

УДК 517.925.54+517.933+517.987.5

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭМДЕНА – ФАУЛера ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

И. В. Асташова

В работе исследуется асимптотическое поведение всех возможных решений дифференциального уравнения типа Эмдена – Фаулера четвертого порядка в случае положительного потенциала. Для получения этих результатов уравнение заменой переменных сводится к динамической системе на трехмерной сфере. Изучение асимптотического поведения траекторий полученной системы на сфере дает возможность исследовать асимптотическое поведение всех решений исходного уравнения.

В данной работе методы исследования, использованные ранее автором для получения результатов об асимптотическом поведении всех возможных решений дифференциального уравнения типа Эмдена – Фаулера третьего порядка в случае положительного и отрицательного потенциалов и уравнения типа Эмдена – Фаулера четвертого порядка в случае отрицательного потенциала, распространяются на уравнение типа Эмдена – Фаулера четвертого порядка в случае положительного потенциала, давая возможность представить законченный результат об асимптотической классификации всех решений уравнения четвертого порядка.

Уравнение

$$y^{(n)}(x) + p(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))|y(x)|^{k-1}y(x) = 0, \quad (0.1)$$

является обобщением уравнения типа Эмдена – Фаулера, в котором $n = 2$ и $p(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) = x^\sigma$. Решения этого уравнения, а также их асимптотические свойства при различных σ и n подробно изучены в монографиях Р. Беллмана [9], Дж. Сансоне [15] и Ф. Хартмана [16].

Вопросы продолжаемости и непродолжаемости решений уравнения (0.1), вопросы, связанные с их колеблемостью и неколеблемостью, оценки продолжаемых и непродолжаемых решений изучались в работах И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чангурия [11, 12, 17], В. А. Кондратьева и В. С. Самовола [14], В. А. Козлова [13], и др.

В работах автора [1–7] изучалось асимптотическое поведение решений уравнения (0.1) при $n > 1$, $k > 1$, где $p(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ — непрерывная положительная функция, удовлетворяющая условию Липшица по y_0, y_1, \dots, y_{n-1} , и, в частности, исследована асимптотика решений уравнения (0.1) с регулярной ($k > 1$) и сингулярной ($0 < k < 1$) нелинейностью при $n = 3$. При $p(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) = p_0$ в этом случае в работах [6, 7] дана классификация всех решений уравнения (0.1). Для случая $n = 4$ в этих работах изучено асимптотическое поведение всех возможных решений уравнения (0.1), когда $p(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) = p_0 < 0$.

В данной работе будет изучено асимптотическое поведение всех возможных решений уравнения (0.1), когда потенциал $p(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) = p_0 > 0$, то есть дана асимптотическая классификация всех решений уравнения

$$y^{IV}(x) + p_0 |y|^{k-1}y(x) = 0, \quad \text{где } k > 1, p_0 > 0. \quad (0.2)$$

1. Фазовая сфера

Прежде всего заметим, что если функция $y(x)$ является решением уравнения (0.2), то это же справедливо и для функции $z(x) = Ay(Bx + C)$, где $A \neq 0$, $B > 0$ и C — константы, удовлетворяющие соотношению $|A|^{k-1} = B^4$. Действительно,

$$\begin{aligned} z^{IV}(x) + p_0 |z|^{k-1} z(x) &= AB^4 y^{IV}(Bx + C) + p_0 |Ay(Bx + C)|^{k-1} Ay(Bx + C) \\ &= Ay^{IV}(Bx + C) (B^4 - |A|^{k-1}) = 0. \end{aligned}$$

Любое нетривиальное решение $y(x)$ уравнения (0.2) порождает в $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ кривую $(y(x), y'(x), y''(x), y'''(x))$. Введем в $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ отношение эквивалентности, при котором два решения, связанные описанным выше преобразованием, порождают эквивалентные кривые, т. е. кривые, проходящие через эквивалентные точки (вообще говоря, при различных значениях x). Будем считать точки (y_0, y_1, y_2, y_3) и (z_0, z_1, z_2, z_3) из $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ эквивалентными, если существует такая положительная константа λ , что

$$z_j = \lambda^{4+j(k-1)} y_j, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

Получающееся фактор-пространство гомеоморфно трехмерной сфере

$$S^3 = \{y \in \mathbb{R}^4 : y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\},$$

на которой для каждого класса эквивалентности найдется ровно один представитель, так как для любой точки $(y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ уравнение

$$\lambda^8 y_0^2 + \lambda^{2k+6} y_1^2 + \lambda^{4k+4} y_2^2 + \lambda^{6k+2} y_3^2 = 1$$

имеет ровно один положительный корень λ .

Можно предложить и другую гиперповерхность в \mathbb{R}^4 с единственным представителем от каждого класса эквивалентности:

$$E = \left\{ y \in \mathbb{R}^4 : |y_0|^{\frac{1}{4}} + |y_1|^{\frac{1}{k+3}} + |y_2|^{\frac{1}{2k+2}} + |y_3|^{\frac{1}{3k+1}} = 1 \right\}. \quad (1.1)$$

Определим $\Phi_S : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \rightarrow S^3$ и $\Phi_E : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \rightarrow E$ как отображения, которые произвольной точке из $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ ставят в соответствие эквивалентную ей точку из S^3 или E . Отметим, что ограничения $\Phi_S|_E$ и $\Phi_E|_{S^3}$ являются взаимно обратными гомеоморфизмами.

Лемма 1.1 *На сфере S^3 существует динамическая система, все траектории которой получаются с помощью отображения Φ_S из кривых, которые порождаются в $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ нетривиальными решениями уравнения (0.2). И обратно, любое нетривиальное решение уравнения (0.2) порождает в $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ кривую, которую отображение Φ_S переводит в траекторию этой динамической системы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим на сфере S^3 структуру гладкого многообразия с помощью атласа, состоящего из восьми карт.

Две полусферы, задаваемые неравенствами $y_0 > 0$ и $y_0 < 0$, покроем картами, координатные функции которых (соответственно u_1^+ , u_2^+ , u_3^+ и u_1^- , u_2^- , u_3^-) задаются формулами

$$u_j^\pm = y_j |y_0|^{-\frac{4+j(k-1)}{4}} \operatorname{sgn} y_0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Полусферы, задаваемые неравенствами $y_1 > 0$ и $y_1 < 0$, покроем картами, координатные функции которых (соответственно v_0^+, v_2^+, v_3^+ и v_0^-, v_2^-, v_3^-) задаются формулами

$$v_j^\pm = y_j |y_1|^{-\frac{4+j(k-1)}{k+3}} \operatorname{sgn} y_1, \quad j = 0, 2, 3.$$

Полусферы, задаваемые неравенствами $y_2 > 0$ и $y_2 < 0$, покроем картами, координатные функции которых (соответственно w_0^+, w_1^+, w_3^+ и w_0^-, w_1^-, w_3^-) задаются формулами

$$w_j^\pm = y_j |y_2|^{-\frac{4+j(k-1)}{2k+2}} \operatorname{sgn} y_2, \quad j = 0, 1, 3.$$

Наконец, полусферы, задаваемые неравенствами $y_3 > 0$ и $y_3 < 0$, покроем картами, координатные функции которых (g_0^+, g_1^+, g_2^+ и g_0^-, g_1^-, g_2^- соответственно) задаются формулами

$$g_j^\pm = y_j |y_3|^{-\frac{4+j(k-1)}{3k+1}} \operatorname{sgn} y_3, \quad j = 0, 1, 2.$$

Отметим, что любая из этих координатных функций может быть задана с помощью своей формулы на всем соответствующем полупространстве ($y_j \geq 0$), при этом в эквивалентных точках она будет принимать одно и то же значение. Этот факт облегчает описание траекторий, порождаемых на сфере S^3 решениями уравнения (0.2), точнее, их ограничениями на участки с постоянным знаком какой-либо производной.

Например, для участка, на котором решение положительно, имеем для соответствующей траектории

$$\begin{aligned} \frac{du_1^+}{dx} &= y'' |y|^{-\frac{k+3}{4}} \operatorname{sgn} y - \frac{k+3}{4} y'^2 |y|^{-\frac{k+7}{4}} = |y|^{\frac{k-1}{4}} \left(u_2^+ - \frac{k+3}{4} u_1^{+2} \right), \\ \frac{du_2^+}{dx} &= y''' |y|^{-\frac{2k+2}{4}} \operatorname{sgn} y - \frac{2k+2}{4} y' y'' |y|^{-\frac{2k+6}{4}} = |y|^{\frac{k-1}{4}} \left(u_3^+ - \frac{2k+2}{4} u_1^+ u_2^+ \right), \\ \frac{du_3^+}{dx} &= -p_0 |y|^{k-\frac{3k+1}{4}} - \frac{3k+1}{4} y' y''' |y|^{-\frac{3k+5}{4}} = |y|^{\frac{k-1}{4}} \left(-p_0 - \frac{3k+1}{4} u_1^+ u_3^+ \right). \end{aligned}$$

Параметризуем эту траекторию переменной $t_u = \int_{x_0}^x |y|^{\frac{k-1}{4}} dx$ и получим ее описание в координатах карты:

$$\begin{cases} \frac{du_1^+}{dt_u} = u_2^+ - \frac{k+3}{4} u_1^{+2}, \\ \frac{du_2^+}{dt_u} = u_3^+ - \frac{2k+2}{4} u_1^+ u_2^+, \\ \frac{du_3^+}{dt_u} = -p_0 - \frac{3k+1}{4} u_1^+ u_3^+. \end{cases}$$

Естественно, точно такие же уравнения получаются и для карты (u_1^-, u_2^-, u_3^-) . Аналогичными выкладками получаются уравнения для других карт:

$$\begin{cases} \frac{dv_0^\pm}{dt_v} = 1 - \frac{4}{k+3} v_0^\pm v_2^\pm, \\ \frac{dv_2^\pm}{dt_v} = v_3^\pm - \frac{2k+2}{k+3} v_2^\pm, \\ \frac{dv_3^\pm}{dt_v} = -p_0 |v_0^\pm|^k \operatorname{sgn} v_0^\pm - \frac{3k+1}{k+3} v_2^\pm v_3^\pm, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dw_0^\pm}{dt_w} = w_1^\pm - \frac{4}{2k+2} w_0^\pm w_3^\pm, \\ \frac{dw_1^\pm}{dt_w} = 1 - \frac{k+3}{2k+2} w_1^\pm w_3^\pm, \\ \frac{dw_3^\pm}{dt_w} = -p_0 |w_0^\pm|^k \operatorname{sgn} w_0^\pm - \frac{3k+1}{2k+2} w_3^{\pm 2}, \\ \frac{dg_0^\pm}{dt_q} = g_1^\pm + \frac{4}{3k+1} p_0 |g_0^\pm|^{k+1}, \\ \frac{dg_1^\pm}{dt_q} = g_2^\pm + \frac{k+3}{3k+1} p_0 g_1^\pm |g_0^\pm|^k \operatorname{sgn} g_0^\pm, \\ \frac{dg_2^\pm}{dt_q} = 1 + \frac{2k+2}{3k+1} p_0 g_2^\pm |g_0^\pm|^k \operatorname{sgn} g_0^\pm. \end{cases}$$

Воспользовавшись разбиением единицы, согласованным с построенным атласом, можно из восьми динамических систем, заданных в разных картах, получить одну, определенную на всей сфере S^3 и описывающую все траектории, которые получаются с помощью отображения Φ_S из нетривиальных решений уравнения (0.2). Лемма доказана.

2. Типичные и особые решения

Разобьем пространство \mathbb{R}^4 на $16 = 2^4$ пересекающихся только по границам замкнутых множеств в соответствии со всевозможными комбинациями знаков у четырех координат их точек. На аналогичные множества можно разбить и фазовую сферу S^3 .

Введем для этих множеств обозначения $\begin{bmatrix} \pm \\ \pm \\ \pm \\ \pm \end{bmatrix} \subset \mathbb{R}^4$, где на месте каждого знака \pm может стоять либо $+$, либо $-$, либо 0 (для граничных точек). Например,

$$\begin{bmatrix} + \\ + \\ 0 \\ - \end{bmatrix} = \{(y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^4 : y_0 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 = 0, y_3 \leq 0\}.$$

Введем также обозначения

$$\Omega_- = \begin{bmatrix} + \\ + \\ - \\ - \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} + \\ + \\ + \\ - \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} + \\ - \\ + \\ - \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} + \\ - \\ - \\ - \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} - \\ + \\ + \\ - \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} - \\ + \\ - \\ - \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} - \\ - \\ + \\ - \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \\ - \end{bmatrix}$$

и

$$\Omega_+ = \begin{bmatrix} + \\ + \\ + \\ + \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} + \\ + \\ - \\ + \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} + \\ - \\ + \\ + \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} + \\ - \\ - \\ + \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} - \\ + \\ + \\ + \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} - \\ + \\ - \\ + \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} - \\ - \\ + \\ + \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \\ + \end{bmatrix}.$$

Отметим, что множества Ω_- и Ω_+ пересекаются только по границе, покрывают все пространство \mathbb{R}^4 и получают друг из друга с помощью отображения

$$(y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^4 \mapsto (y_0, -y_1, y_2, -y_3) \in \mathbb{R}^4,$$

соответствующего, как преобразование пространства данных Коши, замене знака независимой переменной ($x \mapsto -x$).

Лемма 2.1. Множества $\Omega_- \cap S^3$, $\Omega_+ \cap S^3$, $\Omega_- \cap E$ и $\Omega_+ \cap E$ гомеоморфны полноторию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть множество $\Omega_+ \cap S^3$. Представим Ω_+ в виде объединения двух гомеоморфных подмножеств

$$\Omega_{++} = \begin{bmatrix} + \\ + \\ + \\ + \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} + \\ + \\ - \\ + \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} + \\ - \\ + \\ + \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} + \\ - \\ - \\ + \end{bmatrix}$$

и

$$\Omega_{+-} = \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} - \\ - \\ + \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} - \\ + \\ + \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} + \\ + \\ + \end{bmatrix}.$$

Чтобы понять, как устроено, скажем, $\Omega_{++} \cap S^3$, воспользуемся стереографической проекцией $S^3 \setminus \{(-1, 0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ (см. рис. 1).

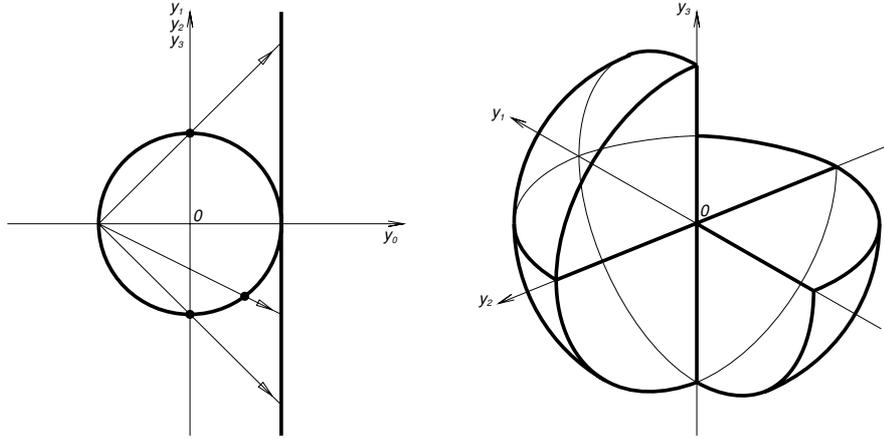


Рис. 1

Образ множества $\Omega_{++} \cap S^3$ при этой проекции целиком лежит в шаре радиуса 2 и имеет вид двух склеенных так, как показано на рисунке, четвертой шара, что топологически эквивалентно 3-мерному шару. То же можно сказать и про $\Omega_{+-} \cap S^3$.

Пересечение $(\Omega_{++} \cap S^3) \cap (\Omega_{+-} \cap S^3) = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ + \\ + \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0 \\ - \\ - \end{bmatrix} \right) \cap S^3$ при стереографической проекции перейдет в объединение двух непересекающихся сферических треугольников (имеются ввиду двумерные фигуры, а не их одномерные границы). Таким образом, множество $\Omega_{+} \cap S^3$ гомеоморфно двум шарам, склеенным по двум непересекающимся треугольникам, т. е. полноторию. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Любая траектория в \mathbb{R}^4 , порожденная нетривиальным решением уравнения (0.2), либо полностью лежит внутри одного из множеств Ω_{-} и Ω_{+} , либо до какого-то момента лежит внутри множества Ω_{-} , затем попадает на его границу, после чего остается внутри множества Ω_{+} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим возможные переходы между введенными ранее множествами $\begin{bmatrix} \pm \\ \pm \\ \pm \end{bmatrix}$ для траекторий, порожденных решениями уравнения (0.2).

Заметим, что внутри множества Ω_{+} возможны только следующие переходы:

$$\begin{bmatrix} + \\ + \\ + \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} + \\ + \\ - \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} + \\ - \\ - \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} - \\ - \\ + \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} - \\ + \\ + \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} + \\ + \\ + \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

внутри множества Ω_{-} — только переходы

$$\begin{bmatrix} + \\ + \\ + \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} + \\ + \\ - \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} + \\ - \\ - \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} - \\ - \\ + \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} - \\ + \\ + \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} + \\ + \\ + \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

а между Ω_- и Ω_+ — переходы

$$\begin{array}{lll} \begin{bmatrix} + \\ + \\ - \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} + \\ - \\ - \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} + \\ - \\ - \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} - \\ + \\ + \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} + \\ - \\ + \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} + \\ + \\ + \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} - \\ - \\ + \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} + \\ - \\ + \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} + \\ - \\ - \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} + \\ + \\ + \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} + \\ + \\ - \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} + \\ + \\ - \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} - \\ - \\ + \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} - \\ + \\ + \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} - \\ + \\ + \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} + \\ + \\ - \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} - \\ + \\ - \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} + \\ + \\ - \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} - \\ + \\ - \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} - \\ + \\ + \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} - \\ - \\ - \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} - \\ + \\ - \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} - \\ + \\ + \end{bmatrix}, & \end{array}$$

причем последние осуществляются только в направлении $\Omega_- \rightarrow \Omega_+$.

Заметим также, что траектория, порожденная нетривиальным решением, не может пересекаться с общей границей множеств Ω_- и Ω_+ более, чем в одной точке.

Таким образом, у траектории, порожденной нетривиальным решением уравнения (0.2), не может быть больше одного перехода между множествами Ω_- и Ω_+ , и этот переход может быть только в направлении из Ω_- в Ω_+ . Лемма доказана.

Лемма 2.3. Среди траекторий в \mathbb{R}^4 , порожденных нетривиальными решениями уравнения (0.2), представлены все три типа, упомянутые в лемме 2.2:

- (i) траектории, полностью лежащие в Ω_- ,
- (ii) траектории, полностью лежащие в Ω_+ ,
- (iii) траектории с единственным переходом $\Omega_- \rightarrow \Omega_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование траекторий типа (iii) очевидно. Достаточно взять любое решение уравнения (0.2) с начальными данными, которым соответствует какая-либо точка на пересечении $\Omega_- \cap \Omega_+$. Например, решение с начальными данными $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 1$ порождает траекторию с переходом $\begin{bmatrix} + \\ - \\ + \\ + \end{bmatrix} \subset \Omega_- \rightarrow \begin{bmatrix} + \\ + \\ + \\ + \end{bmatrix} \subset \Omega_+$.

Если существует решение $y(x)$ уравнения (0.2), порождающее траекторию, полностью лежащую внутри Ω_- , то функция $z(x) = y(-x)$ также является решением уравнения (0.2), но соответствующая траектория будет полностью лежать уже внутри Ω_+ . Таким образом, осталось доказать только существование траектории типа (i).

Предположим, таких траекторий нет. Тогда нет и соответствующих траекторий на сфере, полностью лежащих внутри $\Omega_+ \cap S^3$. Значит, выпустив траекторию из любой точки $s \in \Omega_- \cap S^3$, мы рано или поздно попадем на границу $\partial\Omega_- \cap S^3$. Тем самым определено отображение $\Omega_- \cap S^3 \rightarrow \partial\Omega_- \cap S^3$.

Покажем, что это отображение непрерывно. Для этого представим его в виде

$$s \in \Omega_- \cap S^3 \mapsto \mathbf{Traj}_{\mathbf{p}_0}(s, \xi(s)) \in \partial\Omega_- \cap S^3.$$

Здесь $\mathbf{Traj}_{\mathbf{p}_0}(s, t)$ — точка в S^3 , в которую в момент времени t попадает траектория динамической системы на сфере, вышедшая в нулевой момент из точки s . Отображение $\mathbf{Traj}_{\mathbf{p}_0} : S^3 \times \mathbb{R} \rightarrow S^3$ в соответствии с общими свойствами решений дифференциальных уравнений непрерывно.

Функция $\xi : \Omega_- \cap S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ определяет значение времени t , при котором траектория, выходящая при $t_0 = 0$ из заданной точки множества Ω_- , попадает на границу $\partial\Omega_-$. Докажем непрерывность этой функции.

Пусть $\xi(s_1) = t_1$ и $\varepsilon > 0$. Так как точка $\mathbf{Traj}_{\mathbf{p}_0}(s_1, t_1 + \varepsilon)$ лежит внутри множества Ω_+ , то существует такая окрестность U_+ точки s_1 , что для всех $s \in U_+$ точка $\mathbf{Traj}_{\mathbf{p}_0}(s, t_1 + \varepsilon)$ также лежит внутри множества Ω_+ , а поэтому для всех $s \in U_+$ выполняется неравенство $\xi(s) < t_1 + \varepsilon$.

Аналогично, так как $\mathbf{Traj}_{\mathbf{p}_0}(s_1, t_1 - \varepsilon)$ лежит внутри Ω_- , то существует такая окрестность U_- точки s_1 , что для всех $s \in U_-$ точка $\mathbf{Traj}_{\mathbf{p}_0}(s, t_1 - \varepsilon)$ также лежит внутри Ω_- и выполняется неравенство $\xi(s) > t_1 - \varepsilon$.

Таким образом, для всех точек $s \in U_- \cap U_+$ имеем $|\xi(s) - t_1| < \varepsilon$, что доказывает непрерывность функции $\xi(s)$ в произвольной точке $s_1 \in \Omega_- \cap S^3$.

Итак, получено непрерывное отображение $\Omega_- \cap S^3 \rightarrow \partial\Omega_- \cap S^3$, ограничение которого на $\partial\Omega_- \cap S^3$ является тождественным отображением. Или, другими словами, тождественным отображением является его композиция с вложением $\partial\Omega_- \cap S^3 \hookrightarrow \Omega_- \cap S^3 \rightarrow \partial\Omega_- \cap S^3$. Но в этом случае (см., например, [10]) тождественным гомоморфизмом должна стать и соответствующая композиция гомоморфизмов групп гомологий $H_2(\partial\Omega_- \cap S^3) \rightarrow H_2(\Omega_- \cap S^3) \rightarrow H_2(\partial\Omega_- \cap S^3)$.

Учитывая то, что $\Omega_- \cap S^3$ гомеоморфна полноторию, а $\partial\Omega_- \cap S^3$ — тору, последняя композиция принимает вид $\mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}$ и, очевидно, не может быть тождественным отображением. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 2.4. Пусть $y(x)$ — нетривиальное решение уравнения (0.2), максимально продолженное вправо. Тогда ни само решение, ни любая из его производных $y'(x)$, $y''(x)$, $y'''(x)$ не может сохранять постоянный знак в окрестности правого конца области определения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем доказательство для самого решения. Для производных оно совершенно аналогично.

Предположим решение $y(x)$ задано на конечном или бесконечном интервале (x_-, x_+) и является положительным в некоторой окрестности точки x_+ . Тогда его 3-я производная в силу уравнения (0.2) монотонно убывает и поэтому имеет конечный или бесконечный предел при $x \rightarrow x_+ - 0$. Отсюда следует, что она является знакопостоянной в некоторой окрестности точки x_+ . Повторяя эти рассуждения для 2-й и 1-й производных, а затем и для самого решения, получим, что все они монотонны в некоторой окрестности точки x_+ и стремятся при $x \rightarrow x_+$ к некоторому конечному или бесконечному пределу.

Пусть $x_+ < +\infty$. Если решение или хотя бы одна из упомянутых производных имеет конечный предел, то, интегрируя их на конечном отрезке и принимая во внимание уравнение (0.2), получим конечность всех остальных пределов, что противоречит тому, что решение является максимально продолженным вправо. Если же все пределы бесконечны, то они должны иметь одинаковый знак, что противоречит уравнению (0.2).

Пусть теперь $x_+ = +\infty$. Если решение или хотя бы одна из упомянутых производных имеет ненулевой предел, то, интегрируя их и принимая во внимание уравнение (0.2), получим бесконечность всех пределов. В этом случае они должны иметь одинаковый знак, что противоречит уравнению (0.2). Если же все пределы равны нулю, то само решение, будучи в окрестности точки x_+ положительным, убывает к нулю. Поэтому его производная в некоторой окрестности отрицательна и, следовательно, возрастает к нулевому пределу. Аналогично, 2-я производная положительна и убывает, а 3-я, как и 1-я, отрицательна и возрастает, что с учетом положительности самого решения, снова противоречит уравнению (0.2).

Полученные противоречия доказывают лемму.

Таким образом, траектория, которую порождает в \mathbb{R}^4 нетривиальное решение уравнения (0.2), не может при возрастании аргумента все время оставаться в одном из множеств $\begin{bmatrix} \pm \\ \pm \\ \pm \\ \pm \end{bmatrix}$.

Следствие 2.1. Все максимально продолженные решения уравнения (0.2),

как и все их производные, являются колеблющимися как при возрастании, так и при убывании аргумента.

Заметим, что в соответствии с леммой 2.2 можно выделить два типа поведения (при возрастании аргумента) колеблющихся решений уравнения (0.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Колеблющееся решение уравнения (0.2) будем называть *типичным (при возрастании аргумента)*, если начиная с некоторого момента смена знаков самого решения и его производных происходит по схеме (2.1), и *особым*, если по схеме (2.2).

3. Типичное асимптотическое поведение решений

В этом разделе рассматривается поведение при возрастании аргумента типичных решений уравнения (0.2). Другими словами, рассматриваются нетривиальные решения, у которых соответствующие кривые в \mathbb{R}^4 полностью или начиная с некоторого момента лежат в множестве Ω_+ .

Так как для таких траекторий возможны (быть может, начиная с некоторого момента) только переходы типа (2.1), то существует возрастающая последовательность точек $x_0''' < x_0'' < x_0' < x_0 < x_1''' < x_1'' < x_1' < x_1 < \dots$, в которых $y(x_j) = y'(x_j) = y''(x_j) = y'''(x_j) = 0$ ($j = 1, 2, \dots$), причем в каждой из них обращается в нуль только одна из функций $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$, $y'''(x)$ (см. рис. 2). Будем называть точки x_j , x_j' , x_j'' , x_j''' *узловыми точками* решения. Для решений, у которых соответствующая кривая полностью лежит в Ω_+ , последовательность узловых точек может быть проиндексирована номерами из \mathbb{Z} (включая отрицательные).

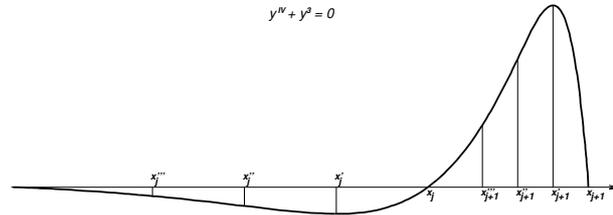


Рис. 2

Лемма 3.1 Для типичного решения $y(x)$ уравнения (0.2) в узловых точках выполняются неравенства

$$|y(x_j')| < |y(x_{j+1}''')| < |y(x_{j+1}'')| < |y(x_{j+1}')|, \quad (3.1)$$

$$|y'(x_j'')| < |y'(x_j)| < |y'(x_{j+1}''')| < |y'(x_{j+1}'')|, \quad (3.2)$$

$$|y''(x_j''')| < |y''(x_j')| < |y''(x_j)| < |y''(x_{j+1}''')|, \quad (3.3)$$

$$|y'''(x_j)| < |y'''(x_{j+1}'')| < |y'''(x_{j+1}')| < |y'''(x_{j+1})|. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\frac{p_0}{k+1} \left(|y(x_j')|^{k+1} - |y(x_{j+1}''')|^{k+1} \right) = -p_0 \int_{x_j'}^{x_{j+1}'''} y'(x) |y(x)|^{k-1} y(x) dx$$

$$= \int_{x'_j}^{x''_{j+1}} y'(x) y^{IV}(x) dx = y'(x) y'''(x) \Big|_{x'_j}^{x''_{j+1}} - \int_{x'_j}^{x''_{j+1}} y''(x) y'''(x) dx < 0,$$

так как $y'(x'_j) = y'''(x''_{j+1}) = 0$, а на отрезке $[x'_j, x''_{j+1}]$ выполняется неравенство $y''(x)y'''(x) > 0$. Отсюда вытекает первое из неравенств (3.1), а остальные следуют из неравенства $y(x)y'(x) > 0$, которое выполняется на интервале (x''_{j+1}, x'_{j+1}) .

Аналогично для первого из неравенств (3.2):

$$y'(x''_j)^2 - y'(x_j)^2 = -2 \int_{x''_j}^{x_j} y'(x)y''(x) dx = -2y(x)y''(x) \Big|_{x''_j}^{x_j} + 2 \int_{x''_j}^{x_j} y(x)y'''(x) dx < 0,$$

так как $y(x_j) = y''(x''_j) = 0$, а на отрезке $[x''_j, x_j]$ выполняется неравенство $y(x)y'''(x) < 0$. Остальные следуют из неравенства $y'(x)y''(x) > 0$, которое выполняется на интервале (x_j, x''_{j+1}) .

Для доказательства первого из неравенств (3.3) имеем

$$\begin{aligned} y''(x''_j)^2 - y''(x'_j)^2 &= -2 \int_{x''_j}^{x'_j} y''(x)y'''(x) dx \\ &= -2y'(x)y'''(x) \Big|_{x''_j}^{x'_j} + 2 \int_{x''_j}^{x'_j} y'(x)y^{IV}(x) dx < 0, \end{aligned}$$

так как $y'(x'_j) = y'''(x''_j) = 0$, а на отрезке $[x''_j, x'_j]$ выполняется неравенство $y'(x)y(x) > 0$, а, следовательно, и $y'(x)y^{IV}(x) < 0$. Остальные следуют из неравенства $y''(x)y'''(x) > 0$, которое выполняется на интервале (x'_j, x''_{j+1}) .

Наконец, для первого из неравенств (3.4):

$$\begin{aligned} y'''(x_j)^2 - y'''(x''_{j+1})^2 &= -2 \int_{x_j}^{x''_{j+1}} y'''(x)y^{IV}(x) dx = 2p_0 \int_{x_j}^{x''_{j+1}} y'''(x)y(x) |y(x)|^{k-1} dx \\ &= 2p_0 y''(x)y(x) |y(x)|^{k-1} \Big|_{x_j}^{x''_{j+1}} - 2kp_0 \int_{x_j}^{x''_{j+1}} y''(x)y'(x) |y(x)|^{k-1} dx < 0, \end{aligned}$$

так как $y(x_j) = y''(x''_{j+1}) = 0$, а на отрезке $[x_j, x''_{j+1}]$ выполняется неравенство $y'(x)y''(x) > 0$. Остальные следуют из неравенства $y'''(x)y^{IV}(x) > 0$, которое в свою очередь следует из неравенства $y'''(x)y(x) < 0$, выполняющегося на интервале (x''_{j+1}, x_{j+1}) . Лемма доказана.

Таким образом, модули локальных экстремумов типичного решения уравнения (0.2) образуют строго возрастающую последовательность. Это же справедливо для локальных экстремумов его первой, второй и третьей производных.

В дальнейшем нам понадобятся дополнительные обозначения. Пусть

$$\Omega_+^1 = \mathbf{Traj}_1(\Omega_+ \cap S^3, 1) \subset S^3.$$

Это компактное множество, полностью лежащее внутри множества Ω_+ , и в нем, начиная с некоторого момента, лежат траектории всех максимально продолженных типичных решений уравнения (0.2) при $p_0 = 1$. Что касается решений, которые порождают в \mathbb{R}^4 кривые, полностью лежащие в Ω_+ , то соответствующие им траектории на сфере полностью лежат в Ω_+^1 .

Определим также компактные множества

$$K_i = \{ a \in \Omega_+^1 : a_i = 0 \}.$$

Далее, зададим функции $\xi_j : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 0, 1, 2, 3$, переводящие произвольную точку $a \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ в наименьшее положительное значение x , при котором обращается в нуль производная $y^{(j)}(x)$ решения задачи Коши

$$\begin{cases} y^{IV}(x) + y(x)|y(x)|^{k-1} = 0, \\ y^{(j)}(0) = a_j, \quad j = 0, 1, 2, 3. \end{cases} \quad (3.5)$$

Кроме того, с каждым решением $y(x)$ уравнения (0.2) свяжем функцию

$$F_y(x) = |\rho y(x)|^{\frac{1}{4}} + |\rho y'(x)|^{\frac{1}{k+3}} + |\rho y''(x)|^{\frac{1}{2k+2}} + |\rho y'''(x)|^{\frac{1}{3k+1}}, \quad \text{где } \rho = p_0^{\frac{1}{k-1}}.$$

В обозначении F_y не указывается p_0 , так как не равная тождественно нулю функция не может быть решением уравнения (0.2) с различными p_0 .

Лемма 3.2. *Ограничения $\xi_i|_{K_j}$, $i, j = 0, 1, 2, 3$, непрерывны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем непрерывность функции ξ_i в точке $a \in \Omega_+$ при $a_i > 0$. Пусть $\xi_i(a) = x_i$ и $\varepsilon > 0$.

Уменьшив при необходимости ε , можно считать, что $\varepsilon < x_i$ и что производная $y^{(i)}(x)$ решения задачи (3.5) удовлетворяет неравенству $y^{(i)}(x - \varepsilon) > 0$ на отрезке $[0, x_i - \varepsilon]$, а также неравенству $y^{(i)}(x_i + \varepsilon) < 0$. В этом случае у точки a найдется такая окрестность $U \subset \Omega_+$, что эти же неравенства выполняются для всех решений задачи (3.5) с данными Коши $a' \in U$. Поэтому $|\xi_i(a') - x_i| < \varepsilon$. Непрерывность функции ξ_i в точке $a \in \Omega_+$ при $a_i > 0$ доказана.

Точно так же доказывается непрерывность функции ξ_i в точке $a \in \Omega_+$ при $a_i < 0$. Так как $a_i \neq 0$ при $a \in K_j$, $i \neq j$, то тем самым доказана непрерывность ограничения $\xi_i|_{K_j}$ при $i \neq j$.

Для случая $\xi_i|_{K_i}$ заметим, что между двумя нулями производной $y^{(i)}(x)$ найдется точка x_j , в которой обращается в нуль какая-либо другая производная $y^{(j)}(x)$. Данные Коши в точке x_j , ввиду непрерывности ограничения $\xi_j|_{K_i}$, непрерывно зависят от $a \in K_i$, а от них в свою очередь непрерывно зависит ограничение $\xi_i|_{K_j}$. Все вместе эти факты доказывают непрерывность ограничения $\xi_i|_{K_i}$. Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Для любого $k > 1$ существуют такие $Q > q > 1$, что для любого типичного решения $y(x)$ уравнения (0.2), начиная с некоторого номера j ,*

значения всех выражений

$$\begin{array}{cccc} \left| \frac{y(x''_{j+1})}{y(x'_j)} \right|^{\frac{1}{4}}, & \left| \frac{y(x''_j)}{y(x''_j)} \right|^{\frac{1}{4}}, & \left| \frac{y(x'_j)}{y(x''_j)} \right|^{\frac{1}{4}}, & \left| \frac{y'(x_j)}{y'(x'_j)} \right|^{\frac{1}{k+3}}, \\ \left| \frac{y'(x''_{j+1})}{y'(x'_j)} \right|^{\frac{1}{k+3}}, & \left| \frac{y'(x''_j)}{y'(x''_j)} \right|^{\frac{1}{k+3}}, & \left| \frac{y''(x'_j)}{y''(x''_j)} \right|^{\frac{1}{2k+2}}, & \left| \frac{y''(x_j)}{y''(x'_j)} \right|^{\frac{1}{2k+2}}, \\ \left| \frac{y''(x''_{j+1})}{y''(x'_j)} \right|^{\frac{1}{2k+2}}, & \left| \frac{y'''(x''_{j+1})}{y'''(x'_j)} \right|^{\frac{1}{3k+1}}, & \left| \frac{y'''(x'_j)}{y'''(x'_j)} \right|^{\frac{1}{3k+1}}, & \left| \frac{y'''(x_j)}{y'''(x'_j)} \right|^{\frac{1}{3k+1}} \end{array}$$

лежат на отрезке $[q, Q]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим непрерывные функции $\psi_{ijl} : K_i \rightarrow \mathbb{R}$ (все индексы i, j, l от 0 до 3 и попарно различны), которые переводят точку $a \in K_i$ в отношение значений модуля j -й производной решения $y(x)$ задачи (3.5) в нуле и следующей за ним точке, в которой обращается в нуль l -я производная, т. е. $\psi_{ijl}(a) = \left| \frac{a_j}{y^{(j)}(\xi_l(a))} \right|$ (числитель и знаменатель при $a \in K_i$ не равны нулю).

Ввиду леммы 3.1 любая функция ψ_{ijl} во всех точках компактного множества K_i положительна и строго меньше 1. Поэтому $0 < \inf_{K_i} \psi_{ijl}(a) \leq \sup_{K_i} \psi_{ijl}(a) < 1$.

Рассмотрим теперь произвольное типичное решение $y(x)$ уравнения (0.2) и две его узловых точки, скажем, x'_j и x''_{j+1} , с достаточно большими номерами, чтобы соответствующие им точки в S^3 принадлежали множеству Ω_+^1 . В этом случае можно подобрать такие константы $A \neq 0$ и $B > 0$, что функция $z(x) = Ay(Bx + x'_j)$ является решением задачи (3.5) при $a \in K_1$. Действительно, это равносильно существованию таких $A \neq 0$ и $B > 0$, что

$$\begin{cases} |A|^{k-1} = B^4 p_0, \\ (Ay(x'_j))^2 + (AB^2 y''(x'_j))^2 + (AB^3 y'''(x'_j))^2 = 1, \end{cases}$$

а это в свою очередь вытекает из существования корня A уравнения

$$(y(x'_j))^2 A^2 + \frac{(y''(x'_j))^2}{p_0} |A|^{k+1} + \frac{(y'''(x'_j))^2}{p_0^{\frac{3}{2}}} |A|^{\frac{3k+1}{2}} = 1.$$

Выражение $\left| \frac{y(x''_{j+1})}{y(x'_j)} \right|^{\frac{1}{4}}$ будет таким же, как у функции $z(x)$ в точках $\xi_3(a)$ и 0, где $a_0 = |A|$, $a_1 = 0$, $a_2 = |A| B^2$, $a_3 = |A| B^3$, т. е. равно $\psi_{103}(a)^{-\frac{1}{4}}$. Положив $q = \left(\sup_{K_1} \psi_{103}(a) \right)^{-\frac{1}{4}}$, $Q = \left(\inf_{K_1} \psi_{103}(a) \right)^{-\frac{1}{4}}$, получим утверждение леммы для первого выражения и аналогично для остальных. Из двенадцати значений q , полученных для них, выберем наименьшее (которое все равно больше 1), а из двенадцати значений Q — наибольшее. Лемма доказана.

Лемма 3.4 Область определения любого типичного при возрастании аргумента решения $y(x)$ уравнения (0.2) ограничена справа. При этом, если x^* — правый конец области определения, то

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x^*} |y^{(n)}(x)| = +\infty, \quad n = 0, 1, 2, 3. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 3.3 следует, что модули соседних локальных экстремумов типичного решения, начиная с некоторого номера J , удовлетворяют неравенству $|y(x'_{j+1})| \geq q^{12} |y(x'_j)|$ при некотором $q > 1$, откуда

$$|y(x'_j)| \geq q^{12(j-J)} |y(x'_J)|. \quad (3.7)$$

Отсюда, в частности, следует (3.6) для $n = 0$ (для остальных n — аналогично).

С другой стороны, как показано в [8], существует такая зависящая только от k и p_0 константа $C > 0$, что положительные решения уравнения (0.2), заданные на отрезке $[a, b]$, удовлетворяют неравенству $|y(x)| \leq C |b - a|^{-\frac{4}{k-1}}$. Ясно, что то же относится и к отрицательным решениям. Поэтому для локальных экстремумов справедлива оценка $|y(x'_j)| \leq C (x_j - x_{j-1})^{-\frac{4}{k-1}}$, которая вместе с (3.7) приводит к неравенству $(x_j - x_{j-1}) \leq Q^{-3(k-1)(j-J)} \left| \frac{C}{y(x'_j)} \right|^{\frac{k-1}{4}}$.

Так как $Q^{-3(k-1)} < 1$, то ряд $\sum_{j=J}^{\infty} (x_j - x_{j-1})$ сходится, откуда следует ограниченность области определения справа. Лемма доказана.

Лемма 3.5 Для любого $k > 1$ существуют такие положительные константы $m \leq M$, что у любого типичного решения $y(x)$ уравнения (0.2) расстояние между двумя соседними точками локального экстремума x'_j и x'_{j+1} , начиная с некоторого момента, удовлетворяет оценкам

$$m \leq (x'_{j+1} - x'_j) F_y(x'_j)^{k-1} \leq M. \quad (3.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E_+ = \Phi_E(\Omega_+^1)$ — полностью лежащее внутри Ω_+ компактное подмножество множества E , определенного в (1.1). Положим

$$m = \inf \{ \xi_1(a) : a \in E_+, a_1 = 0 \} > 0,$$

$$M = \sup \{ \xi_1(a) : a \in E_+, a_1 = 0 \} < \infty.$$

Пусть $y(x)$ — типичное решение $y(x)$ уравнения (0.2), а x'_j и x'_{j+1} — его соседние точки локального экстремума. Можно подобрать такие положительные константы A и B , что функция $z(x) = Ay(Bx + x'_j)$ является решением уравнения (0.2) при $p_0 = 1$, а ее данным Коши в нуле соответствует некоторая точка из E , т. е. чтобы выполнялось равенство $F_z(0) = 1$. Для этого достаточно найти положительные решения системы

$$\begin{cases} A^{k-1} = B^4 p_0, \\ |Ay(x'_j)|^{\frac{1}{4}} + |AB y'(x'_j)|^{\frac{1}{k+3}} + |AB^2 y''(x'_j)|^{\frac{1}{2k+2}} + |AB^3 y'''(x'_j)|^{\frac{1}{3k+1}} = 1, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{aligned} A &= \left(|y(x'_j)|^{\frac{1}{4}} + \left| \frac{y'(x'_j)}{p_0^{\frac{1}{4}}} \right|^{\frac{1}{k+3}} + \left| \frac{y''(x'_j)}{p_0^{\frac{1}{2}}} \right|^{\frac{1}{2k+2}} + \left| \frac{y'''(x'_j)}{p_0^{\frac{3}{4}}} \right|^{\frac{1}{3k+1}} \right)^{-4}, \\ B &= \left(|\rho y(x'_j)|^{\frac{1}{4}} + |\rho y'(x'_j)|^{\frac{1}{k+3}} + |\rho y''(x'_j)|^{\frac{1}{2k+2}} + |\rho y'''(x'_j)|^{\frac{1}{3k+1}} \right)^{-(k-1)} \\ &= F_y(x'_j)^{-(k-1)}. \end{aligned}$$

Кроме того, если у локальных экстремумов достаточно большие номера, точка, задаваемая в \mathbb{R}^4 данными Коши функции $z(x)$ в нуле, принадлежит E_+ . В таком случае следующая за нулем точка локального экстремума функции $z(x)$

отстоит от нуля на расстояние $L \in [m, M]$, а соответствующее расстояние для $y(x)$ равно LB и удовлетворяет условию (3.8). Лемма доказана.

Лемма 3.6 Для любых $k > 1$ и $p_0 > 0$ найдется такая константа $\theta > 0$, что локальные экстремумы любого типичного решения $y(x)$ уравнения (0.2), начиная с некоторого момента, удовлетворяют неравенству

$$|y(x'_j)| \geq \theta F_y(x'_j)^4.$$

Доказательство. Пусть $y(x)$ — типичное решение $y(x)$ уравнения (0.2), а x'_j — его точка локального экстремума с достаточно большим номером. Положим $\theta = \inf \{|a_0| : a \in E_+, a_1 = 0\} > 0$ и подберем такую константу $\lambda > 0$, что у другого решения $z(x) = \lambda^4 y(\lambda^{k-1}x + x'_j)$ уравнения (0.2) данным Коши в нуле соответствует некоторая точка из E_+ . Тогда $F_z(0) = 1$ и $|z(0)| \geq \theta$. Так как $z(0) = \lambda^4 y(x'_j)$ и $F_z(0) = \lambda F_y(x'_j)$, то лемма доказана.

Замечание. Для типичных решений уравнения (0.2), у которых соответствующие кривые полностью лежат в Ω_+ , утверждения лемм 3.3, 3.5 и 3.6 выполняются на всей области определения, а не «начиная с некоторого момента».

Теорема 3.1 Для любых $k > 1$ и $p_0 > 0$ найдутся такие положительные константы C_1 и C_2 , что локальные экстремумы любого типичного максимально продолженного вправо решения $y(x)$ уравнения (0.2) в некоторой окрестности правого конца области определения x^* удовлетворяет неравенствам

$$C_1 (x^* - x'_j)^{-\frac{4}{k-1}} \leq |y(x'_j)| \leq C_2 (x^* - x'_j)^{-\frac{4}{k-1}}.$$

Доказательство. Пусть x'_j — такая точка локального экстремума решения $y(x)$, что для нее и последующих локальных экстремумов выполняются утверждения лемм 3.3, 3.5 и 3.6.

Согласно этим леммам, для $j \geq J$ имеем

$$x'_{j+1} - x'_j \leq M F_y(x'_j)^{-(k-1)} \leq M F_y(x'_j)^{-(k-1)} q^{-3(k-1)(j-J)},$$

откуда
$$x^* - x'_j = \sum_{j=J}^{\infty} (x_{j+1} - x_j) \leq \frac{M F_y(x'_j)^{-(k-1)}}{1 - q^{-3(k-1)}},$$

$$|y(x'_j)| (x^* - x'_j)^{\frac{4}{k-1}} \leq \frac{F_y(x'_j)^4}{\rho} \left(\frac{M F_y(x'_j)^{-(k-1)}}{1 - q^{-3(k-1)}} \right)^{\frac{4}{k-1}} = \left(\frac{M p_0^{-\frac{1}{4}}}{1 - q^{-3(k-1)}} \right)^{\frac{4}{k-1}}.$$

Аналогично с другой стороны: $x'_{j+1} - x'_j \geq m F_y(x'_j)^{-(k-1)} Q^{-3(k-1)(j-J)}$, откуда

$$|y(x'_j)| (x^* - x'_j)^{\frac{4}{k-1}} \geq \theta F_y(x'_j)^4 \left(\frac{m F_y(x'_j)^{-(k-1)}}{1 - Q^{-3(k-1)}} \right)^{\frac{4}{k-1}} = \theta \left(\frac{m}{1 - Q^{-3(k-1)}} \right)^{\frac{4}{k-1}}.$$

Теорема доказана.

4. Асимптотическая классификация решений

В этом разделе рассматривается поведение нетривиальных решений уравнения (0.2) в не рассмотренных ранее случаях и приводится обобщающий результат.

Сначала опишем поведение при убывании аргумента решений уравнения (0.2), порождающих в \mathbb{R}^4 кривые, полностью лежащие внутри Ω_+ .

Лемма 4.1. Максимально продолженное влево нетривиальное решение уравнения (0.2), у которого смены знаков производных происходят исключительно по схеме (2.1), имеет неограниченную слева область определения, стремится при $x \rightarrow -\infty$ к нулю вместе со своими производными $y'(x), \dots, y^{IV}(x)$, а расстояние между его соседними нулями при $x \rightarrow -\infty$ монотонно стремится к ∞ .

С помощью замены $x \mapsto -x$ получается описание поведения особых решений при возрастании аргумента. И в результате имеем полное описание всех типов асимптотического поведения максимально продолженных решений уравнения (0.2).

Теорема 4.3. При $k > 1$ и $p_0 > 0$ все максимально продолженные решения уравнения (0.2) в соответствии с их асимптотическим поведением делятся на следующие четыре типа (см. рис. 3).

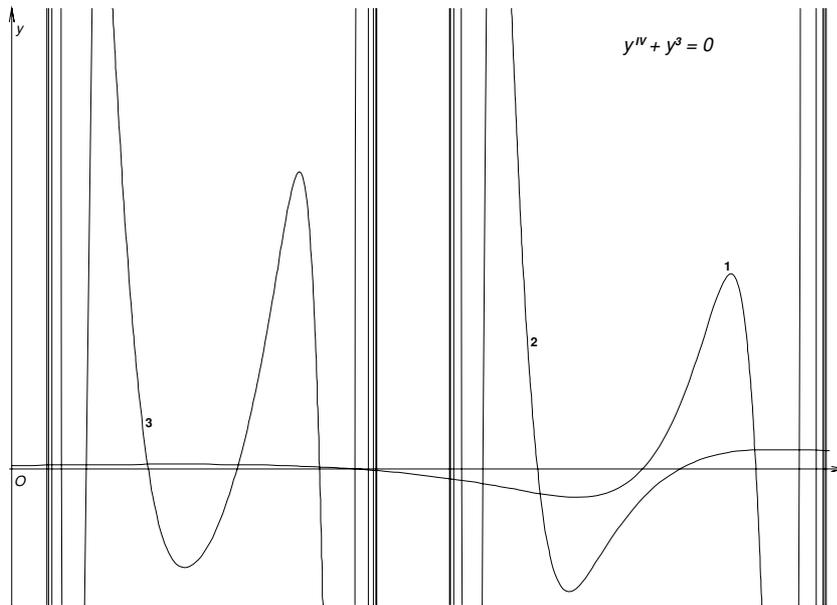


Рис. 3

0. Тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

1. Колеблющиеся решения, заданные на полупрямой $(-\infty, b)$. Расстояние между соседними нулями у них неограниченно возрастает при убывании аргумента и стремится к нулю при его возрастании. Сами решения и их производные удовлетворяют соотношениям $\lim_{x \rightarrow -\infty} y^{(j)}(x) = 0$, $\overline{\lim}_{x \rightarrow b} |y^{(j)}(x)| = \infty$, $j = 0, 1, 2, 3$, а в точках локального экстремума —

$$C_1 |x - b|^{-\frac{4}{k-1}} \leq |y(x)| \leq C_2 |x - b|^{-\frac{4}{k-1}} \quad (4.1)$$

с зависящими только от k и p_0 положительными константами C_1 и C_2 .

2. Колеблющиеся решения, заданные на полупрямой $(b, +\infty)$. Расстояние между соседними нулями у них неограниченно возрастает при возрастании аргумента и стремится к нулю при его убывании. Сами решения и их производные удовлетворяют соотношениям $\lim_{x \rightarrow +\infty} y^{(j)}(x) = 0$, $\overline{\lim}_{x \rightarrow b} |y^{(j)}(x)| = \infty$, $j = 0, 1, 2, 3$, а в точках локального экстремума — соотношениям (4.1) с зависящими только от k и p_0 положительными константами C_1 и C_2 .

3. Колеблющиеся решения, заданные на ограниченном интервале (b', b'') . Для них и их производных выполняются соотношения

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow b'} |y^{(j)}(x)| = \overline{\lim}_{x \rightarrow b''} |y^{(j)}(x)| = \infty, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4,$$

а в точках локального экстремума, достаточно близких к любому концу интервала — соотношения (4.1) соответственно с $b = b'$ или $b = b''$ и с зависящими только от k и p_0 положительными константами C_1 и C_2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Асташова И. В. Об асимптотическом поведении решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений // Доклады расширенных заседаний семинара ИПМ им. И. Н. Векуа. Тбилиси: ТГУ, 1985. Т. 1, № 3. С. 9–11.
2. Асташова И. В. Об асимптотическом поведении решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений // Усп. мат. наук. 1985. Т. 40, вып. 5(245). С. 197.
3. Асташова И. В. Об асимптотическом поведении решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений // Диффер. уравн. 1986. Т. 22, № 12. С. 2185.
4. Асташова И. В. Об асимптотическом поведении знакопеременных решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядка // Доклады расширенных заседаний семинара ИПМ им. И. Н. Векуа. Тбилиси: ТГУ, 1988. Т. 3, № 3. С. 9–12.
5. Astashova I. V., Filinovskii A. V., Kondratiev V. A., Muravei L. A. Some Problems in the Qualitative Theory of Differential Equations // J. Natural Geometry. Jnan Bhawan, London, 2003. V. 23, N 1–2. P. 1–126.
6. Асташова И. В. Применение динамических систем к исследованию асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков // Современная математика и ее приложения. 2003. Т. 8. С. 3–33.
7. Astashova I. V. Application of Dynamical Systems to the Study of Asymptotic Properties of Solutions to Nonlinear Higher-Order Differential Equations // J. Math. Sciences. Springer Science, Business Media, 2005. V. 126, N 5. P. 1361–1391.
8. Асташова И. В. О равномерных оценках решений квазилинейных дифференциальных уравнений // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12, № 5. С. 3–9.
9. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1954.
10. Вик Дж. У. Теория гомологий. М.: МЦНМО, 2005.
11. Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990. 432 с.
12. Кигурадзе И. Т. О взрывных кнезеровских решениях нелинейных дифференциальных уравнений высших порядков // Диффер. уравн. 2001. Т. 37, № 6. С. 735–743.
13. Kozlov V. A. On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations // Ark. Mat. 1999. V. 37, N 2. P.305–322.
14. Кондратьев В. А., Самовол В. С. О некоторых асимптотических свойствах решений уравнений типа Эмдена – Фаулера // Диффер. уравн. 1981. Т. 17, № 4. С. 749–750.
15. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 2. М.: ИЛ, 1954.
16. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
17. Чантурия Т. А. О существовании сингулярных и неограниченных колеблющихся решений дифференциальных уравнений типа Эмдена – Фаулера // Диффер. уравн. 1992. Т. 28, № 6. С.1009–1022.

Асташова Ирина Викторовна
 Россия, Москва, Московский государственный университет экономики,
 статистики и информатики
 ast@diffiety.ac.ru