особая точка. Тогда* $\mathfrak{U}^0 = \ker L$ *и ни один собственный вектор оператора $L$ не имеет $M$-присоединенных векторов.*

(ii) $\infty$ — *полюс порядка $p$. Тогда множество* $\mathfrak{U}^0 \setminus \{0\}$ *содержит только собственные и $M$-присоединенные векторы высоты не больше $p$.*

Условимся в дальнейшем, во-первых, устранимую особую точку $L$-резольвенты оператора $M$ считать *полюсом порядка нуль*, а во-вторых, оператор $M$ называть $(L,p)$*-ограниченным*, если он $(L,\sigma)$-ограничен, причем $\infty$ — полюс порядка $p \in \{0\}\cup\mathbb{N}$. Приведем достаточные условия $(L,p)$-ограниченности оператора $M$, которые в некотором смысле обращают теорему 3, в случае, когда оператор $L$ *бирасщепляющий*, т. е. его ядро и образ дополняемы в пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Запишем первое условие.

**(A1)** Любая цепочка $M$-присоединенных векторов имеет длину, равную $p \in \{0\}\cup\mathbb{N}$.

Обозначим через $\mathrm{coim}\ L = \mathfrak{U} \ominus \ker L$ - некоторое алгебраическое и топологическое дополнение к ядру $\ker L$. Пусть $\tilde{L}$-сужение оператора $L$ на $\mathrm{coim}\ L$. В силу теоремы Банаха существует оператор $\tilde{L}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathrm{im}\ L;\mathrm{coim}\ L)$. В силу условия (A1) существуют линеалы $\mathfrak{U}^{0q} = \tilde{L}^{-1}M[\mathfrak{U}^{0q-1}]$, $\mathfrak{U}^{00} = \ker L, q = 1,2,\ldots,p$.

**(A2)** $M[\mathfrak{U}^{0p}] \oplus \mathrm{im}\ L = \mathfrak{F}$.

**Теорема 3.** *Пусть оператор $L$-бирасщепляющий и выполнены условия* (A1) *и* (A2). *Тогда оператор $M$ $(L,p)$-ограничен.*

## 2. Квазистационарные траектории

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$-банаховы пространства, $L, M \in (\mathfrak{U},\mathfrak{F})$, $N \in C^k(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$, $k \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, причем оператор $M$ $(L,p)$-ограничен, $p \in \{0\}\cup\mathbb{N}$. Рассмотрим уравнение

$$L\dot{u} = Mu + N(u). \tag{2}$$

Вектор функцию $u \in C^k((-T,T);\mathfrak{U})$ назовем *решением уравнения* (2), если она при некотором $T \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет этому уравнению. Решение $u = u(t)$ уравнения (2) назовем *решением задачи Коши*

$$u(0) = u_0, \tag{3}$$

для уравнения (2), если оно удовлетворяет условию (3). В силу теоремы 1 мы можем редуцировать уравнение (2) к эквивалентной системе

$$G\dot{u}^0 = u^0 + M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)N(u) \tag{4}$$

$$\dot{u}^1 = Su^1 + L_1^{-1}QN(u) \tag{5}$$

где $u^1 = Pu$, $u^0 = u - u^1$.

Определение. Решение $u = u(t)$ задачи (2), (3) называется *квазистационарной траекторией уравнения* (2), *проходящей через точку* $u_0$, если $G\dot{u}^0(t) \equiv 0$ при всех $t \in (-T,T)$.

Очевидно, что любое стационарное решение задачи (2), (3) является квазистационарной траекторией, однако обратное неверно.

Далее будем рассматривать только квазистационарные траектории. Введем в рассмотрение множество

$$\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I} - Q)(Mu + N(u)) = 0\}$$

В силу теоремы 1 и уравнения (4) любая квазистационарная траектория $u = u(t)$ лежит в $\mathfrak{M}$.

Пусть $u_0 \in \mathfrak{M}$, положим $u_0^1 = Pu_0 \in \mathfrak{U}^1$. Будем говорить, что множество $\mathfrak{M}$ в точке $u_0$ является *банаховым* $C^k$*-многообразием*, если существуют окрестности $\mathfrak{O}_0^{\mathfrak{M}} \subset \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{O}_0^1 \subset \mathfrak{U}^1$ точек $u_0$ и $u_0^1$ соответственно и $C^k$-диффеоморфизм $\delta : \mathfrak{O}_0^{\mathfrak{M}} \to \mathfrak{O}_0^1$ такой, что $\delta^{-1}$ равен сужению проектора $P$ на $\mathfrak{O}_0^{\mathfrak{M}}$. Множество $\mathfrak{M}$ называется *банаховым* $C^k$*-многообразием, моделируемым пространством* $\mathfrak{U}^1$, если оно является банаховым $C^k$-многообразием в каждой своей точке.

**Теорема 4** (см. [12]). *Пусть в точке* $u_0$ *множество* $\mathfrak{M}$ *является банаховым* $C^k$*-многообразием. Тогда существует единственная квазистационарная траектория уравнения* (2)*, проходящая через точку* $u_0$.

### 3. Морфология фазового пространства

Пусть $\Omega_n$ — $n$-мерное ориентированное гладкое (т. е. класса $C^\infty$) компактное связное риманово многообразие без края. Прежде чем редуцировать систему (1) на $\Omega_n$ к уравнению (2), запишем ее в виде

$$(\lambda - \nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v \cdot \nabla)v - p + f, \nabla(\nabla \cdot v) = 0. \tag{6}$$

Обсуждение замены (2) → (6) см. в [13].

Пусть $\mathfrak{H}_k^0$-гильбертово, а $\mathfrak{H}_k^l$-банаховы, $l = 1, 2$, пространства дифференциальных $k$-форм, определенных на $\Omega_n$; $\mathfrak{H}_{-1}^l = \mathfrak{H}_{n+1}^l = \{0\}$, $l = 0, 1, 2$.

**Теорема 5** (теорема Ходжа – Кодаиры). *Для любых* $k = 0, 1, \dots, n$ *и* $l = 0, 1, 2$ *существует расщепление пространства* $\mathfrak{H}_k^l$ *в прямую ортогональную сумму*

$$\mathfrak{H}_k^l = \mathfrak{H}_{kd}^l \oplus \mathfrak{H}_{k\delta}^l \oplus \mathfrak{H}_{k\Delta},$$

*причем пространство $\mathfrak{H}_{k\triangle}$ конечномерно.*

Здесь ортогональность понимается в смысле скалярного произведения из $\mathfrak{H}_k^0$, а $\Delta$-оператор Лапласа – Бельтрами.

**Лемма 1.** *Формулой $A = \nabla^2 : \mathfrak{H}_k^2 \to \mathfrak{H}_k^0$ задается линейный непрерывный оператор с дискретным конечномерным спектром $\sigma(A)$, сгущающимся только к точке $\infty, k = 0, 1, \ldots, n$.*

Обозначим через $A_\delta$ $(A_d)$ сужение оператора $A$ на $\mathfrak{H}_{k\delta}^2$ $(\mathfrak{H}_{kd}^2)$.

**Лемма 2.** *Операторы $A_\delta, A_d \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_k^2; \mathfrak{H}_k^0)$, причем $\sigma(A_\delta) = \sigma(A_d) = \sigma(A)$, и $A = A_\delta\Sigma + A_d\Pi$, $k = 0, 1, \ldots, n$.*

Здесь через $\Sigma : \mathfrak{H}_k^2 \to \mathfrak{H}_{k\delta}^2$ $(\Pi : \mathfrak{H}_k^2 \to \mathfrak{H}_{kd}^2)$ обозначен ортопроектор (в смысле $\mathfrak{H}_k^0$) вдоль $\mathfrak{H}_{kd}^2 \oplus \mathfrak{H}_{k\triangle}$ $(\mathfrak{H}_{k\delta}^2 \oplus \mathfrak{H}_{k\triangle})$. В дальнейшем непрерывные расширения проекторов $\Sigma$ и $\Pi$ на $\mathfrak{H}_k^l, l = 0, 1$ будем обозначать теми же символами.

**Лемма 3.** *Формулой $B = d\delta : \mathfrak{H}_k^2 \to \mathfrak{H}_{kd}^0$ задается линейный непрерывный оператор,* $\ker B = \mathfrak{H}_{k\delta}^2$.

Фиксируем $k = 0, 1, \ldots, n$, положим $\mathfrak{U} = \mathfrak{H}_{k\delta}^2 \times \mathfrak{H}_{kd}^2 \times \mathfrak{H}_{kd}^0$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_{k\delta}^0 \times \mathfrak{H}_{kd}^0 \times \mathfrak{H}_{kd}^0$, и формулами

$$L = \begin{pmatrix} \lambda - A_\delta & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \lambda - A_d & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} \nu A_\delta & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \nu A_d & -\mathbb{I} \\ \mathbb{O} & \mathbb{B} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

зададим операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

**Теорема 6.** *При любых $\lambda \in \mathbb{R}, \nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор $M$ $(L, 1)$-ограничен.*

**Лемма 4.** *При любых $n = 2, 3, 4$ формулой $C : \alpha \to \alpha \wedge {*d\alpha}$ задается оператор $C \in C^\infty(\mathfrak{H}_k^2; \mathfrak{H}_k^0)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.*

Построим оператор $N = col(\Sigma C, \Pi C, \mathbb{O})$, очевидно, $N \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Итак, редукция (6) к (2) закончена.

**Теорема 7.** *При любых $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(A), \nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n = 2, 3, 4$ фазовым пространством уравнения (6) служит простое банахово $C^\infty$-многообразие $\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : \Sigma C(u_\delta) = p\}$, моделируемое подпространством $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{H}_{k\delta}^2 \times \{0\} \times \{0\}$ и содержащее только квазистационарные траектории.*

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Осколков А. П.* Нелокальные задачи для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С. Л. Соболева // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1991. Т. 191. С. 31–48.
2. *Амфилохиев В. Б., Войткунский Я. И., Мазаева Н. П., Ходорковский Я. С.* Теория полимерных растворов при наличии конвективных ускорений // Тр. Ленингр. кораблестр. ин-та. 1975. № 96. С. 3–9.
3. *Врагов В. Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983.
4. *Свиридюк Г. А.* Об одной модели динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости // Изв. вузов. Математика. 1988. № 1. С. 74–79.
5. *Свиридюк Г. А.* О многообразии решений одной задачи динамики несжимаемой вязкоупругой жидкости // Диффер. уравн. 1988. Т. 24, № 10. С. 1832–1834.
6. *Свиридюк Г. А., Анкудинов А. В.* Фазовое пространство задачи Коши-Дирихле для одного неклассического уравнения // Диффер. уравн. 2003. Т. 39, № 11. С. 1556–1661.

**7.** *Свиридюк Г. А., Сукачева Т. Г.* О разрешимости нестационарной задачи динамики вязкоупругой жидкости // Мат. заметки. 1998. Т. 63, № 3. С. 442–450.

**8.** *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston; Tokyo; Koln: USP, 2003.

**9.** *Свиридюк Г. А.* Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева // Изв. РАН. Сер. мат. 1993. Т. 57, № 3. С. 192–207.

**10.** *Свиридюк Г. А., Якупов М. М.* Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова // Диффер. уравн. 1996. Т. 32, № 11. С. 1538–1543.

**11.** *Свиридюк Г. А., Манакова Н. А.* Фазовое пространство задачи Коши-Дирихле для уравнений Осколкова нелинейной фильтрации // Изв. вузов. Математика. 2003. № 9. С. 36–41.

**12.** *Свиридюк Г. А., Казак В. О.* Фазовое пространство задачи Коши-Дирихле одной обобщенной модели Осколкова // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 5. С. 1124–1131.

**13.** *Свиридюк Г. А.* Об одной модели слабосжимаемой вязкоупругой жидкости // Изв. вузов. Математика. 1994. № 1. С. 62–70.



*Свиридюк Георгий Анатольевич*
*Россия, Челябинск, Челябинский государственный университет*
`ridyu@csu.ru`

*Шафранов Дмитрий Евгеньевич*
*Россия, Челябинск, Челябинский государственный университет*
`shaf_yng@math.cgu.chel.su`