*Неклассические уравнения математической физики*
*2007. С. 24–35*

УДК 517.956+517.968.2

# О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОСОБОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВОЛЬТЕРРА

**М. М. Амангалиева, А. Е. Туймебаева**

Рассматриваются спектральные свойства особого интегрального оператора типа Вольтерра второго рода и его сопряженного. Показано, что исследуемый оператор является нётеровым, и его индекс равен 1.

В п. 1 даются постановки исследуемых спектральных задач для особых интегральных операторов типа Вольтерра второго рода. Необходимы вспомогательные утверждения установлены в п. 2 (лемма, утверждения 1–3, предложения 1, 2). Основные результаты работы сформулированы в п. 3 (теоремы 1–3).

## 1. Постановка задач

На вещественной полуоси $\mathbb{R}_+ \equiv (0, +\infty)$ рассматриваются вопросы описания множества характеристических чисел для интегрального оператора, представленного соотношением

$$(I - \lambda \mathbf{K})\mu \equiv \mu(t) - \lambda \int\limits_0^\infty k\left(\frac{\tau}{t}\right)\mu(\tau)\cdot\frac{d\tau}{\tau} = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

и его сопряженного

$$(I - \overline{\lambda}\mathbf{K}^*)\nu \equiv \nu(t) - \overline{\lambda} \int\limits_0^\infty k\left(\frac{t}{\tau}\right)\nu(\tau)\cdot\frac{d\tau}{t} = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где ядро $k(z)$ определено формулой

$$k(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}(1-z)^{3/2}}\exp\left\{-\dfrac{1}{4(1-z)}\right\}, & 0 < z < 1, \\ 0, & 1 \le z < +\infty. \end{cases} \tag{3}$$

Считаем, что операторы $\mathbf{K}$ (1) и $\mathbf{K}^*$ (2) действуют соответственно в классах

$$e^{-t}\mu(t) \in L_1(\mathbb{R}_+), \ \ e^t\nu(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+). \tag{4}$$

Заметим, что в (1) и (2) ядро интегрального оператора $k(z)$ обладает следующими свойствами:

$1^\circ$. для каждого $z_0 \geq \varepsilon > 0$ $\lim\limits_{z \to +z_0} \int\limits_{z_0}^{z} k(z)dz = 0$;

$2^\circ$. норма интегрального оператора, определяемого ядром $k(z)$ и действующего в пространстве суммируемых функций, равна $\operatorname{erfc}(1/2) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{1/2}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \neq 0$.

Свойство $2^\circ$ определяет особенность рассматриваемого интегрального оператора (1). Отметим, что необходимость исследования особых интегральных операторов вида (1) возникает, например, при изучении некоторых нелокальных внутренне-граничных задач для параболического уравнения [1], спектрально-нагруженных параболических уравнений [2–4], задач с подвижной границей [5], обратных задач для параболических уравнений и т. д.

## 2. Вспомогательные утверждения

Переходим к установления ряда вспомогательных утверждений. Применяя к равенству (1) преобразование Меллина [6, с. 161], с учетом теоремы о свертке получим

$$\widehat{\mu}(s) \cdot [1 - \lambda \widehat{k}(s)] = 0, \quad s = s_1 + is_2,$$

где

$$\widehat{\mu}(s) = \int\limits_{0}^{\infty} \mu(\tau) \tau^{s-1} d\tau, \quad \operatorname{Re} s < 1,$$

— изображение функции $\mu(t)$, а изображение ядра имеет вид

$$\widehat{k}(s) = \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{2\sqrt{\pi}(1-z)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4(1-z)}\right) z^{-s-1} dx, \quad \operatorname{Re} s < 0. \tag{5}$$

Известно [7], что наличие и вид собственных функций интегрального оператора (1) определяются наличием и количеством корней следующего трансцендентного уравнения относительно комплексного параметра $s$

$$1 - \lambda \widehat{k}(s) = 0, \quad \operatorname{Re}\, s < 0 \ \ (s = s_1 + is_2). \tag{6}$$

Общее решение однородного интегрального уравнения (1) представляет собой линейную комбинацию собственных функций этого уравнения.

Изучим вопрос о наличии корней уравнения (6).

Для этого сначала введем другое, отличающееся от (5), представление изображения $\hat{k}(s)$ ядра интегрального оператора из (1). Воспользуемся производящей функцией для многочленов Лагерра, а именно, равенством [8, с. 190]

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x) z^n = (1-z)^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{xz}{z-1}\right), \quad |z| < 1, \tag{7}$$

здесь $L_n^{1/2}(x)$ — многочлены Лагерра порядка $n$. Если теперь в (7) положить $\alpha = 1/2$, $x = 1/4$, то получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{1/2}(1/4) z^n = \exp(1/4) \frac{1}{(1-z)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4(1-z)}\right), \quad |z| < 1.$$

Таким образом, используя предыдущее соотношение и (5), для изображения $\widehat{k}(s)$ получим следующее представление

$$\widehat{k}(s) = \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n-s}, \quad \operatorname{Re} s < 0, \tag{8}$$

где для краткости обозначено

$$L_n = L_n^{1/2}(1/4).$$

Отметим, что ряд, стоящий в правой части равенства (8), сходится для любого фиксированного значения $s$, когда $\operatorname{Re} s < 0$. Это следует из интегрального представления функции $\widehat{k}(s)$ (5).

Используя формулу суммы ряда по многочленам Лагерра [8, с. 213]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{\alpha}(x)}{n+1} = e^x x^{-\alpha} \Gamma(\alpha, x), \quad \alpha > -1, \; x > 0,$$

где $\Gamma(\alpha, x)$ — неполная гамма-функция, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n+1} = 2\sqrt{\pi} \exp(1/4) \cdot \operatorname{erfc}(1/2).$$

Откуда, в частности, имеем $\widehat{k}(-1) = \operatorname{erfc}(1/2)$, которое можно получить непосредственно и из (5). Действительно, имеем

$$\widehat{k}(-1) = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,(1-z)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4\,(1-z)}\right) dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{1/2}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \operatorname{erfc}(1/2),$$

$\xi = \dfrac{1}{2\sqrt{1-z}}$, $d\xi = \dfrac{dz}{4(1-z)^{3/2}}$.

То есть уравнение (6) при $\lambda = (\operatorname{erfc}(1/2))^{-1}$ имеет корень $s = -1$, а это означает, что интегральное уравнение (1) при указанном значении $\lambda$ имеет собственную функцию вида $\mu(t) = t$.

Далее, из интегрального представления функции $\widehat{k}(s)$ (5) непосредственно следует справедливость следующего утверждения.

**Утверждение 1.** *Если $s$ — действительное число и $s < 0$, то функция $\widehat{k}(s)$ неотрицательна и монотонно возрастает при $s \in (-\infty, 0)$. Поэтому для действительных значений $s \in (-\infty, 0)$*

$$S(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n-s} > 0$$

*и справедливы соотношения* $\lim\limits_{s \to -\infty} S(s) = 0+$, $\lim\limits_{s \to 0-} S(s) = +\infty$.

Для последующего изучения перепишем уравнение (6) в виде

$$1 = \lambda \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n-s}$$

и, считая, что $\lambda \neq 0$, преобразуем его к виду

$$\frac{1}{\lambda_1 + i\lambda_2} = \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{(n-s_1) - is_2}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda_1}{|\lambda|^2} = \dfrac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \sum\limits_{n=0}^{\infty} L_n \dfrac{n-s_1}{(n-s_1)^2+s_2^2}, \\ \dfrac{\lambda_2}{-s_2|\lambda|^2} = \dfrac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \sum\limits_{n=0}^{\infty} L_n \dfrac{1}{(n-s_1)^2+s_2^2}. \end{cases} \tag{9}$$

Покажем справедливость следующей леммы.

**Лемма.** *При условии* $\mathrm{Re}\, s = s_1 < 0$ *обе суммы, стоящие в правых частях равенств* (9), *положительны, т. е.* $\mathrm{Re}\,\lambda = \lambda_1 > 0$, *а* $\mathrm{Im}\,\lambda = \lambda_2$ *имеет знак, противоположный знаку* $\mathrm{Im}\, s = s_2$.

Доказательство. Предварительно рассмотрим следующую сумму

$$S(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n-s}, \tag{10}$$

считая временно параметр $s$ действительным. Используя рекуррентную формулу для многочленов Лагерра [8, с. 189]

$$(n+1)L_{n+1}^{\alpha}(x) - (2n+\alpha+1-x)L_n^{\alpha}(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(x) = 0,$$

которая в нашем случае (при $\alpha = 1/2$, $x = 1/4$) принимает вид

$$L_n = \frac{8n-3}{4n} L_{n-1} - \frac{2n-1}{2n} L_{n-2}, \quad L_0 = 1, \quad L_1 = 1,25,$$

можно вычислить значения коэффициентов $L_n$, $n = 2, 3, \ldots$, в сумме (10). Также можно отметить, что при вещественном $\alpha$ и фиксированном $x > 0$ мы имеем формулу [8, с. 199]

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(x/2)\, x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \cos\left(2\sqrt{nx} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right),$$

откуда, считая $\alpha = 1/2$, $x = 1/4$, получим

$$L_n = a \sin\sqrt{n} + O\left(n^{-1/2}\right), \quad \text{где } a = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(1/8). \tag{11}$$

Учитывая значения коэффициентов $L_n$ и формулу (11), которая в нашем случае достаточно точно аппроксимирует эти значения, заключаем, что коэффициенты $L_n$ знакопостоянны на определенных промежутках значений $n$. Например, $L_n > 0$ для $n = 0, 1, 2, \ldots, 9$; $L_n < 0$ для $n = 10, 11, \ldots, 38$; $L_n > 0$ для $n = 39, 40, \ldots, 88$; $L_n < 0$ для $n = 89, 90, \ldots, 157$, и т. д. То есть $L_n > 0$, когда $\left[(2k\pi)^2\right] \leqslant n < \left[((2k+1)\pi)^2\right]$, $k = 0, 1, \ldots$, и $L_n < 0$ при $[((2k+1)\pi)^2] + 1 \leqslant n < [((2k+2)\pi)^2]$, $k = 0, 1, \ldots$ Здесь квадратные скобки означают целую часть числа.

Над суммой (10) проделаем следующие операции (вставляем скобки в сходящийся ряд!). Не меняя местами члены данного сходящегося ряда ($s < 0$), будем группировать отдельно положительные и отрицательные слагаемые, т. е. представим данный ряд в виде следующего знакопеременного ряда

$$S(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k(s), \tag{12}$$

где $a_k(s) > 0$, причем (здесь и далее принято обозначение $[x]$ — целая часть числа $x$. Например, $[(2k\pi)^2]$ есть целая часть числа $(2k\pi)^2$)

$$a_0(s) = \sum_{m=0}^{9} \frac{L_m}{m-s}, \quad a_{2k}(s) = \sum_{m=[(2k\pi)^2]+1}^{[((2k+1)\pi)^2]} \frac{L_m}{m-s}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$a_{2k+1}(s) = -\sum_{m=[((2k+1)\pi)^2]+1}^{[((2k+2)\pi)^2]} \frac{L_m}{m-s}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Далее опять, не меняя местами члены ряда (12), представим его в виде

$$S(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{2k}(s) - a_{2k+1}(s)) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(s). \tag{13}$$

Для конечных значений $k$ непосредственно, а для достаточно больших $k$, используя формулу (11) и лемму Абеля [9, с. 306; 10, с. 385], можно показать, что для любого фиксированного значения $s < 0$ либо все члены ряда (13) будут положительными (т. е. $b_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots$), либо только конечное число первых слагаемых ряда будут отрицательными, и, начиная с некоторого слагаемого, все члены ряда будут опять положительными (см. ниже утверждение 2). Например, при $s = -39$ всего лишь первый член ряда отрицателен ($b_0 = -0,200769211$), а все остальные положительны, т. е. $b_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$

Докажем справедливость следующего утверждения.

**Утверждение 2.** *Для $s < 0$ ряд (10), сумма которого положительна, можно представить в виде ряда (13), в котором в зависимости от значения $s$ только лишь конечное число первых членов могут быть отрицательными.*

Доказательство утверждения 2. Предварительно рассмотрим расходящийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{2k}^0 - a_{2k+1}^0\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_k^0 = -\infty,$$

где

$$a_{2k}^0 = \sum_{m=[(2k\pi)^2]+1}^{[((2k+1)\pi)^2]} L_m, \quad a_{2k+1}^0 = -\sum_{m=[((2k+1)\pi)^2]+1}^{[((2k+2)\pi)^2]} L_m,$$

$$b_k^0 > b_{k+1}^0, \quad b_k^0 = a_{2k}^0 - a_{2k+1}^0 < 0 \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Далее, возвращаемся к ряду (10), для которого с учетом его представления (13) будем иметь следующее: амплитуда “синусоид” монотонно убывает. Но в зависимости от значения отрицательного числа $s$ это убывание вначале относительно медленнее, чем в последующем. Именно за счет этого эффекта происходит переход значений $b_k$ от отрицательных к положительным. Чем больше число $-s$, тем медленнее убывает амплитуда “синусоид” в начале изменения индекса $m$. Поэтому согласно (14) и в силу того, что $S(s) > 0$ $\forall s < 0$, первые слагаемые $b_k$ могут еще оставаться отрицательными, при этом их значения только возрастают. А это означает, что при определенном значении $m = m_0$ соответствующее значение $b_{k_0}$ станет положительным. И для всех $k > k_0$ слагаемые $b_k$ будут только положительными.

Для обоснования этого положения мы воспользуемся асимптотическим представлением $L_n$ через $a \sin \sqrt{n}$ (11) и формулой суммирования Эйлера – Маклорена

[9, с. 550]

$$\sum_{m=p}^{p+n_m} f_m = \int\limits_p^{p+n_m} f(x)dx - \frac{1}{2}\left\{f(p+n_m) - f(p))\right\} + \frac{1}{12}\left\{f'(p+n_m) - f'(p)\right\}$$
$$- \frac{1}{720}\left\{f^{'''}(p+n_m) - f^{'''}(p)\right\} + \frac{1}{30240}\left\{f^{\text{V}}(p+n_m) - f^{\text{V}}(p)\right\}$$
$$- \frac{1}{1209600}\left\{f^{\text{VII}}(p+n_m) - f^{\text{VII}}(p)\right\} + \ldots$$

В нашем случае, учитывая, что $f_m = \dfrac{L_m}{m-s} \approx \dfrac{a\,\sin\sqrt{m}}{m-s}$ для всех $m$, начиная с некоторого $m_0$ имеем

$$a_{2k}(s) = \sum_{m=[(2k\pi)^2]+1}^{[((2k+1)\pi)^2]} \frac{L_m}{m-s} \approx \sum_{m=[(2k\pi)^2]+1}^{[((2k+1)\pi)^2]} \frac{a\,\sin\sqrt{m}}{m-s}$$
$$\approx 2\int\limits_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{a\,x\sin\,x\,dx}{x^2-s} - O_1(k^{-1}), \quad (15)$$

где

$$O_1(k^{-1}) = \frac{a\,\pi}{6}\cdot\frac{16\pi^2k^3 + 12\pi^2k^2 + (2\pi^2-s)k - s}{\{((2k+1)\pi)^2+1\}\{(2k\pi)^2+1\}};$$

$$-\,a_{2k+1}(s) = \sum_{m=[((2k+1)\pi)^2]+1}^{[((2k+2)\pi)^2]} \frac{L_m}{m-s} \approx \sum_{m=[((2k+1)\pi)^2]+1}^{[((2k+2)\pi)^2]} \frac{a\,\sin\sqrt{m}}{m-s}$$
$$\approx 2\int\limits_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \frac{a\,x\sin\,x\,dx}{x^2-s} + O_2((k+1)^{-1}), \quad (16)$$

и аналогично

$$O_2((k+1)^{-1}) = \frac{a\,\pi}{6}\cdot\frac{16\pi^2(k+1)^3 + 12\pi^2(k+1)^2 + (2\pi^2-s)(k+1) - s}{\{((2k+2)\pi)^2+1\}\{((2k+1)\pi)^2+1\}};$$

кроме того, имеем, что $O(k^{-1}) \equiv O_1(k^{-1}) - O_2((k+1)^{-1}) > 0$. Поэтому ясно, что имеет место следующее неравенство

$$a_{2k}(s) - a_{2k+1}(s) \le 2\left\{\int\limits_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{a\,x\sin\,x\,dx}{x^2-s} - \int\limits_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \frac{a\,x\sin\,x\,dx}{x^2-s}\right\}$$
$$= 2\int\limits_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin\,x\frac{x^2+\pi x-s}{\{x^2-s\}\{(x+\pi)^2-s\}}\,dx.$$

Отсюда получаем: существует такое положительное целое число ($[y]$ означает целую часть числа $y$)

$$k_0(s) = \left[-\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{s}{4\pi^2}}\right]$$

(соответствующее фиксированному значению отрицательного числа $s$), что разность $a_{2k}(s) - a_{2k+1}(s)$ подчиняется условию

$$\{a_{2k}(s) - a_{2k+1}(s)\} < 0, \text{ если } 0 \leq k < k_0(s).$$

Таким образом, мы показали, что первые слагаемые ряда (13) могут иметь отрицательный знак. Это подтверждается и непосредственными вычислениями. Например, для $s = -1$ все слагаемые ряда (13) являются положительными, а для $s = -7$ и $s = -40$ — первое слагаемое, т. е. $b_0(-7) < 0$, $b_0(-40) < 0$.

С другой стороны, для достаточно больших $k$ формулы (15) и (16) с любой требуемой точностью представляют числа $a_{2k}(s)$ и $a_{2k+1}(s)$. Поэтому для таких значений $k$ имеем

$$\operatorname{sign}\{a_{2k}(s) - a_{2k+1}(s)\} = \operatorname{sign}\left\{\int\limits_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin x \frac{x^2 + \pi x - s}{\{x^2 - s\}\{(x+\pi)^2 - s\}}\,dx\right\}.$$

И знак интеграла в этой формуле будет "плюс", если $k \geq k_1$, где $k_1$ – достаточно большое число. Таким образом, нами показано, что, начиная с некоторого значения индекса $k$, все слагаемые $b_k(s)$ будут положительными. Осталось учесть монотонность убывания амплитуд "синусоид", чтобы утверждать: ряд (13) может иметь конечное число первых отрицательных слагаемых, а остальные слагаемые будут только положительными.

Этим завершается доказательство утверждения 2.

Продолжение доказательства леммы. Для $s_1 < 0$ в силу утверждения 2 и леммы Абеля [10, с. 385] имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n \frac{n - s_1}{(n-s_1)^2 + s_2^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n - s_1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n - s_1} \cdot \frac{1}{1 + \left(\dfrac{n - s_1}{s_2}\right)^2}$$

$$\geqslant S(s_1) - S(s_1) \frac{1}{1 + \left(\dfrac{-s_1}{s_2}\right)^2} = S(s_1) \frac{\left(\dfrac{-s_1}{s_2}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{-s_1}{s_2}\right)^2} \geqslant 0.$$

Отсюда и из первого из равенств (11) получаем, что $\lambda_1 > 0$.

Теперь покажем, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{(n-s_1)^2 + s_2^2} \geqslant 0.$$

Учитывая, что по лемме Абеля [10, с. 385]

$$0 = 0 \cdot \frac{1}{-s_1} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{n - s_1} \cdot \frac{1}{n - s_1} \leqslant S(s_1) \cdot \frac{1}{-s_1},$$

будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{(n-s_1)^2 + s_2^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{(n-s_1)^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n}{(n-s_1)^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\dfrac{n - s_1}{s_2}\right)^2} \geqslant 0.$$

Поэтому заключаем, что $s_2$ и $\lambda_2$ имеют противоположные знаки. Тем самым лемма полностью доказана.

Из утверждения леммы непосредственно следует

**Предложение 1.** *Для того, чтобы уравнение* (6) *имело корни* $s^{(k)}$ *с* $\mathrm{Re}\ s^{(k)} < 0$ *необходимо, чтобы значение спектрального параметра* $\lambda$ *принадлежало правой (комплексной) полуплоскости, т. е.* $\mathrm{Re}\ \lambda > 0$. *Если же* $\mathrm{Re}\ \lambda < 0$, *то уравнение* (6) *не будет иметь корней* $s^{(k)}$ *с* $\mathrm{Re}\ s_k < 0$.

Теперь, предполагая, что $\mathrm{Re}\ \lambda > 0$, приступим к нахождению корней уравнения (6). При этом, прежде всего, выясним качественную картину расположения этих корней в комплексной плоскости.

Используя формулу (11), преобразуем первое из уравнений (9) к виду (здесь знак $\approx$ заменяется на знак $=$)

$$\frac{\lambda_1}{|\lambda|^2} = \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \frac{-s_1}{(-s_1)^2 + s_2^2} + \frac{e^{-1/8}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n - s_1)\sin\sqrt{n}}{(n - s_1)^2 + s_2^2}.$$

Далее, применяя формулу суммирования Эйлера – Маклорена [11, с. 26] для этой формулы и учитывая [12, с. 425], получим

$$\frac{\lambda_1}{|\lambda|^2} = \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \frac{-s_1}{(-s_1)^2 + s_2^2} + \frac{2e^{-1/8}}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{x \cdot \sin x \cdot (x^2 - s_1)}{(x^2 - s_1)^2 + s_2^2} dx$$
$$= \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \frac{(-s_1)}{(-s_1)^2 + s_2^2} + e^{-1/8} e^{-A} \cos B. \quad (17)$$

Аналогично, для второго уравнения из (9) имеем

$$\frac{\lambda_2}{|\lambda|^2} = -\frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \frac{s_2}{(-s_1)^2 + s_2^2} + \frac{s_2 e^{-1/8}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{n}}{(n - s_1)^2 + s_2^2}$$
$$= -\frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \frac{s_2}{(-s_1)^2 + s_2^2} + \frac{2s_2 e^{-1/8}}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{x \cdot \sin x}{(x^2 - s_1)^2 + s_2^2} dx$$
$$= -\frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{s_2}{(-s_1)^2 + s_2^2} + e^{-1/8} e^{-A} \sin B. \quad (18)$$

В равенствах (17), (18) использованы обозначения [12, с. 424]

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{\sqrt{(-s_1)^2 + s_2^2} + (-s_1)}{2}} = \sqrt{\frac{|-s| + (-s_1)}{2}}, \\ B &= \sqrt{\frac{\sqrt{(-s_1)^2 + s_2^2} - (-s_1)}{2}} = \sqrt{\frac{|-s| - (-s_1)}{2}}\ . \end{aligned} \right. \quad (19)$$

Таким образом,

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\lambda_1}{|\lambda|^2} &= \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{-s_1}{|-s|^2} + e^{-(A+1/8)} \cos B, \\ \frac{\lambda_2}{|\lambda|^2} &= -\frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{s_2}{|-s|^2} + e^{-(A+1/8)} \sin B. \end{aligned} \right. \quad (20)$$

Здесь величины $A$, $B$ определяются согласно равенствам (19).

Заметим, что в равенствах (20) при достаточно малых $|\lambda|$ роль главных частей выполняют соответственно слагаемые

$$\frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{-s_1}{|-s|^2}, \qquad -\frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{s_2}{|-s|^2}.$$

Таким образом, при достаточно малых $|\lambda|$ имеем

$$\frac{\lambda_1}{|\lambda|^2} \approx \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{-s_1}{|-s|^2}, \qquad -\frac{\lambda_2}{|\lambda|^2} \approx \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{s_2}{|-s|^2}. \tag{21}$$

Из соотношений (21) получаем

$$|-s| \approx (2\sqrt{\pi}e^{1/4})^{-1} \cdot |\lambda|, \qquad \arg(-s) \approx -\arg\lambda,$$

или же искомыми корнями уравнения (6) будут

$$s_1^* \approx -\frac{\lambda_1}{2\sqrt{\pi}e^{1/4}}, \qquad s_2^* \approx -\frac{\lambda_2}{2\sqrt{\pi}e^{1/4}}. \tag{22}$$

Если же $|\lambda|$ достаточно большое (например, $|\lambda| > \exp(1/8 + \pi/4)$), то в равенствах (20) роль главных частей выполняют, соответственно, слагаемые

$$e^{-(A+1/8)}\cos B, \qquad e^{-(A+1/8)}\sin B.$$

Таким образом, из (20) вытекает справедливость следующих соотношений

$$\frac{\lambda_1}{|\lambda|^2} \approx e^{-(A+1/8)}\cos B, \qquad -\frac{\lambda_2}{|\lambda|^2} \approx e^{-(A+1/8)}\sin B. \tag{23}$$

Второе уравнение из (23) умножим на $-i$ и, складывая полученный результат с первым уравнением, получим (здесь мы заменили знак $\approx$ на $=$)

$$\frac{\lambda_1 + i\lambda_2}{|\lambda|^2} = e^{-(A+1/8)-iB}. \tag{24}$$

Логарифмируя обе части уравнения (24) и учитывая, что $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ (выбрана однозначная ветвь логарифма такая, что $\ln 1 = 0$), будем иметь $\ln\dfrac{\lambda}{|\lambda|^2} = -A - \dfrac{1}{8} - iB$.

Проведя некоторые преобразования в левой части полученного соотношения

$$\ln\frac{\lambda}{|\lambda|^2} = \ln\lambda - 2\ln|\lambda| = \ln|\lambda| + i\arg\lambda - 2\ln|\lambda| = -\ln|\lambda| + i\arg\lambda,$$

получаем

$$-\ln|\lambda| + i\arg\lambda = -(A + 1/8) - iB.$$

Приравнивая действительные и мнимые части этого выражения, получим следующую систему соотношений

$$A = \ln(e^{-\frac{1}{8}} \cdot |\lambda|), \quad B = -\arg\lambda. \tag{25}$$

Пусть параметр $\lambda$ задан и $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$. Тем самым будут заданы величины $A$ и $B$. Отсюда с учетом равенств (25) находим

$$-s_1 = A^2 - \frac{s_2^2}{4A^2}, \quad -s_1 = \frac{s_2^2}{4B^2} - B^2. \tag{26}$$

Таким образом, искомые корни $s^* = s_1^* + is_2^*$ уравнения (8) являются точками пересечения парабол (26) или же, учитывая (25),

$$s_1^* = -\ln^2\left(e^{-1/8}\cdot|\lambda|\right) + \arg^2\lambda; \qquad s_2^* = -2\ln\left(e^{-1/8}\cdot|\lambda|\right)\cdot \arg\lambda. \tag{27}$$

Из соотношений (22) и (27) следует справедливость

**Утверждение 3.** *Каждому $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C},\ Re\,\lambda > 0\}$ соответствует единственный корень $s$ уравнения* (6)*, для которого $Re\ s < 0$. При $Re\ \lambda = 0$ и $Im\ \lambda \neq 0$ корень $s$ уравнения* (6) *будет удовлетворять условиям $Re\ s = s_1 = 0$ и $Im\ s = s_2 \neq 0$. Если же $\lambda \to 0$, то и корень уравнения* (6) *$s \to 0$. В частности, каждому действительному значению $\lambda \in \mathbb{R}_+$ соответствует единственный действительный корень $s \in \mathbb{R}_+$ уравнения* (6).

Итак, факт о существовании и виде собственных функций интегрального оператора (1) сформулировано в следующем предложении.

**Предложение 2.** *Если $Re\ \lambda \geqslant 0$, то интегральное уравнение* (1) *имеет собственные функции вида*

$$\mu_*(t) = t^{-s^*},$$

*где $s^*$ является корнем уравнения* (6)

$$1 - \lambda\widehat{k}(s) = 0.$$

*Если же $Re\ \lambda < 0$, то интегральное уравнение* (1) *имеет только тривиальное решение.*

## 3. Основные результаты

Сформулируем основные результаты по спектральной задаче для интегрального оператора (1).

**Теорема 1.** *Для интегрального оператора $\mathbf{K}$ из (6) множество $\sigma(\mathbf{K}) \equiv \{\lambda|\ \lambda \in \mathbb{C},\ Re\ \lambda \geq 0\}$ является множеством характеристических чисел, а $\mathbb{C}\setminus\sigma(\mathbf{K})$ — резольвентным множеством.*

Теперь перейдем к исследованию однородного сопряженного интегрального оператора (2)

$$\nu(t) - \overline{\lambda}\int\limits_0^\infty k\left(\frac{t}{\tau}\right)\nu(\tau)\cdot\frac{d\tau}{t} = 0,\ \ t \in \mathbb{R}_+. \tag{28}$$

Если в уравнении (28) произвести замены $t = t_1^{-1}$, $\tau = \tau_1^{-1}$ и ввести следующее обозначение $\nu_1(t_1) = \nu(t_1^{-1})\,t_1^{-1}$, то (28) преобразуется к виду

$$\nu_1(t_1) - \overline{\lambda}\int\limits_0^\infty k\left(\frac{\tau_1}{t_1}\right)\nu_1(\tau_1)\frac{d\tau_1}{\tau_1} = 0,$$

т. е. оно совпадает с интегральным уравнением (1), где неизвестной функцией выступает функция $\nu_1(t_1)$. Итак, мы установили

**Предложение 3.** *Интегральное уравнение* (28) *$\forall\,\lambda \in \mathbb{C}$, $Re\ \lambda < 0$, имеет только тривиальное решение. Если же $Re\ \lambda > 0$, то интегральное уравнение* (28) *имеет одну собственную функцию вида $\nu_{s^{(0)}}(t) = t^{s^{(0)}}$, где $s^{(0)}$– корень*

*трансцендентного уравнения* (6), *причем* $Re\, s^{(0)} < 0$. *А это означает, что сопряженное уравнение* (28) *имеет собственные функции только вида* $\nu_{s^{(0)}}(t) = t^{s_0}$, $Re\, s_0 < 0$, *для которых, очевидно, функции вида* $\exp\{t\}\, t^{s_0}$ *не принадлежат пространству* $L_\infty(\mathbb{R}_+)$. *Таким образом, в классе* (4) *однородное интегральное уравнение* (28) $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$ *имеет только тривиальное решение.*

Сформулируем полученный результат по спектральной задаче для интегрального оператора (2).

**Теорема 2.** *Для интегрального оператора* $\mathbf{K}^*$ *из* (2) *на комплексной плоскости отсутствуют характеристические числа.*

Таким образом, непосредственно из теорем 1–2 получаем справедливость следующей теоремы.

**Теорема 3.** *Оператор* (1) *является нётеровой с неотрицательным индексом*

$$\mathrm{Ind}\,\{\textit{Оператор }(1)\} = \begin{cases} 1, & \textit{если } Re\,\lambda \geq 0; \\ 0, & \textit{если } Re\,\lambda < 0. \end{cases}$$

## Заключение

В заключение отметим, что подобные (к исследованным в данной работе) особые интегральные операторы возникают, например, при изучении некоторых нелокальных внутренне-граничных задач для параболического уравнения [1], спектрально-нагруженных параболических уравнений [2–4], задач с подвижной границей [5], обратных задач для параболических уравнений и т. д.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И., Туймебаева А. Е.* Спектрально-нагруженный оператор теплопроводности. Автомодельный закон движения точки нагрузки. Алматы, 2006. (Препринт/ Институт математики; № 6).
2. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.
3. *Дженалиев М. Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Ин-т математики, 1995.
4. *Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.* О граничных задачах для "существенно" нагруженных параболических уравнений в неограниченных областях // Материалы межд. Российско-Казахского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы современного анализа и информатики". Нальчик, 2004. С. 62–65.
5. *Харин С. Н.* Тепловые процессы в электрических контактах и связанные с ними сингулярные интегральные уравнения. Автореф. дис. к. физ.-мат. н. Алма-Ата: Ин-т математики, 1968.
6. *Краснов М. Л.* Интегральные уравнения. М.: Физматлит, 1975.
7. *Полянин А. Д., Манжиров А. В.* Справочник по интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 2003.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Физматлит, 1974.
9. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Физматлит, 1969.
10. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ. М.: Физматлит, 1979.

**11.** Справочник по специальным функциям. Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. М.: Мир, 1979.
**12.** *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физ.-мат. гиз., 1962.

*Амангалиева Мейрамкуль Мувашархан-кызы*
*Казахстан, Алматы, Институт математики МОН РК*
dzhenali@math.kz

*Туймебаева Акнур Ерсайыновна*
*Казахстан, Алматы, Институт математики МОН РК*
aknur@math.kz