Неклассические уравнения
математической физики
2007. С. 15–23

УДК 517.939+533.7

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

А. Ш. Акыш

Рассматривается вопрос о разрешимости нелинейного уравнения Больцмана в целом по времени. На основе схемы метода расщепления показывается ограниченность положительных решений в пространстве непрерывных функций. С помощью ограниченности решения и полученных априорных оценок доказывается сходимость схемы метода расщепления и единственность предельного элемента. Найденный предельный элемент удовлетворяет эквивалентному интегральному уравнению Больцмана.

Современное состояние математической теории нелинейного уравнения Больцмана [1] содержится, например, в работах [2–5]. Авторы обзора ([5, с. 29]) писали: "... Вот уже свыше 110 лет это уравнение привлекает внимание исследователей, но лишь в последние годы была доказана *разрешимость в целом* пространственно-неоднородной задачи в случае малого отклонения состояние газа от положения равновесия — более общие результаты не получены и по сей день ..." Из работ последних лет, отметим [6].

1. Постановка задачи

Задача Коши для нелинейного уравнения Больцмана для молекул — твердых шаров радиуса χ — в области $Q = [0,T] \times G \times V_3$:

$$t \in [0,T], \quad T < \infty,$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in G \equiv \left\{\, 0 \le x_\alpha \le 1,\ \alpha = \overline{1,3}\,\right\},$$

$$\mathbf{v} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in V_3 \equiv \left\{ -\infty \le \xi_\alpha \le \infty,\ \alpha = \overline{1,3}\,\right\},$$

относительно функции распределения $f = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ запишется в виде уравнения [2]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{3} \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = \mathbf{B}(f,f), \tag{1}$$

с начальным

$$f(t,\mathbf{x},\mathbf{v})\,|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x},\mathbf{v}) \tag{2}$$

и периодическим граничным условиями

$$f(t,\mathbf{x},\mathbf{v})\big|_{\Gamma_{0x_\alpha}} = f(t,\mathbf{x},\mathbf{v})\big|_{\Gamma_{1x_\alpha}},\ \ \alpha = \overline{1,3}, \tag{3}$$

где

$$\mathbf{B}(f,f)=\mathbf{J}(f)-f\mathbf{S}(f),\quad \mathbf{J}(f)=\int\limits_{V_3}\int\limits_{\mathbf{\Sigma}} f(t,\mathbf{x},\mathbf{v}')f(t,\mathbf{x},\mathbf{v}_1')K(\theta,\mathbf{W})d\sigma d\mathbf{v}_1,$$

$$\mathbf{S}(f)=\int\limits_{V_3}\int\limits_{\mathbf{\Sigma}} f(t,\mathbf{x},\mathbf{v}_1)K(\theta,\mathbf{W})d\sigma d\mathbf{v}_1,\quad K(\theta,\mathbf{W})=0.25\chi^2\mid\mathbf{W}\mid\sin(2\theta),$$

$\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1$ — векторы скорости двух сталкивающихся молекул, $\mathbf{W}=\mathbf{v}-\mathbf{v}_1$ — вектор относительной скорости, скорости молекул после столкновений $\mathbf{v}'$, $\mathbf{v}_1'$ связаны с $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1$ посредством динамических соотношений $\mathbf{v}'=\mathbf{v}+\mathbf{g}(\mathbf{g},\mathbf{W})$, $\mathbf{v}_1'=\mathbf{v}_1-\mathbf{g}(\mathbf{g},\mathbf{W})$; $\mathbf{g}$ — единичный вектор в направлении рассеяния молекул: $\mathbf{g}=\big(\sin\theta\cos\varepsilon,\ \sin\theta\sin\varepsilon,\ \cos\theta\big)$; $(\theta,\varepsilon)\in\mathbf{\Sigma}\equiv\big\{0\le\theta\le\pi;\ 0\le\varepsilon\le 2\pi\big\}$, $\Gamma_{\rho x_\alpha}$ — грань куба G, перпендикулярная к оси x_α, проходящая через $x_\alpha=\rho$, ρ принимает значение либо 0, либо 1.

Начальная функция $\varphi(x,\mathbf{v})$ такова, что

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{v})>0\bigwedge\varphi(\mathbf{x},\mathbf{v})\in\mathbf{C}(G\times V_3), \tag{4a}$$

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{v})\big|_{\Gamma_{0x_\alpha}}=\varphi(\mathbf{x},\mathbf{v})\big|_{\Gamma_{1x_\alpha}},\quad \alpha=\overline{1,3}, \tag{4b}$$

$$\int\limits_{V_3}\mid\mathbf{v}\mid^\gamma\|\varphi(\mathbf{v})\|d\mathbf{v}=A_\gamma<\infty,\quad \gamma=\overline{0,2}, \tag{4c}$$

где $\|\varphi(\mathbf{v})\|=\sup\limits_{\mathbf{x}\in G}\varphi(\mathbf{x},\mathbf{v})$ при каждом $\mathbf{v}\in V_3$.

2. Метод расщепления

Для решения задачи (1)–(3) используем метод расщепления. Некоторые вопросы метода расщепления применительно к нелинейным уравнениям Больцмана обсуждаются в работе [7].

Отрезок $[0,T]$ разделим на M равных частей длины τ точками $t_n=n\tau$, $n=\overline{0,M-1}$. Предположим, что известно приближение $f^n(\mathbf{x},\mathbf{v})$ в момент времени $n\tau$. Тогда схемы метода расщепления, соответствующие задаче (1)-(3), записываются в следующем виде

$$\frac{f^{n+1/5}-f^n}{\tau}=-f^{n+1/5}\mathbf{S}(f^{n+1/5}), \tag{5}$$

$$\frac{f^{n+2/5}-f^{n+1/5}}{\tau}=\mathbf{J}(f^{n+1/5}), \tag{6}$$

с начальным

$$f^0(\mathbf{x},\mathbf{v})=\varphi(\mathbf{x},\mathbf{v}), \tag{7}$$

и

$$\frac{f^{n+(\alpha+2)/5}-f^{n+(\alpha+1)/5}}{\tau}+\xi_\alpha\frac{\partial f^{n+(\alpha+2)/5}}{\partial x_\alpha}=0,\ \alpha=\overline{1,3}, \tag{8}$$

с граничным условиями

$$f^{n+(\alpha+2)/5}\big|_{\Gamma_{0x_\alpha}}=f^{n+(\alpha+2)/5}\big|_{\Gamma_{1x_\alpha}},\ \alpha=\overline{1,3}. \tag{9}$$

Нетрудно убедиться, что на решениях из пространства $C^{(2)}\big(0,T\big]\bigcap C^{(3)}\big(G\big)$ уравнения (5), (6), (8) аппроксимируют на целом шаге по времени с первым

порядком аппроксимации по τ следующее соответствующее (1) разностно-дифференциальное уравнение Больцмана

$$\frac{f^{n+1}-f^n}{\tau}+\sum_{\alpha=1}^{3}\xi_\alpha\,\frac{\partial f^{n+1}}{\partial x_\alpha}=\mathbf{B}(f^n,f^n).$$

Пусть известное приближение $f^n(\mathbf{x},\mathbf{v})$ обладает всеми свойствами (4) начальной функции. Множество функции свойствами f^n обозначим через $\mathbf{I}$.

Из нелинейного уравнения (5) решение $f^{n+1/5}$ явно через функцию f^n не определяется. Поэтому для решения задачи (5), (7) на каждом фиксированном дробном шаге используем итерационный процесс

$$f^{n+1/5}_{(m+1)}=\frac{f^n}{1+\tau\mathbf{S}(f^{n+1/5}_{(m)})},\tag{10}$$

с начальным приближением

$$f^{n+1/5}_{(0)}(\mathbf{x},\mathbf{v})=f^n(\mathbf{x},\mathbf{v}).\tag{11}$$

Заметим, что элементы последовательности $\{f^{n+1/5}_{(m)}\}$ положительны и равномерно ограничены сверху функцией f^n, т. е.

$$0<f^{n+1/5}_{(m)}(\mathbf{x},\mathbf{v})\le f^n(\mathbf{x},\mathbf{v}).\tag{12}$$

Нетрудно проверить, что нелинейный оператор $f^n\left[1+\tau\mathbf{S}(f^{n+1/5}_{(m)})\right]^{-1}$ является положительным и монотонным [8]. Следовательно, итерационный процесс (10), (11) сходится к некоторому положительному пределу $f^{n+1/5}_{(*)}$.

Далее, чтобы не загромождать запись, всегда будем подразумевать, что функция $f^{n+1/5}$ с дробным показателем $n+1/5$ в уравнениях (5), (6) заменена на предельный элемент $f^{n+1/5}_{(*)}$ и опускать нижний значок $(*)$. Тогда уравнение (10) запишем в виде

$$f^{n+1/5}=\frac{f^n}{1+\tau\mathbf{S}(f^{n+1/5})}.\tag{13}$$

Лемма 1. *Если* $f^n\in\mathbf{I}$, *то* $f^{n+1/5}$, $f^{n+2/5}\in\mathbf{I}$.

Доказательство. Свойства (4a), (4b) функции $f^{n+1/5}$ вытекают из соответствующих свойств известного приближения f^n. Для доказательства (4c) из функционального уравнения (13), пользуясь положительностью f^n, $f^{n+1/5}$ и функционала $\mathbf{S}(f^{n+1/5})$, получаем

$$f^{n+1/5}(\mathbf{x},\mathbf{v})\le f^n(\mathbf{x},\mathbf{v})\quad\text{или}\quad\|f^{n+1/5}(\mathbf{v})\|\le\|f^n(\mathbf{v})\|,\quad\forall\mathbf{v}\in V_3.$$

Интегрируя последнее по области V_3, имеем

$$\int\limits_{V_3}|\,\mathbf{v}\,|^\gamma\,\|\,f^{n+1/5}(\mathbf{v})\,\|\,d\mathbf{v}\le\int\limits_{V_3}|\,\mathbf{v}\,|^\gamma\,\|\,f^{n}(\mathbf{v})\,\|\,d\mathbf{v},\quad\gamma=\overline{0,2}.\tag{14}$$

Итак, доказана первая часть леммы 1.

Перепишем уравнение (6)

$$f^{n+2/5}=f^{n+1/5}+\tau\mathbf{J}(f^{n+1/5}).\tag{15}$$

Отсюда следуют свойства (4a), (4b) функции $f^{n+2/5}$ с учетом структуры функционала $\mathbf{J}(f^{n+1/5})$ и соответствующих свойств функции $f^{n+1/5}$.

Складывая (5) и (6), имеем

$$f^{n+2/5} = f^n + \tau\mathbf{B}(f^{n+1/5}, f^{n+1/5}).$$

Так как функция $f^{n+2/5}$ обладает свойствами (4a), (4b) и определяется через известные функции $f^n, f^{n+1/5}$, то она может достигать наибольшего локального максимума в некоторых точках $\mathbf{x_v} \in G$ при каждом $\mathbf{v} \in V_3$, т. е.

$$\|f^{n+2/5}(\mathbf{v})\| = f^n(\mathbf{x_v}, \mathbf{v}) + \tau\mathbf{B}\Big(f^{n+1/5}(\mathbf{x_v}, \mathbf{v}), f^{n+1/5}(\mathbf{x_v}, \mathbf{v})\Big).$$

Отсюда, пользуясь тем, что функции $f^n, f^{n+1/5}$ удовлетворяют условию (4c) и свойством интеграла столкновений, найдем

$$\int\limits_{V_3} |\ \mathbf{v}\ |^\gamma \parallel f^{n+2/5}(\mathbf{v}) \parallel d\mathbf{v} \leq \int\limits_{V_3} |\ \mathbf{v}\ |^\gamma \parallel f^n(\mathbf{v}) \parallel d\mathbf{v}, \quad \gamma = 0, 2. \qquad (16)$$

Из этих оценок следует, что

$$\int\limits_{V_3} |\ \mathbf{v}\ | \parallel f^{n+2/5}(\mathbf{v}) \parallel d\mathbf{v} \leq \int\limits_{V_3} (1+ |\ \mathbf{v}\ |^2) \parallel f^n(\mathbf{v}) \parallel d\mathbf{v}. \qquad (17)$$

Лемма 1 доказана.

Задача (8), (9) имеет единственное положительное решение, которое задается с помощью следующих формул

$$f^{n+(\alpha+2)/5}(., x_\alpha, ., \mathbf{v}) = \beta\gamma(x_\alpha, 0) \int\limits_0^1 \exp[-a_\alpha(1 - s_\alpha)] f^{n+(\alpha+1)/5}(., s_\alpha, ., \mathbf{v}) ds_\alpha$$
$$+ \int\limits_0^{x_\alpha} \gamma(x_\alpha, s_\alpha) f^{n+(\alpha+1)/5}(., s_\alpha, ., \mathbf{v}) ds_\alpha, \ \ \alpha = \overline{1,3};\ \ \xi_\alpha > 0\,, \qquad (18)$$

$$f^{n+(\alpha+2)/5}(., x_\alpha, ., \mathbf{v}) = \beta\gamma(1, x_\alpha) \int\limits_0^1 \exp[-a_\alpha s_\alpha] f^{n+(\alpha+1)/5}(., s_\alpha, ., \mathbf{v}) ds_\alpha$$
$$+ \int\limits_0^{x_\alpha} \gamma(x_\alpha, s_\alpha) f^{n+(\alpha+1)/5}(., s_\alpha, ., \mathbf{v}) ds_\alpha, \ \ \alpha = \overline{1,3};\ \ \xi_\alpha < 0\,, \qquad (19)$$

$$f^{n+(\alpha+2)/5}(., x_\alpha, ., \mathbf{v}) = f^{n+(\alpha+1)/5}(., x_\alpha, ., \mathbf{v}) \quad \alpha = \overline{1,3}; \quad \xi_\alpha = 0, \qquad (20)$$

где

$$a_\alpha = |\ \tau\xi_\alpha\ |^{-1},\ \gamma(y,z) = a_\alpha \exp[-a_\alpha(y - z)],\ \beta = [1 - \exp(-a_\alpha)]^{-1}.$$

Из (18)–(20) следует, что $f^{n+(\alpha+2)/5}(., x_\alpha, ., \mathbf{v}) > 0$, $\alpha = \overline{1,3}$ в $G \times V_3$ и является периодической функцией по x_α, так как $f^{n+2/5}(., x_\alpha, ., \mathbf{v})$ положительной и периодической по $x_\alpha, \alpha = \overline{1,3}$. Тем самым свойства (4a), (4b) функции $f^{n+(\alpha+2)/5}, \alpha = \overline{1,3}$ показаны.

Лемма 2. *Для решений задач* (8)–(9) *имеют место оценки:*

$$\|f^{n+(\alpha+2)/5}(\mathbf{v})\| \le \|f^{n+(\alpha+1)/5}(\mathbf{v})\|, \quad \alpha=\overline{1,3},\ \forall \mathbf{v}\in V_3, \tag{21}$$

$$\int\limits_{V_3} |\,\mathbf{v}\,|^{\gamma}\ \|f^{n+(\alpha+2)/5}(\mathbf{v})\| d\mathbf{v} \le \int\limits_{V_3} |\,\mathbf{v}\,|^{\gamma}\ \|f^{n+(\alpha+1)/5}(\mathbf{v})\| d\mathbf{v},\ \gamma=\overline{0,2},\ \alpha=\overline{1,3}. \tag{22}$$

Доказательство. Рассмотрим решение (18) задачи (8)–(9) при $\xi_\alpha>0$. Откуда с учетом положительности решения, переходя к неравенству, получим

$$f^{n+(\alpha+2)/5}(.,x_\alpha,.,\mathbf{v}) \le \|f^{n+(\alpha+1)/5}(\mathbf{v})\| \\ \times\left(\beta\gamma(x_\alpha,0)\int\limits_0^1 \exp[-a_\alpha^{(k)}(1-s_\alpha)]ds_\alpha + \int\limits_0^{x_\alpha}\gamma(x_\alpha,s_\alpha)ds_\alpha\right),\ \ \alpha=\overline{1,3},\ \ \xi_\alpha>0\,.$$

Вычислив интегралы, находим

$$\beta\gamma(x_\alpha,0)\int\limits_0^1 \exp[-a_\alpha^{(k)}(1-s_\alpha)]ds_\alpha = \exp(-a_\alpha^{(k)}x_\alpha),$$

$$\int\limits_0^{x_\alpha}\gamma(x_\alpha,s_\alpha)ds_\alpha = 1-\exp(-a_\alpha^{(k)}x_\alpha).$$

Подставляя найденные значения интегралов в предыдущее неравенство, получим доказательство первой части леммы 2 при $\xi_\alpha>0$, т. е. оценка (21). Таким же образом доказываются остальные случаи.

Интегрируя неравенство (21) по области V_3, получим оценку (22), что доказывает свойство (4c). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если начальная функция удовлетворяет условию* (4c), *то для решений задач* (5)–(9) *справедливы оценки*

$$\int\limits_{V_3} |\,\mathbf{v}\,|^{\gamma}\ \ \|f^{n+1}(\mathbf{v})\| d\mathbf{v} \le \cdots \\ \le \int\limits_{V_3} |\,\mathbf{v}\,|^{\gamma}\ \ \|f^{n+2/5}(\mathbf{v})\| d\mathbf{v} \le \int\limits_{V_3} |\,\mathbf{v}\,|^{\gamma}\ \ \|\varphi(\mathbf{v})\| d\mathbf{v} \equiv A_\gamma, \quad \gamma=0,2; \tag{23}$$

$$\int\limits_{V_3} |\,\mathbf{v}\,|\ \|f^{n+1}(\mathbf{v})\| d\mathbf{v} \le \cdots \\ \le \int\limits_{V_3} |\,\mathbf{v}\,|\ \|f^{n+2/5}(\mathbf{v})\| d\mathbf{v} \le \int\limits_{V_3} (1+|\,\mathbf{v}\,|^2)\|\varphi(\mathbf{v})\| d\mathbf{v} \equiv A_1; \tag{24}$$

$$\int\limits_{V_3} |\,\mathbf{v}\,|^{\gamma}\ \ \|f^{n+1/5}(\mathbf{v})\| d\mathbf{v} \le A_\gamma,\ \gamma=0,2; \qquad \int\limits_{V_3} |\,\mathbf{v}\,|\ \ \|f^{n+1/5}(\mathbf{v})\| d\mathbf{v} \le A_1. \tag{25}$$

Доказательство. Из оценок (16), (22) выводится цепь неравенств

$$\int\limits_{V_3} |\,\mathbf{v}\,|^{\gamma} \parallel f^{n+1}(\mathbf{v}) \parallel d\mathbf{v} \le \int\limits_{V_3} |\,\mathbf{v}\,|^{\gamma} \parallel f^{n+4/5}(\mathbf{v}) \parallel d\mathbf{v} \le \int\limits_{V_3} |\,\mathbf{v}\,|^{\gamma} \parallel f^{n+3/5}(\mathbf{v}) \parallel d\mathbf{v}$$
$$\le \int\limits_{V_3} |\,\mathbf{v}\,|^{\gamma} \parallel f^{n+2/5}(\mathbf{v}) \parallel d\mathbf{v} \le \int\limits_{V_3} |\,\mathbf{v}\,|^{\gamma} \parallel f^{n}(\mathbf{v}) \parallel d\mathbf{v},$$

$\gamma = 0, 2$. Откуда, суммируя по n, приходим к доказательству (23). Из которого следует (24), а из них и (14) найдем (25). Лемма 3 доказана.

Далее, используя преобразование Карлемана интеграла столкновений из [2, с. 33], уравнение (15) запишем в виде

$$f^{n+2/5} = f^{n+1/5} + \tau \mathbf{J}(f^{n+1/5})$$
$$\equiv f^{n+1/5} + 2\tau \int\limits_{V_3} \frac{f^{n+1/5}(\mathbf{x},\mathbf{v})}{\rho_{\mathbf{v}'\mathbf{v}}} \int\limits_{E_{\mathbf{v}'\mathbf{v}}} f^{n+1/5}(\mathbf{x},\mathbf{q}) d\mathbf{q} d\mathbf{v}, \quad (26)$$

где $E_{\mathbf{v}'\mathbf{v}}$ — бесконечная плоскость, $d\mathbf{q}$ — элемент площади на $E_{\mathbf{v}'\mathbf{v}}$,

$$\rho_{\mathbf{v}'\mathbf{v}} = \sqrt{(\xi_1' - \xi_1)^2 + (\xi_2' - \xi_2)^2 + (\xi_3' - \xi_3)^2} - \text{ расстояние между } \ \mathbf{v}' \text{ и } \mathbf{v}.$$

Будем пользоваться неравенствами Карлемана, которые в нашем случае запишутся в следующем виде

$$\int\limits_{E_{\mathbf{v}'\mathbf{v}}} \mathbf{J}(f^{n+1/5}) d\mathbf{q} \le \pi \int\limits_{V_3 \times V_3} f^{n+1/5}(\mathbf{x},\mathbf{v}) f^{n+1/5}(\mathbf{x},\mathbf{v}_1) d\mathbf{v} d\mathbf{v}_1, \ \forall \mathbf{x} \in G; \quad (27)$$

$$\int\limits_{V_3} \frac{1}{\rho_{\mathbf{v}'\mathbf{v}}} \mathbf{J}(f^{n+1/5}) d\mathbf{v} \le 4\pi \int\limits_{V_3 \times V_3} f^{n+1/5}(\mathbf{x},\mathbf{v}) f^{n+1/5}(\mathbf{x},\mathbf{v}_1) d\mathbf{v} d\mathbf{v}_1, \ \forall \mathbf{x} \in G. \quad (28)$$

Из уравнения (6) с помощью оценок (14), (25) и предыдущих неравенств получим

$$\int\limits_{V_3} \frac{1}{\rho_{\mathbf{v}'\mathbf{v}}} \parallel f^{n+2/5}(\mathbf{v}) \parallel d\mathbf{v} \le \int\limits_{V_3} \frac{1}{\rho_{\mathbf{v}'\mathbf{v}}} \parallel f^{n}(\mathbf{v}) \parallel d\mathbf{v} + 4\pi\tau A_0^2,$$
$$\int\limits_{E_{\mathbf{v}'\mathbf{v}}} \parallel f^{n+2/5}(\mathbf{q}) \parallel d\mathbf{q} \le \int\limits_{E_{\mathbf{v}'\mathbf{v}}} \parallel f^{n}(\mathbf{q}) \parallel d\mathbf{q} + \tau\pi A_0^2.$$

Тогда, объединяя последние с оценкой (21), имеем цепь неравенств

$$\int\limits_{V_3} \frac{1}{\rho_{\mathbf{v}'\mathbf{v}}} \parallel f^{n+1}(\mathbf{v}) \parallel d\mathbf{v} \le \int\limits_{V_3} \frac{1}{\rho_{\mathbf{v}'\mathbf{v}}} \parallel f^{n+4/5}(\mathbf{v}) \parallel d\mathbf{v} \le \int\limits_{V_3} \frac{1}{\rho_{\mathbf{v}'\mathbf{v}}} \parallel f^{n+3/5}(\mathbf{v}) \parallel d\mathbf{v}$$
$$\le \int\limits_{V_3} \frac{1}{\rho_{\mathbf{v}'\mathbf{v}}} \parallel f^{n+2/5}(\mathbf{v}) \parallel d\mathbf{v} \le \int\limits_{V_3} \frac{1}{\rho_{\mathbf{v}'\mathbf{v}}} \parallel f^{n}(\mathbf{v}) \parallel d\mathbf{v} + 4\pi\tau A_0^2,$$

$$\int\limits_{E_{\mathbf{v}'\mathbf{v}}} \parallel f^{n+1}(\mathbf{q}) \parallel d\mathbf{q} \le \int\limits_{E_{\mathbf{v}'\mathbf{v}}} \parallel f^{n+4/5}(\mathbf{q}) \parallel d\mathbf{q} \le \int\limits_{E_{\mathbf{v}'\mathbf{v}}} \parallel f^{n+3/5}(\mathbf{q}) \parallel d\mathbf{q}$$
$$\le \int\limits_{E_{\mathbf{v}'\mathbf{v}}} \parallel f^{n+2/5}(\mathbf{q}) \parallel d\mathbf{q} \le \int\limits_{E_{\mathbf{v}'\mathbf{v}}} \parallel f^{n}(\mathbf{q}) \parallel d\mathbf{q} + \pi\tau A_0^2.$$

Суммируя по n каждую цепочку, найдем

$$\int\limits_{V_3} \frac{1}{\rho_{\mathbf{v}'\mathbf{v}}} \parallel f^{n+1}(\mathbf{v}) \parallel d\mathbf{v} \le \int\limits_{V_3} \frac{1}{\rho_{\mathbf{v}'\mathbf{v}}} \parallel \varphi(\mathbf{v}) \parallel d\mathbf{v} + 4\pi T A_0^2 = A_3, \tag{29}$$

$$\int\limits_{E_{\mathbf{v}'\mathbf{v}}} \parallel f^{n+1}(\mathbf{q}) \parallel d\mathbf{q} \le \int\limits_{E_{\mathbf{v}'\mathbf{v}}} \parallel \varphi(\mathbf{q}) \parallel d\mathbf{q} + \pi T A_0^2 = A_4. \tag{30}$$

Из уравнения (26) с учетом (12), (21) и последних неравенств находим оценки

$$||\mathbf{J}(f^{n+1/5})|| \le ||\mathbf{J}(f^n)|| \le A_5, \tag{31}$$

$$f^{n+1}(\mathbf{x},\mathbf{v}) \le f^n(\mathbf{x},\mathbf{v}) + \tau A_5, \quad \text{где} \quad A_5 = 2A_3A_4. \tag{32}$$

Просуммировав неравенство (32) по n и производя оценку по максимум норме, окончательно запишем

$$\parallel f^{n+1}(\mathbf{x},\mathbf{v}) \parallel_{\mathbf{C}(G\times V_3)} = \parallel \varphi(\mathbf{x},\mathbf{v}) \parallel_{\mathbf{C}(G\times V_3)} + TA_5. \tag{33}$$

Обозначим совокупность найденных приближенных решений задач (5), (6), (7) и (8), (9) через $\{f^\tau\}$, а проинтерполированных значений на отрезке $[0,T]$ через $\{\tilde{f}^\tau\}$.

В скоростном пространстве V_3 введем шар V_R с центром в начале координат достаточно большим радиусом $R<\infty$, вследствие чего получим конечную замкнутую область $Q_R=[0,T]\times G\times V_R$. Ясно, что функция $\tilde{f}^\tau$ удовлетворяет оценке

$$\int\limits_{V_3} \mid \mathbf{v} \mid^\gamma \|\tilde{f}^\tau(\mathbf{v})\| d\mathbf{v} \le A_\gamma < \infty, \quad \gamma = 0, 2.$$

Отсюда получим ее порядок роста

$$\|\tilde{f}^\tau(\mathbf{v})\| \approx \frac{A_2}{1+|\mathbf{v}|^\lambda}, \quad \lambda > 3. \tag{34}$$

Отметим оценки

$$\|f\mathbf{S}(f)\|_{\mathbf{C}(G\times V_3)} \le \|f\|_{\mathbf{C}(G\times V_3)} \|\mathbf{S}(f)\|_{\mathbf{C}(G\times V_3)} \le A_6, \quad \mathbf{S}(f) > A_7 > 0, \tag{35}$$

где $A_6 = 2\pi A_1A_2$, A_7 — постоянная, зависящая только от начального значения $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{v})$. Подобные неравенства имеются в [2].

Из того что все оценки установлены в области Q и оценки (34) следует возможность увеличить радиус шара R сколь угодно большим. Тогда из оценок (29)–(31), (33)–(35) получим компактность функции $\tilde{f}^\tau$ в пространстве $\mathbf{C}(Q)$. А в силу компактности имеют место следующие предельные переходы при $\tau \to 0:$

$$\tilde{f}^\tau \to f, \quad \mathbf{J}(\tilde{f}^\tau) \to \mathbf{J}(f), \quad \tilde{f}^\tau\mathbf{S}(\tilde{f}^\tau) \to f\mathbf{S}(f) \quad \tilde{f}^\tau(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) \mid_{t=0} \to \varphi(\mathbf{x},\mathbf{v}),$$

$$\tilde{f}^\tau(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) \mid_{\Gamma_{0x_\alpha}} = \tilde{f}^\tau(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) \mid_{\Gamma_{1\mathbf{x}_\alpha}} \to f(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) \mid_{\Gamma_{0x_\alpha}} = f(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) \mid_{\Gamma_{1x_\alpha}} \quad \alpha = \overline{1,3}.$$

3. Единственность решения

Предположим, что имеются два решения $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ и $F(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ задачи (1)−(3). Выпишем уравнения для их разности $U = f - F$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (\mathbf{v}, \operatorname{grad} U) = \mathbf{B}(f, f) - \mathbf{B}(F, F),$$

в области $Q = [0, T] \times G \times V_3$ с нулевым начальным $U\mid_{t=0} = 0$ и периодическим граничным условием

$$U(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})\Big|_{\Gamma_{0x_\alpha}} = U(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})\Big|_{\Gamma_{1x_\alpha}}, \ \alpha = \overline{1, 3}. \tag{36}$$

Благодаря тому, что $U \in \mathbf{C}(Q)$, установлено соотношение

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V_3} ||U(t, \mathbf{v})|| d\mathbf{v} = 0, \quad \text{что} \quad \text{и} \quad \text{равносильно} \quad U(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \equiv 0$$

Задаче (1)–(3) соответствует эквивалентное интегральное уравнение [9]

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{v}t, \mathbf{v}) \exp\Big\{ - \int\limits_0^t \mathbf{S}\big(f(s, \mathbf{x} - \mathbf{v}(t-s), \mathbf{v})\big) ds \Big\}$$
$$+ \int\limits_0^t \mathbf{J}\big(f(t', \mathbf{x} - \mathbf{v}(t-t'), \mathbf{v})\big) \exp\Big\{ - \int\limits_{t'}^t \mathbf{S}\big(f(s, \mathbf{x} - \mathbf{v}(t-s), \mathbf{v})\big) ds \Big\} dt'. \tag{37}$$

Определение. Назовем *слабым решением* задачи (1)–(3) положительную функцию $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ непрерывную по совокупности переменных удовлетворяющую интегральному уравнению (37).

В силу единственности решения задачи (1)−(3) и оценок (31), (35) найденный предельный элемент методом расщепления удовлетворяет интегральному уравнению (37). Итак, доказана

Теорема (см. [7]). *Если начальная функция $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ удовлетворяет условиям (4), то существует единственное слабое решение (в смысле определения 1) задачи (1)–(3) на интервале времени $[0, T]$ $\forall T < \infty$ и оно принадлежит $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbf{C}(Q)$.*

Следствие. H-*функция Больцмана относительно $\|f(t, \mathbf{v})\|$ имеет вид*

$$H(t) = \int\limits_{V_3} \|f(t, \mathbf{v})\| \ln \|f(t, \mathbf{v})\| d\mathbf{v},$$

и функция $\|f(t, \mathbf{v})\|$ при $t \to \infty$ стремится к функции Максвелла $\|f(\mathbf{v})\| = Ce^{-\alpha \mathbf{v}^2}$, где C и α — постоянные, определяемые с помощью следующих соотношений

$$\int\limits_{V_3} |\mathbf{v}|^\gamma \|f(t, \mathbf{v})\| d\mathbf{v} = \int\limits_{V_3} |\mathbf{v}|^\gamma \varphi(\mathbf{x}_\mathbf{v}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad \gamma = 0, 2, \quad t \to \infty,$$

где $\mathbf{x}_\mathbf{v}$ — точки локальных максимумов функции $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ при $t \to \infty$ и каждом $\mathbf{v} \in V_3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Больцман Л.* Лекции по теории газов. М.: Изд-во тех.-теор. лит., 1956.
2. *Карлеман Т.* Математические задачи кинетической теории газов. М.: ИЛ, 1960.
3. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
4. *Zwifel P. F.* The Boltzmann equation and its properties // Lecture Notes in Mathematics. 1984. V. 1048. P. 111–175.
5. Неравновесные явления: Уравнения Больцмана: Пер. с англ. / Под ред. Дж. Л. Либовица, Е. У. Монтролла. М.: Мир, 1986.
6. *DiPerna R. J., Lions P. L.* Solutions globales de I'equation de Boltzmann // C. R. Acad. Sci. Paris, 1988. V. 306, serie I. P. 343–346.
7. *Акыш А. Ш.* О нелинейном уравнении Больцмана // Мат. журн. Алматы, 2002. Т. 2, № 1. С. 10–16.
8. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
9. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967.

Акыш Абдигали Шойынбаевич
Казахстан, Алматы, Институт математики МОН РК
akysh_abdigali@mail.ru