УДК 517.95

УСТОЙЧИВОЕ И НЕУСТОЙЧИВОЕ ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ УРАВНЕНИЯ ОСКОЛКОВА

О. Г. Китаева, Г. А. Свиридюк

В работе рассмотренно уравнения Осколкова, моделирующее плоскопараллельное течение вязкоупругой несжимаемой жидкости. Доказано существование конечномерного неустойчивого и бесконечномерного устойчивого инвариантных многообразий этого уравнения.

Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^2_{(x_1,x_2)}$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим уравнение Осколкова

$$(\lambda - \Delta)\Delta\psi_t = \nu\Delta^2\psi - \frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x_1, x_2)}, \tag{0.1}$$

моделирующее плоскопараллельное течение вязкоупругой несжимаемой жидкости. Уравнение (0.1) получено из системы уравнений Осколкова [1]

$$(\lambda - \nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (u\nabla)u - \nabla p,\ \nabla v = 0$$

после купирования одной пространственной переменной и введения функции тока $\psi = \psi(x_1, x_2, t)$. Разрешимость начально-краевой задачи для уравнения (0.1) изучалась в [2]. В [3] было показано, что фазовым пространством такой задачи служит простое банахово C^∞-многообразие, моделируемое образом разрешающей группы линейной части уравнения (0.1). Здесь параметры λ, $\nu \in \mathbb{R}_+$ характеризуют упругие и вязкие свойства жидкости, причем экспериментально показано [4], что отрицательные значения параметра λ не противоречат физическому смыслу модели.

Нашей целью является описание устойчивого и неустойчивого инвариантных многообразий уравнения (0.1). Прежде всего, опираясь на теорему редукции С.Н. Васильева [5], в подходящих функциональных пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ мы редуцируем уравнение (0.1) к полулинейному уравнению соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u). \tag{0.2}$$

Затем используя метод фазового пространства [6], мы редуцируем уравнение (0.2) к уравнению

$$\dot{u}^1 = Su^1 + F(u^1), \tag{0.3}$$

определенному на образе $\mathfrak{U}^1 \subset \mathfrak{U}$ разрешающей голоморфной группы линейной части уравнения (0.2), причем любое решение $u = u(t)$, $t \in (-\tau, \tau)$ [7] уравнения (0.2) имеет вид $u = (\mathbb{I} + \delta)(u^1)$ и лежит на фазовом пространстве $\mathfrak{M}$, т. е. $u(t) \in \mathfrak{M}$, $t \in (-\tau, \tau)$. Наконец убедимся, что уравнение (0.3) удовлетворяет условиям теоремы Адамара – Перрона (теорема 5.2.1 [8]), и распространим ее на уравнение (0.2).

Заметим еще, что как абстрактные результаты (0.2), так и конкретные (0.1) уравнения соболевского типа привлекают внимание все большего числа исследователей [9–12] и составляют в настоящее время массивное подмножество неклассических уравнений математической физики [13].

1. Постановка задачи

Чтобы редуцировать уравнение (0.1) к уравнению (0.2), положим

$$\mathfrak{U} = \{u \in W_2^4 : u(x_1, x_2) = \Delta u(x_1, x_2) = 0,\ (x_1, x_2) \in \partial\Omega\},\ \mathfrak{F} = L_2(\Omega),$$

а операторы $L,\ M$ и N зададим формулами

$$L : u \to (\lambda - \Delta)\Delta u,\ M : u \to \nu\Delta^2 u,$$

$$N : u \to -\frac{\partial(u, \Delta u)}{\partial(x_1, x_2)}.$$

Обозначим через $\{\lambda_k\}$ последовательность собственных значений однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа Δ в области Ω занумерованных по невозрастанию с учетом их кратности, а через $\{\varphi_k\}$ — соответствующую последовательность собственных функций, ортонормированных в смысле L_2.

Теорема 1.1 (см. [3]). (i) *При любых* $\lambda \in \mathbb{R},\ \nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *оператор* M $(L, 0)$-*ограничен;*

(ii) *оператор* $N \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

Термин "оператор M $(L, 0)$-ограничен" эквивалентен термину "оператор M (L, σ)-ограничен, причем ∞ — устранимая особая точка L-резольвенты оператора M" [3,6]. Заметим еще, что теорема 1.1 по сути есть редукция уравнения (0.1) к уравнению (0.2). Вектор-функцию $u \in C^\infty((-\tau, \tau), \mathfrak{U})$ назовем *решением* этого уравнения, если оно удовлетворяет ему при некотором $\tau \in \mathbb{R}_+$.

Далее, найдем L-спектр оператора M

$$\sigma^L(M) = \left\{\frac{\nu\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} : k \in \mathbb{N} \setminus \{l : \lambda = \lambda_l\}\right\}.$$

Построим проекторы

$$P = \mathbb{I} - \sum_{\lambda = \lambda_k} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k,\ Q = \mathbb{I} - \sum_{\lambda = \lambda_k} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

(Несмотря на внешнее сходство проекторы определены на разных пространствах.) Тогда множество $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{U}$, содержащее все квазистационарные траектории уравнения (0.2), будет иметь вид

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \mathfrak{U},\ \lambda \notin \{\lambda_k\}; \\ \{u \in \mathfrak{U} : \langle Mu + N(u), \varphi_l \rangle = 0,\ \lambda = \lambda_l\}, \end{cases}$$

а пространство $\mathfrak{U}^1$ имеет вид

$$\mathfrak{U}^1 = \begin{cases} \mathfrak{U},\ \lambda \notin \{\lambda_k\}; \\ \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, \varphi_l \rangle = 0,\ \lambda = \lambda_l\}. \end{cases}$$

Теорема 1.2 (см. [3]). *При любых* $\lambda \in \mathbb{R},\ \nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *фазовым пространством уравнения* (0.1) *служит множество* $\mathfrak{M}$, *являющееся простым банаховым* C^∞-*многообразием, моделированным пространством* $\mathfrak{U}^1$.

Итак, по теореме уравнение (0.1) редуцируется к уравнению (0.2), где $u^1 = Pu$, оператор $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$ (L_1 (M_1) — сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^1$), оператор $F = L_1^{-1}QN(\mathbb{I}+\delta) \in C^\infty(\mathfrak{U}^1)$, оператор $D = \mathbb{I}+\delta \in C^\infty(\mathfrak{U}^1;\mathfrak{M})$ — C^∞-диффеоморфизм, причем D^{-1} есть сужение проектора P на $\mathfrak{M}$. При любом $u_0 \in \mathfrak{M}$ и некотором $\tau = \tau(u_0) \in \mathbb{R}_+$ существует единственное решение уравнения (0.2), являющееся квазистационарной траекторией, проходящей через точку u_0, и имеющее вид $u = Du^1$, где $u^1 = u^1(t)$, $(-\tau,\tau)$ есть решение задачи Коши $u^1(0) = Pu_0$ для уравнения (0.3). Обозначим u через $u = u(t,u_0)$.

2. Теорема Адамара – Перрона

Пусть $\mathfrak{V}$ — банахово пространство, оператор $R \in \mathcal{L}(\mathfrak{V})$. Пусть спектр $\sigma(R)$ таков, что
$$\sigma(R) \cap \{i\mathbb{R}\} = \varnothing. \tag{2.1}$$

Тогда $\sigma(R) = \sigma_l(R) \cup \sigma_r(R)$, где $\sigma_{l(r)}(M) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re\lambda < 0\ (\Re\lambda > 0)\}$, и существуют замкнутые контуры $\gamma_l \in \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re\lambda < 0\}$, $\gamma_r \in \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re\lambda > 0\}$, ограничивающие области $\Omega_l \subset \mathbb{C}, \Omega_r \subset \mathbb{C}$ соответственно, содержащие множества $\sigma_l(R)$, $\sigma_r(R)$ соответственно. Построим проекторы
$$P_{l(r)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{l(r)}} R_\lambda(R)d\lambda,$$
где $R_\lambda(R) = (\lambda I - R)^{-1}$ — резольвента оператора R. Положим $\mathfrak{V}^{l(r)} = \operatorname{im} P_{l(r)}$, и через $R_{l(r)}$ обозначим сужение оператора R на $\mathfrak{V}^{l(r)}$. Очевидно, $R_{l(r)} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^{l(r)})$ (т. е. $\mathfrak{V}^l$, $\mathfrak{V}^r$ — инвариантные пространства оператора R). Построим аналитические группы операторов
$$e^{tR_{l(r)}} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{l(r)}} R_\lambda(R)e^{\lambda t}d\lambda,\ t \in \mathbb{R},$$
для которых имеют место оценки
$$\|e^{tR_l}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V})} \le Me^{-\alpha t},\ \|Re^{tR_l}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V})} \le Me^{-\alpha t},\ t \in \mathbb{R}_+;$$
$$\|e^{tR_r}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V})} \le Me^{\alpha t},\ \|Re^{tR_r}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{V})} \le Me^{\alpha t},\ t \in \mathbb{R}_-.$$

Пусть оператор $H \in C^\infty$, рассмотрим уравнение
$$\dot{v} = Rv + H(v). \tag{2.2}$$
Вектор-функцию $v \in C^k((-\tau,\tau);\mathfrak{V})$ назовем *решением задачи Коши* $v(0) = v_0$ для уравнения (2.2), если она при некотором $\tau = \tau(v_0)$, удовлетворяет уравнению (2.2) и условию Коши. Через $v = v(t,v_0)$ обозначим решение задачи Коши для уравнения (2.2).

Определение 2.1. Множество
$$\mathfrak{N}^s = \{v_0 \in \mathfrak{V} : \|P_l v_0\|_{\mathfrak{V}} \le \rho(2M)^{-1},\ \|v(t,v_0)\|_{\mathfrak{V}} \le \rho,\ t \in \mathbb{R}_+\}$$
такое, что

(i) $\mathfrak{N}^s$ диффеоморфно замкнутому шару в $\mathfrak{V}^l$ с центром в начале координат радиуса $\rho(2M)^{-1}$;

(ii) $\mathfrak{N}^s$ касается $\mathfrak{V}^l$ в начале координат;

(iii) при любом $v_0 \in \mathfrak{N}^s$ $\|v(t,v_0)\|_{\mathfrak{V}} \to 0$ при $t \to +\infty$
называется *устойчивым инвариантным многообразием уравнения* (2.2); а множество

$$\mathfrak{N}^u = \{v_0 \in \mathfrak{V} : \|P_r v_0\|_{\mathfrak{V}} \le \rho(2M)^{-1},\ \|v(t,v_0)\|_{\mathfrak{V}} \le \rho,\ t \in \mathbb{R}_-\}$$

такое, что

(i) $\mathfrak{N}^u$ диффеоморфно замкнутому шару в $\mathfrak{V}^r$ с центром в начале координат радиуса $\rho(2M)^{-1}$;

(ii) $\mathfrak{N}^u$ касается $\mathfrak{V}^r$ в начале координат;

(iii) при любом $v_0 \in \mathfrak{N}^u$ $\|v(t,v_0)\|_{\mathfrak{V}} \to 0$ при $t \to -\infty$
называется *неустойчивым инвариантным многообразием уравнения* (2.2).

Замечание 2.1. Если оператор $H \equiv \mathbb{O}$, то $\mathfrak{N}^s = \mathfrak{U}^l$ и $\mathfrak{N}^u = \mathfrak{U}^r$.

Теорема 2.1 (теорема Адамара – Перрона). *Пусть выполнено условие* (2.1), *и оператор H таков, что $H(0) = 0$, $H_0' = \mathbb{O}$. Тогда при некотором $\rho \in \mathbb{R}_+$ существуют устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия уравнения* (2.2). *Причем, если для некоторого $v_0 \in \mathfrak{V}$ имеет место $\|P_l v_0\|_{\mathfrak{V}} \le \rho(2M)^{-1}$ или $\|P_r v_0\|_{\mathfrak{V}} \le \rho(2M)^{-1}$ и $\|v(t,v_0)\|_{\mathfrak{V}} \le \rho$ при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$, то $v_0 \in \mathfrak{N}^s \cup \mathfrak{N}^u$.*

Доказательство. Ввиду важности этой теоремы приведем в сокращенном виде ее доказательство, которое взято из п. 5.2 [7] и адаптировано к нашей ситуации. Предположим сначала, что устойчивое инвариантное многообразие $\mathfrak{N}^s$ уравнения (2.2) существует. Пусть точка $v_0 \in \mathfrak{N}^s$, тогда $v(t,v_0) = v^l(t,v_0) + v^r(t,v_0)$, где $v^l(t,v_0) = P_l v(t,v_0)$, $v^r(t,v_0) = P_r v(t,v_0)$, причем

$$v^r(t,v_0) = e^{tR_r} P_r v_0 + \int_0^t e^{(t-s)R_r} P_r H(v(s,v_0))ds.$$

Отсюда

$$e^{-tR_r} v^r(t,v_0) = P_r v_0 + \int_0^t e^{-sR_r} P_r H(v(s,v_0))ds,$$

где $e^{-tR_r} v^r(t,v_0) \to 0$ при $t \to +\infty$, значит,

$$P_r v_0 = -\int_0^\infty e^{-sR_r} P_r H(v(s,v_0))ds.$$

Итак, если $v = v(t,v_0)$ — решение задачи Коши для уравнения (2.2), то оно с необходимостью должно удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} v(t,v_0) &= e^{tR_l} P_l v_0 + \int_0^t e^{(t-s)R_l} P_l H(v(s,v_0))ds \\ &- \int_t^\infty e^{(t-s)R_r} P_r H(v(s,v_0))ds. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Обратно, фиксируем точку $a \in \mathfrak{V}^l$ и рассмотрим полное метрическое пространство

$$\mathfrak{G} = \{v \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{V}) : \sup_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+} \|v(t)\|_{\mathfrak{V}} \le \rho,\ P_l v(0) = a\},$$

где $\rho \in \mathbb{R}_+$ — константа, обеспечивающая сжатие оператора в правой части (2.3) на полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+$. Итак, существует единственное решение $v \in \mathfrak{G}$ уравнения (2.3), причем

$$v(0) = a - \int\limits_0^\infty e^{sR_r} P_r H(v(s,a))ds. \tag{2.4}$$

Стандартным способом убеждаемся, что $v \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{V})$, и рассмотрим (2.4), представленное в виде

$$a - \int\limits_0^\infty e^{sR_r} P_r H(v(s,a))ds = (\mathbb{I} + \sigma)(a).$$

Как нетрудно видеть, $\mathfrak{N}^s = \{v_0 \in \mathfrak{V} : v_0 = (\mathbb{I}+\sigma)(a),\ a \in \mathfrak{V}^l,\ \|a\|_{\mathfrak{V}} \leq \rho(2M)^{-1}\}$ – искомое представление устойчивого инвариантного многообразия уравнения (2.2). Существование неустойчивого инвариантного многообразия доказывается аналогично.

Замечание 2.2. Требование $H \in C^\infty(\mathfrak{V})$ излишне. Как показывает доказательство, достаточно ограничиться случаем $H \in C^k(\mathfrak{O})$,$k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, где $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{V}$ — некоторая окрестность нуля.

Замечание 2.3. Если $\sigma(R) = \sigma_l(R)$, то $\mathfrak{N}^s = \mathfrak{O}^s$, где $\mathfrak{O}^s \subset \mathfrak{V}$ — некоторая окрестность нуля. В этом случае говорят об *равномерно асимптотически устойчивом* поведении решений уравнения (2.2) в окрестности нуля.

3. Устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия

Сначала убедимся, что уравнение (0.3) удовлетворяет требованиям теоремы Адамара – Перрона. Прежде всего огрничемся рассмотрением только положительных значений параметра ν, что соответсвует физическому смыслу. Тогда при любых $\lambda \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}_+$ L-спектр оператора M удовлетворяет условию (2.1), т. е. $\sigma^L(M) = \sigma_l^L(M) \cup \sigma_r^L(M)$, где

$$\sigma_l^L(M) = \left\{ \frac{\nu\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} : \lambda > \lambda_k \right\},\ \sigma_r^L(M) = \left\{ \frac{\nu\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} : \lambda < \lambda_k \right\}.$$

Поскольку $\sigma^L(M) = \sigma(S)$, то уравнение (0.3) удовлетворяет первому из требований теоремы Адамара – Перрона. Далее, легко видеть, что

$$N(0) = 0,\ N_0'(0) = \mathbb{O}, \tag{3.1}$$

тогда поскольку $\sigma(0) = 0$, то $F(0) = 0$, и поскольку

$$D_0' = \mathbb{I}, \tag{3.2}$$

то $F_0' = L_1^{-1} Q N_0' D_0' \equiv \mathbb{O}$.

Итак, для уравнения (0.3) выполнены все требования теоремы Адамара – Перрона. Поэтому существует расщепление пространства $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}^l \oplus \mathfrak{U}^r$, причем пространство $\mathfrak{U}^r$ не более, чем конечномерно. Кроме того, существуют устойчивое $\mathfrak{N}^s$ и неустойчивое $\mathfrak{N}^u$ инвариантные многообразия уравнения (0.3), причем $\mathfrak{N}^s = \{u^1 \in \mathfrak{U}^1 :\ u^1 = (\mathbb{I} + \sigma)(u^l),\ u^l \in \mathfrak{U}^l\}$.

Определение 3.1. Множество $\mathfrak{M}^s = \{u_0 \in \mathfrak{U} : \|P_l u_0\|_{\mathfrak{U}} \le R_1,\ \|u(t,u_0)\|_{\mathfrak{U}} \le R_2,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ такое, что

(i) $\mathfrak{M}^s$ диффеоморфно замкнутому шару в $\mathfrak{U}^l$ с центром в начале координат радиуса R_1;

(ii) $\mathfrak{M}^s$ касается $\mathfrak{U}^l$ в начале координат;

(iii) при любом $u_0 \in \mathfrak{M}^s$ $\|u(t,u_0)\|_{\mathfrak{U}} \to 0$ при $t \to +\infty$

называется *устойчивым инвариантным многообразием уравнения* (0.2); а множество $\mathfrak{M}^u = \{u_0 \in \mathfrak{U} : \|P_r u_0\|_{\mathfrak{U}} \le R_1,\ \|u(t,u_0)\|_{\mathfrak{U}} \le R_2,\ t \in \mathbb{R}_-\}$ такое, что

(i) $\mathfrak{M}^u$ диффеоморфно замкнутому шару в $\mathfrak{U}^r$ с центром в начале координат радиуса R_1;

(ii) $\mathfrak{M}^u$ касается $\mathfrak{U}^r$ в начале координат;

(iii) при любом $u_0 \in \mathfrak{M}^u$ $\|u(t,v_0)\|_{\mathfrak{U}} \to 0$ при $t \to -\infty$

называется *неустойчивым инвариантным многообразием уравнения* (0.2).

Положим $\mathfrak{M}^s = \{u \in \mathfrak{U} :\ u = D(u^1),\ u^1 \in \mathfrak{M}\}$ и докажем, что $\mathfrak{M}^s$ — устойчивое инвариантное многообразие уравнения (0.2). Действительно, если $R_1 = \rho(2M)^{-1}$ и $u_0 = Du_0^1$, то $P_l u_0 = P_l P(\mathbb{I}+\delta)u_0^1 = P_l u_0^1$, $\|P_l u_0^1\|_{\mathfrak{U}} \le R_1$. Поскольку выполнено (3.2), и $D = (\mathbb{I}+\delta)(\mathbb{I}+\sigma) : \mathfrak{U}^l \to \mathfrak{M}^s$, то $\mathfrak{M}^s$ касается $\mathfrak{U}^l$ в начале координат. Оставшиеся требования определения 3.1 столь же просто проверяются. Для $\mathfrak{M}^u$ рассуждения аналогичны. Таким образом доказана

Теорема 3.1. *При любых $\lambda \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}_+$ существуют не более чем конечномерное неустойчивое инвариантное многообразие $\mathfrak{M}^u$, $\dim \mathfrak{M}^u = \max\{l : \lambda_l > \lambda\}$, и бесконечномерное устойчивое инвариантное многообразие $\mathfrak{M}^s$, $\operatorname{codim} \mathfrak{M}^s = \dim \mathfrak{M}^u + \dim \ker L$, уравнения* (0.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Осколков А. П.* Нелокальные проблемы для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л. Соболева // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1991. Т. 198. С. 31–48.
2. *Свиридюк Г. А.* Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева // Изв. РАН. Сер. мат. 1993. Т. 57, № 3. С. 192–202.
3. *Свиридюк Г. А., Якупов М. М.* Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова // Диффер. уравн. 1996. Т. 32, № 11. С. 1538–1543.
4. *Амфилохиев В. Б., Войткунский Я. И., Мазаева Н. П., Ходорковский Я. И.* Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений // Тр. Ленингр. кораблестр. ин-та. 1975. Т. 96. С. 3–9.
5. *Васильев С. Н.* К теории редукции в качественном анализе и управлении динамическими системами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2004. Т. 10, № 2. С. 20–34.
6. *Свиридюк Г. А., Сукачева Т. Г.* Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 5. С. 109–119.
7. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston; Tokyo: VSP, 2003.
8. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
9. *Showalter R. E.* Hilbert space methods for partial differential equations. London; San Francisco; Melbourne: Pitman, 1977.
10. *Favini A., Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces. New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker Inc. 1999.
11. *Pyatkov S.G.* Operator theory. Nonclassical problems. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2002.
12. *Demidenko G.V., Uspenskii S.V.* Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest–order deriative. New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003.

13. *Врагов В.Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983.

Китаева Ольга Геннадьевна
Россия, Магнитогорск, Магнитогорский государственный университет

Свиридюк Георгий Анатольевич
Россия, Челябинск, Челябинский государственный университет
ridyu@csu.ru