Неклассические уравнения математической физики
2007. С. 36–40

УДК 517.9

ФОРМУЛЫ В ЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ С ПАРАМЕТРОМ

Ю. Е. Аниконов

В работе приводятся формулы для решений и правых частей линейных обратных задач для общих эволюционных уравнений с параметром.

В настоящее время происходит интенсивное развитие теории и приложений обратных задач для эволюционных и других уравнений. Появляются новые постановки обратных задач, развивается теория нового математического моделирования, создаются численные алгоритмы и их практическая реализация.

Общие принципы, положения, проблематики, которыми обусловлено появление обратных задач заключаются в следующем:

1. Определение причин по следствиям.

2. Проблемы управления, в частности проблемы перевода субстанций из одного состояния в другое.

3. Создание условий для функционирования определенного процесса.

4. Восстановление истории явлений.

5. Моделирование и поиск источников полей.

6. Определение внутренней структуры объектов.

7. Распознавание образов и идентификация.

8. Создание новых математических моделей и на этой основе создание новых методов компьютерного моделирования.

9. Задачи стимулирования.

10. Определение по объему времени скорости передачи информации.

11. Обратные задачи экономики поиска вариантов цен по прибыли, определение условий для достижения заданного уровня регионального развития.

Конкретными обратными задачами математической физики, которые оказали и оказывают влияние на предмет теории и приложений, являются:

1. Обратная задача определения гравитационных сил в двумерной системе уравнений Ньютона на основе законов Кеплера.

2. Обратная кинематическая задача сейсмики — определения скорости продольных волн по временному годографу.

3. Обратные задачи теории потенциала.

4. Обратные задачи теории рассеяния.

5. Томография.

Многие дифференциальные уравнения математической физики содержат параметры, которые считаются фиксированными и по сути являются постоянными коэффициентами в рассматриваемых уравнениях, например — волновое уравнение $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, где a — постоянная; параметр здесь число a^2.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 06-01-00439, НШ-7157.2006.1 и интеграционного проекта СО РАН № 48

Для теории и приложений обратных задач представляется целесообразным считать постоянные, входящие в дифференциальные уравнения, переменными и использовать это.

В частности, зависимость решений дифференциальных уравнений от переменных параметров уравнений позволяет ставить и успешно решать принципиально новые обратные задачи в существенно более широких классах функций. Поясним это на конкретных уравнениях математической физики:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = p\Delta w + \lambda(x,t), \quad p = a^2, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p\Delta w + \lambda(x,t), \quad p = a^2, \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = ip\Delta w + \lambda(x,t), \quad p = -\frac{h}{2m}, \tag{3}$$

где p — параметр, $\Delta = \sum \dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, $\lambda(x,t)$ — некоторая функция. Если в уравнениях (1), (2), (3) считать p переменной величиной, $p_1 < p < p_2$, то решения w этих уравнений должно зависеть также и от переменной p, то есть $w = w(x,p,t)$. Физически это может соответственно означать, что рассматриваются одновременно процессы с разными коэффициентами диффузии, волны с разными скоростями, частицы с разными массами. Эволюционные уравнения с переменным параметром могут также возникать при преобразованиях типа Фурье, Лапласа решений рассматриваемых уравнений по некоторым переменным. Например, в случае уравнения.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} Aw + \lambda(x,t)\delta(y), \tag{4}$$

где A — линейный оператор действующий по переменным x и не зависящий от y, $\delta(y)$ — дельта функция Дирака. В (4) решение $w(x,y,t)$ зависит от переменных (x,y,t), $x \in D$, $t_1 < t < t_2$, $y \in \mathbb{R}^1$, а функция $\lambda(x,t)$ от y не зависит. Формально осуществляя преобразование Фурье по y обеих частей (4), получим уравнение с параметром преобразования p

$$\frac{\partial \widehat{w}}{\partial t} = piA\widehat{w} + \lambda(x,t).$$

Таким образом получается эволюционное уравнение с переменным параметром p, при этом решение $\widehat{w}(x,p,t)$ зависит от переменных (x,p,t), а функция $\lambda(x,t)$ не зависит от p. Очевидно, подобным образом можно получать уравнения с переменным параметром и при более общих операторах, чем $\dfrac{\partial}{\partial y}$ в том числе и многомерных.

Другим, более конкретным и важным примером уравнения с параметром, является уравнение Штурма-Лиувилля

$$-w'' + \lambda(x)w = p^2 w, \quad -a < x < a, \quad p \in \mathbb{R}^1, \tag{5}$$

решение $w = w(x,p)$ является функцией (x,p), а функция $\lambda(x)$ не зависит от p. В этой связи заметим, что в случае уравнения (5) с данными $w(0,p) = 1$, $w'(0,p) = ip$ для функций $w(x,p)$, $\lambda(x)$ имеет место представления:

$$w(x,p) = e^{ipx} + \int\limits_{-x}^{x} F(x,z)e^{ipz}\,dz,$$

$$F(x,x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x \lambda(z)\,dz \quad \text{или} \quad \lambda(x)=2\frac{d}{dx}F(x,x),$$

где $F(x,z)$ — некоторая непрерывно-дифференцируемая функция, удовлетворяющая соотношению $F(x,-x)=0$, $-a\le x\le a$. Хорошо известно, такого сорта представления существенно используются для решения обратных задач теории рассеяния.

Пусть $\mathbb{R}^n$ $(n\ge 1)$ — вещественное евклидово пространство переменных $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Рассмотрим сначала общее эволюционное уравнение второго порядка с параметром $p\in\mathbb{R}^1$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=pAw+\lambda(x,t), \quad x\in\mathbb{R}^n,\ p\in\mathbb{R}^1,\ t\ge 0. \tag{6}$$

Здесь A — линейный оператор, действующий по x, не зависящий от p и t с символом $a(\xi)$:

$$Ae^{ix\xi}=a(\xi)e^{ix\xi}, \quad x\xi=x_1\xi_1+x_2\xi_2+\ldots+x_n\xi_n,$$

$\lambda(x,t)$ — искомая функция источника, комплекснозначная, не зависящая от параметра p, решение же $w=w(x,t,p)$ зависит от параметра p. К уравнению добавляются начальные данные

$$w\Big|_{t=0}=w_0(x,p), \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=w_1(x,p), \tag{7}$$

где комплекснозначные функции $w_0(x,p)$, $w_1(x,p)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $p\in\mathbb{R}^1$, известны.

Согласно общей теории дифференциальных уравнений решение $w(x,t,p)$ уравнения (1) представляется в виде

$$w=\tilde{w}+\bar{w},$$

где $\tilde{w}(x,p,t)$ — общее решение однородного $(\lambda=0)$ уравнения, $\bar{w}(x,t,p)$ — частное решение, определяемое лишь функцией источника $\lambda(x,t)$. В обратных задачах, например, задачах томографии, иногда априори известно, что существо задачи связано лишь с решениями, определяемыми функциями источника, т. е. с частными решениями $\bar{w}$. При этом считается, что общее решение $\tilde{w}$ однородного уравнения равно нулю.

Учитывая это замечание, предполагаем выполненным соотношение

$$\tilde{w}(x,p,t)=0. \tag{8}$$

Оказывается, условия (1)–(3) позволяют находить и решение $w(x,t,p)$ уравнения (1), и функцию источника $\lambda(x,t)$. Результат заключается в следующем: функции $w(x,t,p)$, $\lambda(x,t)$, определенные формальными формулами

$$w(x,t,p)=\frac{1}{(2\pi)^n}\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^{2n+2}}\Big[\mathrm{ch}(t\sqrt{a(\xi)y})w_0(q,s)+\frac{\mathrm{sh}(t\sqrt{a(\xi)y})}{\sqrt{a(\xi)y}}w_1(q,s)\Big] \times\frac{e^{i\xi(x-q)}}{(s-y)(y-p)}\,dq\,ds\,dy\,d\xi,$$

$$\lambda(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^n}\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^{2n+2}}\Big[\mathrm{ch}(t\sqrt{a(\xi)y})w_0(q,s)+\frac{\mathrm{sh}(t\sqrt{a(\xi)y})}{\sqrt{a(\xi)y}}w_1(q,s)\Big] \times\frac{a(\xi)e^{i\xi(x-q)}}{s-y}\,dq\,ds\,dy\,d\xi$$

удовлетворяют уравнению и данным Коши

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = pAw + \lambda(x,t), \quad w\Big|_{t=0} = w_0(x,p), \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = w_1(x,p).$$

Доказательство осуществляется непосредственной проверкой с использованием свойств преобразований Фурье и Гильберта.

Аналогично вышеприведенному рассмотрим обратную задачу для эволюционного уравнения первого порядка с переменным параметром p: найти функции $w(x,t,p)$, $\lambda(x,t)$ такие, что

$$\frac{\partial w}{\partial t} = pA(t)w + \lambda(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ p \in \mathbb{R}^1,\ t \geq 0, \tag{9}$$

$$w\Big|_{t=0} = w_0(x,p), \tag{10}$$

функция $w_0(x,p)$ известна. Предполагается также, что

$$\tilde{w}(x,t,p) = 0, \tag{11}$$

где $\tilde{w}(x,t,p)$ — общее решение однородного уравнения $\frac{\partial w}{\partial t} = pA(t)w$, $A(t)$ — линейный оператор с символом $a(\xi,t)$: $A(t)e^{i\xi x} = a(\xi,t)e^{i\xi x}$. Введем функцию $b(\xi,t)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, полагая $\frac{\partial b}{\partial t} = a(\xi,t)$, $b(\xi,0) = 0$. Условия (4), (5), (6) позволяют получить такой результат: функции $w(x,t,p)$, $\lambda(x,t)$, определенные формальными формулами

$$w(x,t,p) = \frac{1}{(2\pi)^n}\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^{2n+2}}\left[e^{i\xi(x-q)+b(\xi,t)y}\frac{1}{(s-y)(y-p)}\right]w_0(q,s)\,dq\,ds\,dyd\xi,$$

$$\lambda(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^{2n+2}}\left[e^{i\xi(x-q)+b(\xi,t)y}\frac{a(\xi,t)}{(s-y)(y-p)}\right]w_0(q,s)\,dq\,ds\,dy\,d\xi$$

удовлетворяют уравнению и начальному условию

$$\frac{\partial w}{\partial t} = pA(t)w + \lambda(x,t), \quad w\Big|_{t=0} = w_0(x,p).$$

Представляет интерес с теоретической и практической точек зрения абстрактный вариант вышеприведенных формул. Если оператор A действует из линейного пространства L в L и не зависит от t, то для элементов $w(t,p) \in L$, $\lambda(t) \in L$, таких, что

$$\frac{\partial w}{\partial t} - pAw = \lambda(t), \quad w\Big|_{t=0} = w_0(p),$$

имеют место операторные формулы

$$w(t,p) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{tyA}}{(s-y)(y-p)}w_0(s)\,ds\,dy,$$

$$\lambda(t) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{Ae^{tyA}}{s-y}w_0(s)\,ds\,dy,$$

Аналогичные операторные формулы имеют место и для обратных задач в случае эволюционных уравнений второго порядка по t

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = pAw + \lambda(t),$$

$$w|_{t=0} = w_0(p), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = w_1(p),$$

$$w(t,p) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big[\operatorname{ch}(t\sqrt{yA}) w_0(s) + \frac{\operatorname{sh}(t\sqrt{yA})}{\sqrt{yA}} w_1(s) \Big] \frac{1}{(s-y)(y-p)} \, ds \, dy,$$

$$\lambda(t) = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big[\operatorname{ch}(t\sqrt{yA}) w_0(s) + \frac{\operatorname{sh}(t\sqrt{yA})}{\sqrt{yA}} w_1(s) \Big] \frac{A}{s-y} \, ds \, dy.$$

Аниконов Юрий Евгеньевич
Россия, Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
anikon@math.nsc.ru