Неклассические уравнения математической физики 2007. С. 5–14

УДК 517.9

ЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

Н. Л. Абашеева

В данной работе задача определения источника в операторно-дифференциальном уравнении первого порядка $u_t - Lu = f$ исследуется с помощью введения параметра. Доказаны теоремы существования и единственности решения.

1. Постановка задачи

Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$, L — самосопряженный оператор с областью определения $D(L)$ и $\exists\delta>0$ такое, что

$$-(Lu,u)\geq\delta\|u\|^2$$

для всех $u\in D(L)$. Также пусть $0<T<\infty$ и измеримое множество $D\subset\mathbb{C}$ имеет предельную точке $p_0\in\mathbb{C}$.

В работе исследуется следующая задача с параметром $p\in D$.

Задача P. Найти пару функций $u(t,p)$ и $f(t)$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t}-pLu=f(t),\qquad t\in(0,T),\ p\in D, \tag{1}$$

и краевым условиям

$$u(0,p)=u_0(p),$$
$$u(T,p)=u_1(p).$$

Такие обратные задачи исследовались в работах [1–3]. Заметим, что уравнения с параметром возникают после применения преобразования Фурье по переменной y к уравнениям вида

$$\frac{\partial^k w}{\partial t^k}-\frac{\partial}{\partial y}Aw=f(x,t)\lambda(y),$$

где $w=w(x,t,y)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $t,y\in\mathbb{R}$, A — линейный оператор, действующий по переменной x.

Введем пространство H_1 как пополнение $D(L)$ по норме

$$\|u\|_{H_1}=\sqrt{|(Lu,u)|}$$

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 06-01-00439, НШ-7157.2006.1 и интеграционных проектов СО РАН №48 и №2.2

и негативное пространство H_{-1}, построенное по пространствам H_1 и H, т. е. пополнение H по норме

$$\|u\|_{H_{-1}} = \sup_{\varphi\in H_1,\varphi\neq 0} \frac{|(u,\varphi)|}{\|\varphi\|_{H_1}}.$$

Тогда оператор L допускает продолжение до линейного непрерывного оператора из H_1 в H_{-1}. Дополнительно предположим, что $L^{-1} : H_1 \to H_1$ — вполне непрерывен.

Возьмем любую функцию $\Phi(t,p) \in L_2(D\times(0,T);H_1)) \cap L_2(D;W_2^1(0,T;H_{-1}))$ такую, что

$$\Phi(0,p) = u_0(p), \qquad \Phi(T,p) = u_1(p).$$

Такие функции существуют, если $u_1 \in L_2(D;H_1)$, $u_0 \in L_2(D;H)$ (см. [4]). Тогда заменой $v = u - \Phi$ наша задача сводится к задаче с однородными краевыми условиями.

Задача P'. Найти пару функций $v(t,p)$ и $f(t)$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} - pLv = f(t) - g(t,p), \qquad t\in(0,T),\ p\in D, \tag{2}$$

$$v(0,p) = 0, \tag{3}$$

$$v(T,p) = 0. \tag{4}$$

2. Единственность

Поскольку оператор $L^{-1} : H_1 \to H_1$ — самосопряженный и вполне непрерывный, то его собственные векторы (после соответствующей нормировки) образуют ортонормированный базис пространства H, базис Рисса пространств H_1 и H_{-1}. Обозначим через $v_n \in H_1$ собственные векторы оператора L, соответствующие собственным значениям λ_n $(\ldots \le \lambda_{n+1} \le \lambda_n \le \ldots \le \lambda_1 < 0)$, т. е.

$$Lv_n = \lambda_n v_n.$$

Значит, любой элемент $v \in H_1$ представим в виде

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n, \qquad \text{где} \qquad c_n = (v, v_n).$$

Причем нормы в пространствах H_1, H, H_{-1} эквивалентны следующим

$$\|v\|^2_{H_1} = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n||c_n|^2, \qquad \|v\|^2_{H} = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2, \qquad \|v\|^2_{H_{-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{-1}|c_n|^2.$$

Введем также пространства H_2, H_{-2} с нормами

$$\|v\|^2_{H_2} = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2|c_n|^2, \qquad \|v\|^2_{H_{-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{-2}|c_n|^2.$$

Далее, положим $E = L_2(D\times(0,T);H)$, $V_1 = \Big\{v \in L_2(D\times(0,T);H_2) : \exists \frac{\partial v}{\partial t} \in E,$ $v(0,p) = v(T,p) = 0\Big\}$. Также введем подпространства пространства E

$$S_0 = L_2(0,T;H), \qquad S_1 = \left\{\varphi(t,p) \in E :\ \exists v \in V_1 \text{ такая, что } \varphi = \frac{\partial v}{\partial t} - pLv\right\}.$$

Теорема 1. *Множество $S = S_0 + S_1$ плотно в E и $S_1 \cap S_0 = \{0\}$.*

Доказательство. Покажем сначала, что $S_1 \cap S_0 = \{0\}$. Пусть $f(t,p) \in S_1 \cap S_0$. Тогда $f = f(t)$ и $\exists v(t,p) \in V_1$ такая, что

$$f = v_t - p\Delta v. \tag{5}$$

Функции v и f можно представить в виде

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t,p) v_n, \qquad f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) v_n.$$

Из уравнения (5) и условий (3) получаем следующую систему уравнений для коэффициентов $c_n(t,p)$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial c_n}{\partial t} = \lambda_n p c_n + f_n(t), \\ &c_n(0,p) = 0, \\ &c_n(T,p) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Отсюда

$$c_n(t,p) = \int_0^t e^{\lambda_n p(t-s)} f_n(s)\, ds.$$

Из краевого условия (6) получаем систему уравнений для коэффициентов f_n, $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^T e^{-\lambda_n p s} f_n(s)\, ds = 0, \qquad p \in D. \tag{7}$$

Заметим, что для любых $\lambda \in \mathbb{C}$ и $f \in L_2(0,T)$ функция $G_n(p) = \int_0^T e^{-\lambda p t} f_n(t)\, dt$ — целая. Поэтому в силу структуры множества D равенство (7) должно быть выполнено для всех $p \in \mathbb{C}$. Полагая $p = i\frac{2\pi k}{\lambda_n T}$ ($k \in \mathbb{Z}$), получаем, что коэффициенты комплексного ряда Фурье функций f_n, $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^T e^{-i\frac{2\pi k t}{\lambda_n T}} f_n(t)\, dt = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, $f_n = 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$. Таким образом, $S_1 \cap S_0 = \{0\}$.

Найдем ортогональное дополнение $S^{\perp}$. Пусть $\psi \in S^{\perp}$. Тогда для любых $v \in V_1$, $f \in S_0$

$$\left(\psi, \frac{\partial v}{\partial t} - pLv + f\right)_E = 0,$$

откуда следует, что

$$\left(\psi, \frac{\partial v}{\partial t} - pLv\right)_E = 0 \quad \text{для} \quad \forall v \in V_1, \tag{8}$$

$$(\psi, f)_E = 0 \quad \text{для} \quad \forall f \in S_0. \tag{9}$$

Представим функцию ψ в виде

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t,p) v_k,$$

где $c_k \in L_2((0,T)\times D)$. Полагая в (8) $v = a(t,p)v_n$ $(n \in \mathbb{N})$, где $a \in L_2(D; W_2^1(0,T))$, $a(0,p) = a(T,p) = 0$, получаем, что

$$\Big(c_n, \frac{\partial a}{\partial t} - p\lambda_n a\Big)_{L_2((0,T)\times D)} = 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда следует, что для каждой функции $c_n(t,p)$ $(n \in \mathbb{N})$ существует обобщенная производная $\frac{\partial c_n}{\partial t} \in L_2((0,T)\times D)$ и

$$\frac{\partial c_n}{\partial t} = -\lambda_n p c_n.$$

Следовательно,

$$c_n(t,p) = c_n(p)e^{-\lambda_n pt}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Далее, из (9)

$$(\psi, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_D c_n(p) \int\limits_0^T e^{-\lambda_n pt}(v_n, f)\,dtdp = 0 \quad \text{для} \quad \forall f \in S_0.$$

Полагая $f = \varphi(t)v_n$, получаем

$$\int\limits_D c_n(p) \int\limits_0^T e^{-\lambda_n pt}\varphi(t)\,dtdp = \int\limits_0^T \varphi(t) \int\limits_D e^{-\lambda_n pt} c_n(p)\,dpdt = 0 \quad \text{для} \quad \forall \varphi \in L_2(0,T).$$

Следовательно, для почти всех $t \in (0,T)$

$$\int\limits_{p_1}^{p_2} e^{-\lambda_n pt} c_n(p)\,dp = 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Это уравнение аналогично уравнению (7). Поэтому $c_n(p) = 0$ для почти всех $p \in D$ и $\forall n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\psi = 0$ и $S^{\perp} = \{0\}$. Таким образом, множество S плотно в E.

Замечание. Множество S плотно, но не совпадает с E. Также заметим, что из $S_1 \cap S_0 = \{0\}$ следует единственность решения задачи P' (и задачи P) в классе $f \in L_2(0,T;H)$, $v \in V_1$.

3. Существование

Итак, множество функций $g(t,p)$, для которых обратная задача P' разрешима в пространстве $V_1 \times L_2(0,T;H)$, плотно в пространстве E, но не совпадает с ним.

Приведем некоторые достаточные условия для разрешимости задачи P'.

Будем искать решение задачи P' в виде

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t,p)v_n, \qquad f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)v_n.$$

Имеем

$$\|v\|^2_{L_2(0,T;H_1)} = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \|c_n\|^2_{L_2(0,T)} \qquad \forall p \in (p_1, p_2),$$

$$\|f\|^2_{L_2(0,T;H_{-1})} = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{-1} \|f_n\|^2_{L_2(0,T)}.$$

Поскольку

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t,p) v_n, \qquad \text{где} \qquad g_n = (g, v_n),$$

то из уравнения (2) и условий (3) получаем следующую систему уравнений для коэффициентов $c_n(t,p)$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial c_n}{\partial t} = \lambda_n p c_n + f_n(t) + g_n(t,p),$$

с краевыми условиями (6). Отсюда

$$c_n(t,p) = \int_0^t e^{\lambda_n p(t-s)} (f_n(s) + g_n(s,p))\, ds, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Из краевого условия (6) получаем систему уравнений для коэффициентов f_n, $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^T e^{-\lambda_n p t} f_n(t)\, dt = G_n(p), \tag{11}$$

где

$$G_n(p) = -\int_0^T e^{-\lambda_n p t} g_n(t,p)\, dt. \tag{12}$$

Решим уравнение

$$\int_0^T e^{-\lambda p t} f(t)\, dt = G(p), \qquad p \in D, \tag{13}$$

где $\lambda < 0$.

Заметим, что если решение этого уравнения из пространства $L_2(0,T)$ существует, то функция $G(p)$ целая. Таким образом, функция $G(p)$ должна допускать аналитическое продолжение в $\mathbb{C}$.

Кроме того, очевидно, что

$$\sup_{\eta \in \mathbb{R}} |G(\xi + i\eta)| \to 0 \quad \text{при} \quad \xi \to -\infty$$

и

$$e^{\lambda T \xi} \sup_{\eta \in \mathbb{R}} |G(\xi + i\eta)| \to 0 \quad \text{при} \quad \xi \to +\infty.$$

Далее,

$$G(\xi + i\eta) = \int_0^T e^{-i\lambda \eta t} e^{-\lambda \xi t} f(t)\, dt = \sqrt{2\pi} F_+[e^{-\lambda \xi t} \widetilde{f}](\lambda \eta),$$

где F_+ — прямое преобразование Фурье по переменной t, $\widetilde{f}$ —продолжение функции f нулем на $\mathbb{R}$. Тогда в силу равенства Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(\xi + i\eta)|^2 d\eta = \frac{2\pi}{|\lambda|} \|e^{-\lambda \xi t} f(t)\|^2_{L_2(0,T)} \le \frac{2\pi}{|\lambda|} e^{-2\lambda \xi T} \|f\|^2_{L_2(0,T)} \quad \text{для} \quad \xi \ge 0,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |G(\xi+i\eta)|^2 d\eta = \frac{2\pi}{|\lambda|}\|e^{-\lambda\xi t}f(t)\|^2_{L_2(0,T)} \leq \frac{2\pi}{|\lambda|}\|f\|^2_{L_2(0,T)} \quad \text{для} \quad \xi<0.$$

Поскольку мы ищем решение уравнения (13) из пространства $L_2(0,T)$, то искомое решение f можно представить в виде ряда Фурье, т. е. в виде

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{i2\pi kt/T}.$$

Полагая $p = i\frac{2\pi k}{\lambda T}$ в (13), получаем, что

$$a_k = \frac{1}{T}G\Big(i\frac{2\pi k}{\lambda T}\Big), \qquad k\in\mathbb{Z}.$$

Таким образом, формальное решение уравнения (13) имеет вид

$$f = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} G\Big(i\frac{2\pi k}{\lambda T}\Big)e^{i2\pi kt/T}. \tag{14}$$

Оно лежит в пространстве $L_2(0,T)$, если сходится ряд

$$\|f\|^2_{L_2(0,T)} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big|G\Big(i\frac{2\pi k}{\lambda T}\Big)\Big|^2 < \infty.$$

Таким образом, для разрешимости уравнения (13) в $L_2(0,T)$ необходимо потребовать, чтобы

(A) функция $G\in A(D)$ и допускает аналитическое продолжение в $\mathbb{C}$ до целой функции;

(B) $\lim\limits_{\xi\to\infty}\Big[\min\{1,e^{\lambda T\xi}\}\sup\limits_{\eta\in\mathbb{R}}|G(\xi+i\eta)|\Big] = 0$,
$\sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}}\Big[\min\{1,e^{2\lambda\xi T}\}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|G(\xi+i\eta)|^2\,d\eta\Big] < \infty$;

(C) $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\Big|G\Big(i\frac{2\pi k}{\lambda T}\Big)\Big|^2 < \infty$.

Докажем, что эти условия являются также достаточными для того, чтобы решение уравнения (13) представлялось формулой (14). Для этого сначала докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть функция g целая и ряд*

$$\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\frac{g(ik)}{k}$$

сходится абсолютно. Предположим также, что существует последовательность замкнутых кусочно-гладких жордановых кривых Γ_n, $n\in\mathbb{N}$, не проходящих через точки ik, $k\in\mathbb{Z}$, и таких, что

$$\lim_{n\to\infty}\min_{p\in\Gamma_n}|p| = \infty, \tag{15}$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\p\in\Gamma_n}}\frac{g(p)}{1-e^{-2\pi p}} = 0. \tag{16}$$

Тогда

$$\frac{g(p)}{1-e^{-2\pi p}} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{g(ik)}{p-ik}, \qquad p \neq ik, \tag{17}$$

причем ряд сходится равномерно на любом компакте из $\mathbb{C}\setminus\{ik,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

Доказательство. Обозначим

$$\varphi(p) = \frac{g(p)}{1-e^{-2\pi p}}.$$

Очевидно, функция φ мероморфная с простыми полюсами в точках ik, $k\in\mathbb{Z}$, причем главная часть лорановского разложения функции φ в точке ik равна $\frac{g(ik)}{2\pi(p-ik)}$. Согласно теореме Миттаг-Леффлера (см., например, [5])

$$\varphi(p) = \psi(p) + \frac{g(0)}{2\pi p} + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty,k\neq 0}^{\infty}\Big(\frac{p}{ik}\Big)^{m_k}\frac{g(ik)}{p-ik},$$

где $\psi(p)$ — некоторая целая функция, числа $m_k\in\mathbb{Z}$ выбраны так, что ряд сходится равномерно на любом компакте из $\mathbb{C}\setminus\{ik,\ k\in\mathbb{Z}\}$. В силу условий леммы ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\frac{g(ik)}{p-ik}$ сходится равномерно на любом компакте из $\mathbb{C}\setminus\{ik,\ k\in\mathbb{Z}\}$. Следовательно, можно положить $m_k=0$.

Докажем, что $\psi=0$. Согласно методу Коши (см. [5]) для этого достаточно найти последовательность замкнутых кусочно-гладких жордановых кривых Γ_n, $n\in\mathbb{N}$, не проходящих через полюсы функции φ и таких, что выполнено (15) и $\int\limits_{\Gamma_n}\big|\frac{\varphi(p)\,dp}{p}\big| \to 0$ при $n\to\infty$. В качестве таких кривых возьмем кривые, заданные в условии леммы. Из (16) и оценки $\int\limits_{\Gamma_n}\big|\frac{\varphi(p)\,dp}{p}\big| \le 8\max\limits_{p\in\Gamma_n}|\varphi(p)|$ следует, что $\int\limits_{\Gamma_n}\big|\frac{\varphi(p)\,dp}{p}\big|\to 0$ при $n\to\infty$. Таким образом, $\psi=0$ и имеет место разложение (17).

Лемма доказана.

Теперь мы можем сформулировать условия, при выполнении которых уравнение (13) разрешимо в $L_2(0,T)$.

Лемма 2. *Для однозначной разрешимости уравнения* (13) *в пространстве* $L_2(0,T)$ *необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия* (A)–(C).

Доказательство. Как было показано выше, если решение уравнения (13) из пространства $L_2(0,T)$ существует, то оно имеет вид (14) и выполнены условия (A)–(C).

Докажем обратное. Из условия (C) следует, что ряд из формулы (14) сходится в $L_2(0,T)$. Подставляя эту функцию в интеграл из (13), получаем

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{-\lambda pt}\sum_{k=-\infty}^{\infty}G\Big(i\frac{2\pi k}{\lambda T}\Big)e^{i2\pi kt/T}\,dt = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}G\Big(i\frac{2\pi k}{\lambda T}\Big)\int_0^T e^{(-\lambda p+i\frac{2\pi k}{T})t}\,dt$$
$$= (1-e^{-\lambda pT})\sum_{k=-\infty}^{\infty}G\Big(i\frac{2\pi k}{\lambda T}\Big)\frac{1}{\lambda Tp-i2\pi k}.$$

Таким образом, нужно установить следующее равенство

$$\frac{G(p)}{1-e^{-\lambda Tp}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}G\Big(i\frac{2\pi k}{\lambda T}\Big)\frac{1}{\lambda Tp-i2\pi k}, \qquad p\in\mathbb{C},\quad p\neq\frac{i2\pi k}{\lambda T}. \tag{18}$$

Во-первых, в силу условия (A) функция $G(p)$ допускает аналитическое продолжение до целой функции.

Далее, из условия (C) следует, что ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} G\Big(i\frac{2\pi k}{\lambda T}\Big)$ сходится абсолютно.

Пусть $\alpha_k = \frac{\pi(2k+1)}{|\lambda|T}$, $\Gamma_k^{\pm} = \{p: \ \mathrm{Re}\, p = \pm\alpha_k, \ |\mathrm{Im}\, p| \le \alpha_k\}$, $\gamma_k^{\pm} = \{p: \ |\mathrm{Re}\, p| \le \alpha_k, \ \mathrm{Im}\, p = \pm\alpha_k\}$, $\Gamma_k = \Gamma_k^+ \cup \Gamma_k^- \cup \gamma_k^+ \cup \gamma_k^-$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Из оценок

$$\left|\frac{G(p)}{1-e^{-\lambda T p}}\right| = \begin{cases} \left|\dfrac{G(\alpha_k + i\eta)}{1-e^{-\lambda T(\alpha_k+i\eta)}}\right| \le C_1 e^{\lambda T \alpha_k} |G(\alpha_k + i\eta)| \quad \text{для} \quad p \in \Gamma_k^+, \\[2ex] \left|\dfrac{G(-\alpha_k + i\eta)}{1-e^{-\lambda T(-\alpha_k+i\eta)}}\right| \le C_2 |G(-\alpha_k + i\eta)| \quad \text{для} \quad p \in \Gamma_k^-, \\[2ex] \left|\dfrac{G(\xi \pm i\alpha_k)}{1+e^{-\lambda T\xi}}\right| \le e^{\lambda T \xi} |G(\xi \pm i\alpha_k)| \quad \text{для} \quad p \in \gamma_k^{\pm}, \ \mathrm{Re}\, p = \xi \ge 0, \\[2ex] \left|\dfrac{G(\xi \pm i\alpha_k)}{1+e^{-\lambda T\xi}}\right| \le |G(\xi \pm i\alpha_k)| \quad \text{для} \quad p \in \gamma_k^{\pm}, \ \mathrm{Re}\, p = \xi \le 0 \end{cases}$$

и условия (B) получаем, что

$$\lim_{\substack{k \to \infty \\ p \in \Gamma_k}} \frac{G(p)}{1-e^{-\lambda T p}} = 0.$$

Итак, все условия леммы 1 выполнены. Значит, справедливо равенство (18) для $p \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{i2\pi k}{\lambda T}, k \in \mathbb{Z}\}$.

Лемма доказана.

Теперь можем доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $g(x,t,p) \in C(\overline{D}; L_2(0,T; H_{-1}))$ и $g(t,p)$ — аналитическая функция по переменной p на множестве D, допускающая продолжение до целой функции по переменной p, такой, что $g(t,ip) \in W_2^1(\mathbb{R}; L_2(0,T; H_{-2}))$ и для каждой из функций $G_n(p)$, $n \in \mathbb{N}$, которые определяются формулами* (12), *выполнены условия* (B), (C).

Тогда существует единственное решение $\{v,f\}$ обратной задачи P' такое, что $v \in C(\overline{D}; L_2(0,T; H_1))$, $v_t \in C(\overline{D}; L_2(0,T; H_{-1}))$, $f \in L_2(0,T; H_{-1})$.

Доказательство. Согласно вышесказанному вопрос о разрешимости рассматриваемой обратной задачи свелся к вопросу о разрешимости уравнений (11). Так как функция $g(t,p)$ — аналитическая по переменной p на множестве D и допускает аналитическое продолжение до целой функции, то, очевидно, что условие (A) для всех G_n выполнено. Кроме того, по условию для каждой из функций G_n, $n \in \mathbb{N}$, выполнены условия (B), (C). Следовательно, согласно лемме 2 решение уравнения (11) существует и имеет вид

$$f_n = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_n\Big(i\frac{2\pi k}{\lambda_n T}\Big) e^{i2\pi k t/T}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

Поскольку $W_2^1(a,b)$ непрерывно вложено в $C[a,b]$, то существует постоянная

C, не зависящая от n, такая, что

$$\|f_n\|^2_{L_2(0,T)} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big|G_n\Big(i\frac{2\pi k}{\lambda_n T}\Big)\Big|^2 = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big|\int_0^T e^{-i\frac{2\pi kt}{T}} g_n\Big(t, i\frac{2\pi k}{\lambda_n T}\Big)\,dt\Big|^2$$
$$\le \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_0^T \Big|g_n\Big(t, i\frac{2\pi k}{\lambda_n T}\Big)\Big|^2 dt \le \frac{C}{|\lambda_n|}\|g_n(t,ip)\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\mathbb{R}))}, \qquad n\in\mathbb{N}. \quad (20)$$

Следовательно,

$$\|f\|^2_{L_2(0,T;H_{-1})} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_n|}\|f_n\|^2_{L_2(0,T)} \le C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_n|^2}\|g_n(t,ip)\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\mathbb{R}))}$$
$$= C\Big\{\|g(x,t,ip)\|^2_{W_2^1(\mathbb{R};L_2(0,T;H_{-2}))}\Big\}.$$

Кроме того, нашлась функция $v = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(t,p)v_n$ с коэффициентами, определяемыми по формулам (10), (19). Оценим коэффициенты $c_n(t,p)$, используя неравенство Юнга и (20):

$$\max_{p\in\overline{D}}\|c_n(t,p)\|^2_{L_2(0,T)} \le 2\max_{p\in\overline{D}}\|e^{\lambda_n pt}*f_n\|^2_{L_2(0,T)} + 2\max_{p\in\overline{D}}\|e^{\lambda_n pt}*g_n\|^2_{L_2(0,T)}$$
$$\le C_1\Big\{\frac{1}{|\lambda_n|^2}\|f_n\|^2_{L_2(0,T)} + \frac{1}{|\lambda_n|^2}\max_{p\in\overline{D}}\|g_n\|^2_{L_2(0,T)}\Big\}$$
$$\le C_2\Big\{\frac{1}{|\lambda_n|^3}\|g_n(t,ip)\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\mathbb{R}))} + \frac{1}{|\lambda_n|^2}\max_{p\in\overline{D}}\|g_n(t,p)\|^2_{L_2(0,T)}\Big\},$$

где постоянные C_1, C_2 не зависят от n. Тогда

$$\max_{p\in\overline{D}}\|v\|^2_{L_2(0,T);H_1)} = \max_{p\in\overline{D}}\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|\|c_n\|^2_{L_2(0,T)}$$
$$\le C_2\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_n|^2}\|g_n(t,ip)\|^2_{L_2(0,T;W_2^1(\mathbb{R}))} + \max_{p\in\overline{D}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_n|}\|g_n(t,p)\|^2_{L_2(0,T)}\Big\}$$
$$= C_2\Big\{\|g(x,t,ip)\|^2_{W_2^1(\mathbb{R};L_2(0,T;H_{-2}))} + \max_{p\in\overline{D}}\|g(x,t,p)\|^2_{L_2(0,T;H_{-1})}\Big\}.$$

Аналогично можно показать, что

$$\max_{p\in\overline{D}}\|v_t\|^2_{L_2(0,T;H_{-1})} = \max_{p\in\overline{D}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_n|}\Big\|\frac{\partial c_n}{\partial t}\Big\|^2_{L_2((0,T)\times D)}$$
$$\le C_3\Big\{\|g(x,t,ip)\|^2_{W_2^1(\mathbb{R};L_2(0,T;H_{-2}))} + \max_{p\in\overline{D}}\|g(x,t,p)\|^2_{L_2(0,T;H_{-1})}\Big\}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аниконов Ю. Е.* Представления решений и обратные задачи для эволюционных и дифференциально-разностных уравнений. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2003. (Препринт № 108 / ИМ СО РАН).

2. *Anikonov Yu. E.* Inverse problems for evolution and differential-difference equations with a parameter // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2003. V. 11, N 5. P. 439–473.
3. *Abasheeva N. L.* Identification of a source in parabolic and hyperbolic equations with a parameter // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2007.
4. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
5. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. М.: Наука, 1968.

Абашеева Нина Леонидовна
Россия, Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
anl@math.nsc.ru