Неклассические уравнения математической физики
2007. С. 56–68

УДК 517.956.22

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

А. О. Бабаян

В работе описан эффективный метод решения задачи Дирихле для неправильно эллиптического уравнения четвертого порядка в единичном круге. Определено количество линейно независимых решений однородной задачи, а также получены достаточные условия, близкие к необходимым, при которых неоднородная задача имеет решение.

1. Постановка задачи и формулировка результатов

Пусть $D = \{z : \ |z| < 1\}$ — единичный круг комплексной плоскости, и $\Gamma = \partial D$ — его граница. В области D рассматривается дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\sum_{k=0}^{4} A_k \frac{\partial^4 u}{\partial x^k \partial y^{4-k}}(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in D. \tag{1}$$

Здесь $A_0 \neq 0$ и A_k $(k = 0, \ldots, 4)$ такие комплексные постоянные, что корни λ_k характеристического уравнения

$$\sum_{k=0}^{4} A_k \lambda^{4-k} = 0 \tag{2}$$

удовлетворяют условию

$$\Im\lambda_j > 0, \quad j = 1,2,3, \quad \Im\lambda_4 < 0. \tag{3}$$

Решение u уравнения (1) ищется в классе $C^4(D) \bigcap C^{(1,\alpha)}(D \bigcup \Gamma)$ и на границе Γ удовлетворяет условиям Дирихле

$$u\Big|_{\Gamma} = f(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{\Gamma} = g(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma. \tag{4}$$

где $f \in C^{(1,\alpha)}(\Gamma)$, $g \in C^{(\alpha)}(\Gamma)$ — заданные функции.

Из (3) следует, что уравнение (1) является неправильно эллиптическим. Как было показано в [1], для таких уравнений классические краевые задачи не являются нетеровыми. В [2] были исследованы краевые задачи для неправильно эллиптических уравнений второго порядка и описаны более узкие классы функций, в которых данные задачи являются нетеровыми. Вопросу однозначной разрешимости задачи Дирихле для однородного уравнения четвертого порядка посвящена работа [3]. В [4] получены условия разрешимости граничных задач для

неоднородного полианалитического уравнения. Задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения высокого порядка была изучена в [5]. В настоящей работе, используя представление общего решения уравнения (1), полученное в [5], исследуются однородная и неоднородная задачи (1), (4).

В первом параграфе рассматривается случай $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Для формулировки полученных результатов представим (1) и (4) в комплексной форме, используя операторы $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Уравнение (1) примет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^3 \left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) u = 0, \quad (x,y) \in D, \tag{5}$$

где $|\mu| < 1$, $|\nu| < 1$ ($\mu = \frac{i-\lambda_k}{i+\lambda_k}$, $k = 1,2,3$, $\nu = \frac{i+\lambda_4}{i-\lambda_4}$), а граничные условия (4) заменяются эквивалентными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\Big|_{\Gamma} = F(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{\Gamma} = G(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma, \tag{6}$$

$$u(1,0) = f(1,0). \tag{7}$$

Здесь функции $F \in C^{(\alpha)}(\Gamma)$ и $G \in C^{(\alpha)}(\Gamma)$ однозначно определяются по f и g

$$F(x,y) = \frac{z}{2}\left(g(x,y) + i\frac{\partial f}{\partial \varphi}(x,y)\right),$$

$$G(x,y) = \frac{\bar{z}}{2}\left(g(x,y) - i\frac{\partial f}{\partial \varphi}(x,y)\right), \quad z = re^{i\varphi} \in \Gamma. \tag{8}$$

Разложим эти функции в ряд Фурье на Γ и обозначим $F_\pm$ и $G_\pm$ компоненты разложений, допускающие аналитическое продолжение в D и $\mathbf{C}\backslash(D\bigcup\Gamma)$ соответственно

$$F(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{-k}z^k + \sum_{k=0}^{\infty} F_k z^k \equiv F_-(z) + F_+(z),$$

$$G(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} G_{-k}z^k + \sum_{k=0}^{\infty} G_k z^k \equiv G_-(z) + G_+(z), \quad z = x+iy, \quad (x,y) \in \Gamma. \tag{9}$$

Получены следующие результаты:

Теорема 1. *При $\mu \neq 0$ однородная задача* (1), (4) *не имеет ненулевых решений, а для разрешимости неоднородной задачи необходимо, чтобы функции F и G аналитически продолжались в кольцо $D_0 = \{z : |\mu| < |z| < 1\}$ и достаточно, чтобы F и G являлись также производными функций, удовлетворяющих условию Гельдера в замкнутой области $\overline{D}_0$.*

Теорема 2. *При $\mu = 0$ однородная задача* (1), (4) *имеет бесконечное множество линейно независимых решений. Общее решение однородной задачи имеет вид*

$$u_0(x,y) = (1 - z\bar{z})^2\Phi(z),$$

где Φ произвольная аналитическая в D функция. Неоднородная задача имеет решение тогда и только тогда, когда G_- функционально зависит от F_-. Зависимость выражается в явном виде.

Теоремы 1 и 2 доказываются в следующем пункте. В третьем, заключительном разделе статьи рассмотрены другие варианты расположения корней характеристического уравнения.

Замечание 1. Полученные результаты показывают, что задачу Дирихле для уравнения (1) естественно рассматривать для граничных функций, аналитических в D_0 и удовлетворяющих условиям $f \in C^{(2,\alpha)}(\overline{D}_0)$ и $g \in C^{(1,\alpha)}(\overline{D}_0)$.

2. Доказательство теорем 1 и 2

Доказательство теоремы 1. Общее решение уравнения (1) представляется в виде ([5])

$$u(x,y) = \Phi_0(z+\mu\bar{z}) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\Phi_1(z+\mu\bar{z}) + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2 \Phi_2(z+\mu\bar{z}) + \Psi(\bar{z}+\nu z), \qquad (10)$$

где Φ_j $(j = 0,1,2)$ и Ψ — функции, подлежащие определению, аналитические в областях $D_1(\mu) = \{z+\mu\bar{z} | z \in D\}$ и $D_2(\nu) = \{\bar{z}+\nu z | z \in D\}$ соответственно. Подставим функцию (10) в граничные равенства (6). Используя операторное тождество ([5])

$$\frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k \partial \bar{z}^m}\frac{\partial^l}{\partial\varphi^l} = \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + (k-m)iI\right)^l \frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k \partial \bar{z}^m},$$

получим систему уравнений на границе Γ

$$\Psi'(\bar{z}+\nu z) + \mu\Phi_0'(z+\mu\bar{z}) + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - iI\right)\mu\Phi_1'(z+\mu\bar{z}) \\ + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - iI\right)^2 \mu\Phi_2'(z+\mu\bar{z}) = F(z), \quad z \in \Gamma,$$

$$\nu\Psi'(\bar{z}+\nu z) + \Phi_0'(z+\mu\bar{z}) + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + iI\right)\Phi_1'(z+\mu\bar{z}) \\ + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + iI\right)^2 \Phi_2'(z+\mu\bar{z}) = G(z), \quad z \in \Gamma. \qquad (11)$$

Нам понадобится представление функций $\Phi(z+\mu\bar{z})$ и $\Psi(\bar{z}+\nu z)$, где Φ и Ψ — функции, аналитические в областях $D_1(\mu)$ и $D_2(\nu)$ соответственно, в окрестности Γ аналитическими в D функциями. В [6] доказано, что при $|z| = 1$ функции Φ и Ψ допускают представление

$$\Phi(z+\mu\bar{z}) = \vartheta(z) + \vartheta(\mu\bar{z}), \quad \Psi(\bar{z}+\nu z) = \rho(\bar{z}) + \rho(\nu z). \qquad (12)$$

Здесь ϑ и ρ — аналитические в единичном круге функции. Если известны функции ϑ и ρ, то Φ и Ψ восстанавливаются по формулам

$$\Phi(z+\mu\bar{z}) = \vartheta\left(0.5(z+\mu\bar{z} + \sqrt{(z+\mu\bar{z})^2 - 4\mu})\right) \\ + \vartheta\left(0.5(z+\mu\bar{z} - \sqrt{(z+\mu\bar{z})^2 - 4\mu})\right),$$

$$\Psi(\bar{z}+\nu z) = \rho\left(0.5(\bar{z}+\nu z + \sqrt{(\bar{z}+\nu z)^2 - 4\nu})\right) \\ + \rho\left(0.5(\bar{z}+\nu z - \sqrt{(\bar{z}+\nu z)^2 - 4\nu})\right), \qquad (13)$$

где $|z| < 1$. В этих формулах выбираем ту ветвь $\sqrt{\zeta^2 - 4\mu}$, которая аналитически продолжается вне сегмента $[-2\sqrt{\mu}, 2\sqrt{\mu}]$ и при $\zeta \longrightarrow \infty$ удовлетворяет условию $\zeta^{-1}\sqrt{\zeta^2 - 4\mu} \longrightarrow 1$.

Используем (12) для представления функций Φ_j' и Ψ' на окружности Γ

$$\Psi'(\bar{z} + \nu z) = \psi(\bar{z}) + \psi(\nu z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k \bar{z}^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \nu^k z^k, \quad z \in \Gamma$$

$$\Phi_j'(z + \mu\bar{z}) = \sigma_j(z) + \sigma_j(\mu\bar{z}) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} B_{kj} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{kj} \mu^k \bar{z}^k, \quad j = 0, 1, 2, \quad z \in \Gamma. \tag{14}$$

Здесь σ_j и ψ аналитические в круге D функции, подлежащие определению. Для определения коэффициентов рядов Тейлора этих функций, подставим разложения (14) в граничные условия (6)

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \bar{z}^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \nu^k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k0} \mu z^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k0} \mu^{k+1} \bar{z}^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k1} i\mu(k-1) z^k$$
$$-\sum_{k=0}^{\infty} B_{k1} i(k+1)\mu^{k+1}\bar{z}^k - \sum_{k=0}^{\infty} B_{k2}\mu(k-1)^2 z^k - \sum_{k=0}^{\infty} B_{k2}(k+1)^2\mu^{k+1}\bar{z}^k = F(z), \ |z| = 1,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \nu \bar{z}^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \nu^{k+1} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k0} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k0} \mu^k \bar{z}^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_{k1} i(k+1) z^k$$
$$-\sum_{k=0}^{\infty} B_{k1} i(k-1)\mu^k \bar{z}^k - \sum_{k=0}^{\infty} B_{k2}(k+1)^2 z^k - \sum_{k=0}^{\infty} B_{k2}(k-1)^2\mu^k\bar{z}^k = G(z), \ |z| = 1. \tag{15}$$

Приравнивая в (15) коэффициенты при соответствующих степенях z и $\bar{z}$, получим системы для определения неизвестных A_k и B_{kj}. При $k = 0$ имеем

$$\begin{aligned} &2A_0 + 2\mu B_{00} - 2i\mu B_{01} - 2\mu B_{02} = F_0, \\ &2\nu A_0 + 2B_{00} + 2iB_{01} - 2B_{02} = G_0. \end{aligned} \tag{16}$$

При $k \geq 1$ получаем систему четырех уравнений относительно неизвестных A_k и B_{kj}

$$\begin{aligned} &B_{k0} + i(k+1)B_{k1} - (k+1)^2 B_{k2} + \nu^{k+1} A_k = G_k, \\ &\mu B_{k0} + i(k-1)\mu B_{k1} - (k-1)^2 \mu B_{k2} + \nu^k A_k = F_k, \\ &\mu^k B_{k0} - i(k-1)\mu^k B_{k1} - (k-1)^2 \mu^k B_{k2} + \nu A_k = G_{-k}, \\ &\mu^{k+1} B_{k0} - i(k+1)\mu^{k+1} B_{k1} - (k+1)^2 \mu^{k+1} B_{k2} + A_k = F_{-k} \end{aligned} \tag{17}$$

Определитель основной матрицы системы (17) имеет вид

$$\Omega_k = \det \widetilde{\Omega}_k \equiv \det \begin{pmatrix} 1 & i(k+1) & -(k+1)^2 & \nu^{k+1} \\ \mu & i(k-1)\mu & -(k-1)^2\mu & \nu^k \\ \mu^k & -i(k-1)\mu^k & -(k-1)^2\mu^k & \nu \\ \mu^{k+1} & -i(k+1)\mu^{k+1} & -(k+1)^2\mu^{k+1} & 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Преобразуя этот определитель, получим

$$\Omega_k = -8ik\mu^{k+1}(k(1 - \mu\nu)(1 + (\mu\nu)^k) - (1 + \mu\nu)(1 - (\mu\nu)^k)). \tag{19}$$

Рассмотрим многочлен степени $k+1$

$$P_{k+1}(z) = k(1-z)(1+z^k) - (1+z)(1-z^k), \quad k \geq 2. \tag{20}$$

Покажем, все корни этого многочлена лежат на единичной окружности Γ. При $z = e^{i\varphi}$ ($\varphi \in [-\pi, \pi]$) этот многочлен примет вид

$$\begin{aligned} P_{k+1}(e^{i\varphi}) &= k(1-e^{i\varphi})(1+e^{ik\varphi}) - (1+e^{i\varphi})(1-e^{ik\varphi}) \\ &= e^{i\frac{(k+1)}{2}\varphi}\left(k\left(-2i\sin\frac{\varphi}{2}\right)\left(2\cos\frac{k\varphi}{2}\right) - \left(-2i\sin\frac{k\varphi}{2}\right)\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)\right) \\ &= -4ie^{i\frac{(k+1)}{2}\varphi}\left(k\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{k\varphi}{2} - \sin\frac{k\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned}$$

Таким образом, многочлен P_{k+1} на Γ представляется в виде

$$\begin{aligned} P_{k+1}(e^{i\varphi}) &= -2ie^{i\frac{(k+1)}{2}\varphi}\left((k-1)\sin\frac{(k+1)\varphi}{2} - (k+1)\sin\frac{(k-1)\varphi}{2}\right) \\ &\equiv -2ie^{i\frac{(k+1)}{2}\varphi}\Lambda_k(\varphi). \end{aligned}$$

Исследуем поведение функции Λ_k на отрезке $[0,\pi]$. Для этого вычислим значения этой функции в точках $\varphi_j = 2\pi jk^{-1}$ при $j = 0, \ldots, [0.5k]$. Имеем

$$\Lambda_k(\varphi_j) = (k-1)\sin\left(\pi j + \frac{\pi j}{k}\right) - (k+1)\sin\left(\pi j - \frac{\pi j}{k}\right) = 2k(-1)^j \sin\frac{\pi j}{k}.$$

Следовательно, учитывая, что $\pi jk^{-1} \in [0, 0.5\pi]$, получаем

$$\operatorname{sgn}\Lambda_k(\varphi_j) = (-1)^j, \quad j = 1, \ldots, [0.5k].$$

Из этого соотношения следует, что функция Λ_k имеет не менее $[0.5k]-1$ корней на интервале $(0,\pi)$. Учитывая, что Λ_k – нечетная функция, и $\Lambda_k(0) = \Lambda_k'(0) = \Lambda_k''(0) = 0$, то есть точка 0 является трехкратным корнем функции Λ_k, получаем, что функция Λ_k имеет не менее

$$2[0.5k] - 2 + 3 = 2[0.5k] + 1$$

корней на открытом интервале $(-\pi,\pi)$. В случае четного k получаем, что все $k+1$ корней многочлена P_{k+1} находятся на окружности Γ. Чтобы завершить доказательство в случае нечетного k отметим, что в этом случае точка -1 также является корнем многочлена P_{k+1}. Таким образом, при $k \geq 2$ $\Omega_k \neq 0$ (так как $\Omega_k = -8ik\mu^{k+1}P_{k+1}(\mu\nu)$, и $|\mu\nu| < 1$), следовательно, система (17) однозначно разрешима. В частности, если рассматривается однородная задача, то $A_k = B_{jk} = 0$ при $j = 0, 1, 2$ и $k \geq 2$. Поэтому решение однородной задачи — многочлен степени не выше двух. Но из однородных граничных условий (4) следует, что если этот многочлен ненулевой, то он должен делиться на $(1 - z\bar{z})^2$ (см. [7], т. 5.1, стр. 84), то есть должен иметь степень не ниже четырех. Итак, доказано, что однородная задача (1), (4) не имеет ненулевых решений.

Рассмотрим неоднородную задачу. Система (16) всегда имеет решение, а система (17) при $k > 1$ однозначно разрешима, так как определитель Ω_k при $k > 1$ отличен от нуля. Рассмотрим систему (17) при $k = 1$. В этом случае левые части второго и третьего уравнений (17) совпадают. Из (8) следует, что

$$F_1 = G_{-1} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} g(\cos\varphi, \sin\varphi)\,d\varphi,$$

то есть второе и третье уравнения в (17) совпадают. Непосредственно проверяется, что ранг матрицы $\widetilde{\Omega}_1$ равен трем, следовательно, система (17) при $k=1$ также имеет решение. Найдем решение системы (17) при $k>1$. Имеем

$$
\begin{aligned}
A_k &= \frac{k(G_{-k}\mu-\mu^kF_k-F_{-k}+G_k\mu^{k+1})+G_{-k}\mu-\mu^kF_k+F_{-k}-G_k\mu^{k+1}}{(1+\mu\nu)(1-(\mu\nu)^k)-k(1-\mu\nu)(1+(\mu\nu)^k)},\\
B_{k1} &= \frac{\mu^{-k-1}}{2i}\frac{(1-(\mu\nu)^{k+1})(F_k\mu^k-G_{-k}\mu)+\mu\nu(1-(\mu\nu)^{k-1})(F_{-k}-G_k\mu^{k+1})}{k(1-\mu\nu)(1+(\mu\nu)^k)-(1+\mu\nu)(1-(\mu\nu)^k)},\\
B_{k2} &= \frac{\mu^{-k-1}}{4k}(F_k\mu^k-G_k\mu^{k+1}+2i\mu^{k+1}B_{k1}-(\mu\nu)^k(1-\mu\nu)A_k),\\
B_{k0} &= G_k-i(k+1)B_{k1}+(k+1)^2B_{k2}-\nu^{k+1}A_k.
\end{aligned}
$$

При больших k, пренебрегая слагаемыми, убывающими со скоростью бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим

$$
\begin{aligned}
&A_k \sim \frac{k(G_{-k}\mu-F_{-k})+G_{-k}\mu+F_{-k}}{1+\mu\nu-k(1-\mu\nu)}, \quad B_{k1}\sim -\frac{\mu^{-k}}{2i}\frac{G_{-k}-\nu F_{-k}}{k(1-\mu\nu)-1-\mu\nu},\\
&B_{k2}\sim -\frac{\mu^{-k}}{4k}\frac{G_{-k}-\nu F_{-k}}{k(1-\mu\nu)-1-\mu\nu}, \quad B_{k0}\sim \frac{(k^2-1)\mu^{-k}}{4k}\frac{G_{-k}-\nu F_{-k}}{k(1-\mu\nu)-1-\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Эти соотношения показывают, что хотя коэффициенты A_k и B_{kj} определяются однозначно, соответствующие функции σ_j $(j=0,1,2)$ и ψ вообще говоря не удовлетворяют условию Гельдера в $D\bigcup\Gamma$. Для того, чтобы полученное решение удовлетворяло этому условию необходимо, чтобы ([8], стр. 210)

$$
G_{-k}-\nu F_{-k}\sim \mu^k k^{-\gamma}, \quad k\to\infty, \tag{22}
$$

для некоторого $\gamma\in(0,1)$. Таким образом, для разрешимости неоднородной задачи (1), (2) необходимо, чтобы f и g допускали аналитическое продолжение в кольцо $|\mu|<|z|<1$. При этом необходимы дополнительные условия гладкости на границе $|z|=|\mu|$. Если выполняются условия теоремы 1, то $\mu^{-k}(G_{-k}-\nu F_{-k})$ являются коэффициентами Фурье функции, удовлетворяющей условию Гельдера на Γ, то есть задача (1), (4) имеет решение. Теорема 1 доказана.

Замечание 2. Если в (6) $F\equiv 0$ и $G(z)=(z-\mu)^{-2}$ то для такой функции $G_{-k}\sim k\mu^k$ и поэтому из (21) следует, что полученное решение не является непрерывным по Гельдеру в $D\bigcup\Gamma$, то есть задача (1), (2) не имеет решения. Этот пример показывает, что достаточные условия в теореме 1 существенно ослабить нельзя.

Доказательство теоремы 2. Пусть теперь в (1) $\mu=0$. В этом случае общее решение уравнения (1) представляется в виде

$$
u(x,y)=\Phi_0(z)+(1-z\bar z)\Phi_1(z)+(1-z\bar z)^2\Phi_2(z)+\Psi(\bar z+\nu z)+(C_0+C_1z)\bar z^2+C_2\bar z, \tag{23}
$$

где Φ_j $(j=0,1,2)$ — аналитические в круге D функции, а Ψ – аналитична в $D_2(\nu)$. После подстановки в первое граничное условие (2) получим

$$
\Phi_0(z)+\Psi(\bar z+\nu z)+C_0\bar z^2+(C_1+C_2)\bar z=f(z), \quad |z|=1. \tag{24}
$$

Представим функцию Ψ на окружности Γ в виде

$$
\Psi(\bar z+\nu z)=\psi(\bar z)+\psi(\nu z), \quad z\in\Gamma, \tag{25}
$$

где ψ аналитическая в D функция. Тогда из (24), отделяя слагаемые, допускающие аналитические продолжения в D и $\mathbf{C}\backslash(D\bigcup\Gamma)$ соответственно, имеем

$$\Phi_0(z)+\psi(\nu z)=f_+(z),\quad \psi(\bar z)+C_0\bar z^2+(C_1+C_2)\bar z=f_-(z). \tag{26}$$

Здесь, так же как и в (9) используются обозначения

$$f(x,y)=\sum_{k=-\infty}^{-1} f_k z^k+\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k\equiv f_-(z)+f_+(z),$$

$$g(x,y)=\sum_{k=-\infty}^{-1} g_k z^k+\sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k\equiv g_-(z)+g_+(z),\quad z=x+iy,\ (x,y)\in\Gamma. \tag{27}$$

Из системы (26) получим

$$\psi(z)=f_-(\bar z)-C_0z^2-(C_1+C_2)z\equiv F_1(z)-C_0z^2-(C_1+C_2)z, \tag{28}$$

$$\Phi_0(z)=f_+(z)-F_1(\nu z)+C_0\nu^2z^2+(C_1+C_2)\nu z\equiv F_2(z)+C_0\nu^2z^2+(C_1+C_2)\nu z, \tag{29}$$

где F_1 и F_2 — однозначно определенные функции в круге D. Из равенства (28) по формуле (13) определяем функцию Ψ

$$\begin{aligned}\Psi(\bar z+\nu z)=F_1&\left(\frac{\bar z+\nu z+\sqrt{(\bar z+\nu z)^2-4\nu}}{2}\right)+F_1\left(\frac{\bar z+\nu z-\sqrt{(\bar z+\nu z)^2-4\nu}}{2}\right)\\ -C_0&\left[\left(\tfrac{\bar z+\nu z+\sqrt{(\bar z+\nu z)^2-4\nu}}{2}\right)^2+\left(\tfrac{\bar z+\nu z-\sqrt{(\bar z+\nu z)^2-4\nu}}{2}\right)^2\right]-(C_1+C_2)(\bar z+\nu z)\\ &\equiv\Omega(\bar z+\nu z)-C_0(\bar z+\nu z)^2+2C_0\nu-(C_1+C_2)(\bar z+\nu z).\end{aligned} \tag{30}$$

Функция Ω однозначно определяется по граничной функции f. Далее, рассмотрим второе граничное условие (2). Подставляя функцию (23) и учитывая (30) и (29), получим

$$\begin{aligned}&zF_2'(z)+2C_0\nu^2z^2+(C_1+C_2)\nu z-2\Phi_1(z)-\Omega'(\bar z+\nu z)(\bar z+\nu z)-2C_0(\bar z+\nu z)^2\\ &-(C_1+C_2)(\bar z+\nu z)+2C_0\bar z^2+(C_2+3C_1)\bar z=g(x,y),\quad z=x+iy,\quad (x,y)\in\Gamma.\end{aligned} \tag{31}$$

Также представляя функцию $\Omega'(\bar z+\nu z)(\bar z+\nu z)$ на окружности Γ в виде

$$\Omega'(\bar z+\nu z)(\bar z+\nu z)=\omega(\bar z)+\omega(\nu z),\qquad |z|=1,$$

где ω — аналитична в D^+, получим

$$-2\Phi_1(z)+2C_1\bar z-4C_0\nu+zF_2'(z)+\omega(\bar z)+\omega(\nu z)=g_+(z)+g_-(z),\quad |z|=1.$$

Отсюда получаем функциональную зависимость между f_- и g_-

$$\omega(\bar z)+2C_1\bar z=g_-(z). \tag{32}$$

Если (32) выполняется, то однозначно определяем C_1

$$C_1=\lim_{z\to\infty}\frac{z}{2}\left(g_-(z)-\omega\left(\frac{1}{z}\right)\right). \tag{33}$$

Далее, определяем Φ_1

$$\Phi_1(z) = -2C_0\nu + \frac{1}{2}\left(zF_2'(z) + \omega(\nu z) - g_+(z)\right) \equiv -2C_0\nu + F_3(z), \qquad (34)$$

где F_3 однозначно определяется по f и g. И окончательно, подставляя (29), (30) и (34) в (23), запишем общее решение

$$u(x,y) = u^*(x,y) + (1 - z\bar{z})^2\Phi_2(z), \qquad (35)$$

где

$$u^*(x,y) = F_2(z) + (1 - z\bar{z})F_3(z) + \Omega(\bar{z} + \nu z) + C_1(z\bar{z}^2 - \bar{z})$$

однозначно определенная по f и g функция, а Φ_2 — произвольная функция, аналитическая в D. Теорема 2 доказана.

3. Другие варианты расположения корней характеристического уравнения

1. Пусть корни характеристического уравнения λ_k удовлетворяют условиям

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = \lambda_3 \neq i, \quad \Im\lambda_k > 0, \quad k = 2,3, \quad \Im\lambda_4 < 0. \qquad (36)$$

В этом случае уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}} - \mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)u = 0, \quad (x,y) \in D,$$

где $|\mu| < 1$, $|\nu| < 1$ ($\mu = \frac{i-\lambda_k}{i+\lambda_k}$, $k = 2,3$, $\nu = \frac{i+\lambda_4}{i-\lambda_4}$) и, соответственно, общее решение этого уравнения примет вид

$$u(x,y) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z + \mu\bar{z}) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\Phi_2(z + \mu\bar{z}) + \Psi(\bar{z} + \nu z),$$

где Φ_j $(j = 1,2)$ и Ψ — функции, подлежащие определению, аналитические в областях $D_1(\mu)$ и $D_2(\nu)$ соответственно, Φ_0 аналитическая в D функция. Подставляя это общее решение в граничные равенства (6), получим систему

$$\begin{aligned}
&\Phi_0'(z) + \Phi_1'(z + \mu\bar{z}) + \left(\frac{\partial}{\partial z} + iI\right)\Phi_2'(z + \mu\bar{z}) + \nu\Psi_1'(\bar{z} + \nu z) = G(z),\\
&\mu\Phi_1'(z + \mu\bar{z}) + \mu\left(\frac{\partial}{\partial z} - iI\right)\Phi_2'(z + \mu\bar{z}) + \Psi_1'(\bar{z} + \nu z) = F(z), \quad z \in \Gamma.
\end{aligned} \qquad (37)$$

Используя разложения, аналогичные (14)

$$\Psi'(\bar{z} + \nu z) = \sum_{k=0}^{\infty}A_k\bar{z}^k + \sum_{k=0}^{\infty}A_k\nu^k z^k, \quad \Phi_0'(z) = \sum_{k=0}^{\infty}B_{k0}z^k, \quad z \in \Gamma,$$

$$\Phi_j'(z + \mu\bar{z}) = \sum_{k=0}^{\infty}B_{kj}z^k + \sum_{k=0}^{\infty}B_{kj}\mu^k\bar{z}^k, \quad j = 1,2, \quad z \in \Gamma,$$

получаем системы линейных уравнений для определения коэффициентов B_{kj} и A_k, аналогичные (16) и (17). При $k > 1$ определитель полученной системы имеет вид

$$\Omega_k = 2i\mu^{k+1}\left(\frac{1 - (\mu\nu)^k}{1 - \mu\nu} - k\right), \qquad (38)$$

то есть отличен от нуля (так как $|\mu\nu| < 1$), поэтому, продолжая доказательство аналогично доказательству теоремы 1, получим, что теорема 1 справедлива и в этом случае.

В случае
$$\lambda_1 = \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 \neq i, \quad \Im\lambda_3 > 0, \quad \Im\lambda_4 < 0. \tag{39}$$
теорема 1 также верна. При этом, так как общее решение имеет вид
$$u(x,y) = \Phi_0(z) + \bar{z}\Phi_1(z) + \Phi_2(z+\mu\bar{z}) + \Psi(\bar{z}+\nu z),$$
где Φ_j $(j=0,1)$ — функции, аналитические в D, а Φ_2 и Ψ — функции, аналитические в областях $D_1(\mu)$ и $D_2(\nu)$ соответственно, то неизвестные функции Φ_j и Ψ определяются непосредственно из граничных условий (6), без использования разложения в ряд Тейлора.

2. Пусть корни характеристического уравнения λ_k удовлетворяют условиям
$$\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3, \quad \lambda_k \neq i, \quad \Im\lambda_k > 0, \quad k=1,2,3, \quad \Im\lambda_4 < 0. \tag{40}$$
В этом случае уравнение (1) примет вид
$$\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}} - \mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}} - \mu_1\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right) u = 0, \quad (x,y)\in D,$$
где $|\mu_1| < 1$, $|\mu| < 1$, $|\nu| < 1$ ($\mu_1 = \frac{i-\lambda_1}{i+\lambda_1}$, $\mu = \frac{i-\lambda_k}{i+\lambda_k}$, $k=2,3$, $\nu = \frac{i+\lambda_4}{i-\lambda_4}$) и, соответственно, общее решение этого уравнения примет вид
$$u(x,y) = \Phi_0(z+\mu\bar{z}) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\Phi_1(z+\mu\bar{z}) + \Phi_2(z+\mu_1\bar{z}) + \Psi(\bar{z}+\nu z),$$
где Φ_j $(j=0,1)$, Φ_2 и Ψ — функции, подлежащие определению, аналитические в областях $D_1(\mu)$, $D_1(\mu_1)$ и $D_2(\nu)$ соответственно. Подставляя это решение в граничные уравнения (4), получим равенства, аналогичные (11)
$$\begin{gathered}\Psi'(\bar{z}+\nu z) + \mu\Phi_0'(z+\mu\bar{z}) + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - iI\right)\mu\Phi_1'(z+\mu\bar{z}) + \mu_1\Phi_2'(z+\mu_1\bar{z}) = F(z),\\ \nu\Psi'(\bar{z}+\nu z) + \Phi_0'(z+\mu\bar{z}) + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + iI\right)\Phi_1'(z+\mu\bar{z}) + \Phi_2'(z+\mu_1\bar{z}) = G(z), \quad z\in\Gamma.\end{gathered} \tag{41}$$
Представим функции Φ_j' и Ψ' на окружности Γ по формулам (12) с помощью аналитических в круге функций
$$\Psi'(\bar{z}+\nu z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k\bar{z}^k + \sum_{k=0}^{\infty} B_k\nu^k z^k, \quad \Phi_2'(z+\mu_1\bar{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{k2}z^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{k2}\mu_1^k\bar{z}^k,$$
$$\Phi_j'(z+\mu\bar{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{kj}z^k + \sum_{k=0}^{\infty} A_{kj}\mu^k\bar{z}^k, \quad j=0,1, \quad z\in\Gamma. \tag{42}$$
Подставляя эти разложения в (41), и приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях z, получим системы для определения коэффициентов A_{kj} $(j=0,1,2)$ и B_k, аналогичные (16) и (17). При $k=0$ имеем
$$2A_{00} + 2iA_{01} + 2A_{02} + 2\nu B_0 = G_0,$$

$$2\mu A_{00} - 2iA_{01} + 2\mu_1 A_{02} + 2B_0 = F_0. \tag{43}$$

При $k \geq 1$ получаем систему четырех уравнений

$$\begin{aligned}
&A_{k0} + i(k+1)A_{k1} + A_{k2} + \nu^{k+1}B_k = G_k,\\
&\mu A_{k0} + i(k-1)\mu A_{k1} + \mu_1 A_{k2} + \nu^k B_k = F_k,\\
&\mu^k A_{k0} - i(k-1)\mu^k A_{k1} + \mu_1^k A_{k2} + \nu B_k = G_{-k},\\
&\mu^{k+1} A_{k0} - i(k+1)\mu^{k+1} A_{k1} + \mu_1^{k+1} A_{k2} + B_k = F_{-k}
\end{aligned} \tag{44}$$

Запишем определитель матрицы системы (44)

$$\Delta_k(\mu, \mu_1, \nu) = \det \widetilde{\Omega}_k \equiv \det \begin{pmatrix} 1 & i(k+1) & 1 & \nu^{k+1} \\ \mu & i(k-1)\mu & \mu_1 & \nu^k \\ \mu^k & -i(k-1)\mu^k & \mu_1^k & \nu \\ \mu^{k+1} & -i(k+1)\mu^{k+1} & \mu_1^{k+1} & 1 \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Пусть корень λ_4 ($\Im\lambda_4 < 0$) характеристического уравнения (2) равен $-i$. В этом случае $\nu = 0$ и, следовательно, определитель (45) примет вид

$$\Delta_k(\mu, \mu_1, 0) = 2i\mu^k \left(k(\mu_1 - \mu) - \mu(\mu^{-1}\mu_1)^k + \mu \right). \tag{46}$$

Это равенство показывает, что если $\delta = \max(|\mu|, |\mu_1|)$, то при больших k имеем $|\Delta_k(\mu, \mu_1, 0)| \sim \delta^k$, следовательно, чтобы задача (1), (4) имела решение, необходимо, чтобы граничные функции допускали аналитическое продолжение в кольцо $\{\delta < |z| < 1\}$. Далее, при $k = 2$ определитель (46) отличен от нуля, но при некоторых $k > 2$ $\Delta_k(\mu, \mu_1, 0)$ может обратиться в нуль. При этом однородная система (44) будет иметь ненулевое решение, по которому получаем ненулевое решение однородной задачи (1), (4). Из (13) следует, что это ненулевое решение является многочленом порядка $k+1$. Например, если $\mu_1 = -2\mu$, то $\Delta_3(\mu, \mu_1, 0) = 0$. Тогда функция $(1 - z\bar{z})^2$ является нетривиальным решением однородной задачи (1), (4). При больших k определитель $\Delta_k(\mu, \mu_1, 0)$ отличен от нуля, так как

$$|k(\mu_1 - \mu) - \mu(\mu^{-1}\mu_1)^k + \mu| \to \infty$$

при $k \to \infty$, поэтому однородная задача (1), (4) имеет конечное число линейно независимых решений.

Рассмотрим неоднородную задачу. В случае, если при $k > 2$ определитель системы (44) $\Delta_k(\mu, \mu_1, 0)$ обращается в нуль, ранг матрицы $\widetilde{\Omega}_k$ меньше четырех, следовательно, для разрешимости системы (44) необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты G_k, G_{-k}, F_k, F_{-k} удовлетворяли $4 - r_k$ (r_k — ранг матрицы $\widetilde{\Omega}_k$) линейно независимым условиям. Например, если $\mu_1 = -2\mu$, то при $k = 3$ система (44) примет вид

$$\begin{aligned}
&A_{30} + 4iA_{31} + A_{32} = G_3,\\
&A_{30} + 2i\mu A_{31} - 2A_{32} = \mu^{-1}F_3,\\
&A_{30} - 2iA_{31} - 8A_{32} = \mu^{-3}G_{-3},\\
&\mu^4 A_{30} - 4i\mu^4 A_{31} + 16\mu_4 A_{32} + B_3 = F_{-3},
\end{aligned} \tag{47}$$

соответствующий определитель $\Delta_3(\mu, -2\mu, 0) = 0$ и ранг матрицы $\widetilde{\Omega}_3$ равен трем. При этом получаем единственное условие разрешимости системы (47)

$$3\mu^{-1}F_3 - 2G_3 - \mu^{-3}G_{-3} = 0 \tag{48}$$

Это условие является условием ортогональности на функции (6) F и G

$$\int_0^{2\pi}\left(3\mu^{-1}F(\cos\varphi,\sin\varphi)e^{-3i\varphi}-G(\cos\varphi,\sin\varphi)(2e^{-3i\varphi}+\mu^{-3}e^{3i\varphi})\right)d\varphi=0.$$

Легко видеть, что если $\Delta_k(\mu,\mu_1,0)=0$ при различных k, то соответствующие условия разрешимости линейно независимы.

Итак, получена следующая теорема

Теорема 3. *При условии (40) и $\lambda_4=-i$ однородная задача (1), (4) имеет конечное число линейно независимых решений, определяемое по формуле $N_0=\sum\limits_{k=3}^{\infty}(4-rank\widetilde{\Omega}_k)$. Для разрешимости неоднородной задачи необходимо, чтобы функции F и G удовлетворяли N_0 линейно независимым условиям ортогональности и аналитически продолжались в кольцо $H=\{z:\delta<|z|<1\}$ и достаточно, чтобы F и G являлись также производными функций, удовлетворяющих условию Гельдера в замкнутой области $\overline{H}$.*

В общем случае (при $\lambda_4\neq -i$) определитель $\Delta_k(\mu,\mu_1,\nu)$ имеет вид

$$\Delta_k(\mu,\mu_1,\nu)=2i\mu^k(1-\nu\mu_1)(1-(\nu\mu_1)^k)\times\left(k\frac{(1-\nu\mu)(\mu_1-\mu)}{(1-\nu\mu_1)}-\frac{(1-(\nu\mu)^k)(\mu_1^k-\mu^k)}{\mu^{k-1}(1-(\nu\mu_1)^k)}\right),\qquad(49)$$

следовательно, при больших k также $\Delta_k(\mu,\mu_1,\nu)\neq 0$, то есть теорема 3 остается в силе.

3. В заключение рассмотрим случай, когда характеристическое уравнение (2) имеет простые корни. Пусть

$$\lambda_k\neq\lambda_j,\quad k\neq j,\quad k,j=1,2,3,4,\quad \Im\lambda_k>0,\quad k=1,2,3,\quad \Im\lambda_4<0.\qquad(50)$$

В этом случае общее решение уравнения (1) допускает представление

$$u(x,y)=\Phi_1(z+\mu_1\bar z)+\Phi_2(z+\mu_2\bar z)+\Phi_3(z+\mu_3\bar z)+\Psi(\bar z+\nu z),\qquad(51)$$

где Φ_j $(j=1,2,3)$ и Ψ — функции, подлежащие определению, аналитические в областях $D_1(\mu_j)$, и $D_2(\nu)$ соответственно. Здесь $\mu_j=\frac{i-\lambda_j}{i+\lambda_j}$, $j=1,2,3$ и $\nu=\frac{i+\lambda_4}{i-\lambda_4}$, следовательно, $|\mu_j|<1$, $|\nu|<1$, $\mu_j\neq\mu_k$ при $j\neq k$. Не ограничивая общности будем предполагать, что $|\mu_1|\geq|\mu_2|\geq|\mu_3|$. Так же, как и в предыдущих случаях, подставим функцию (51) в граничные уравнения (4), аналогично (11) получим систему относительно Φ'_j и Ψ' и затем представим эти функции на границе Γ с помощью аналитических в D функций

$$\Phi'_j(z+\mu_j\bar z)=\sum_{k=0}^{\infty}A_{kj}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}A_{kj}\mu_j^k\bar z^k,\quad j=1,2,3,$$
$$\Psi'(\bar z+\nu z)=\sum_{k=0}^{\infty}B_k\bar z^k+\sum_{k=0}^{\infty}B_k\nu^kz^k,\qquad(52)$$

при $z\in\Gamma$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z и $\bar z$, получим системы линейных уравнений для определения A_{kj} и B_k, аналогичные (43) и (44). При $k=0$ имеем

$$2A_{01}+2A_{02}+2A_{03}+2\nu B_0=G_0,$$

$$2\mu A_{01} + 2\mu A_{02} + 2\mu A_{03} + 2B_0 = F_0.$$

Если $k \geq 1$ получаем систему четырех линейных уравнений

$$\begin{aligned} &A_{k1} + A_{k2} + A_{k3} + \nu^{k+1} B_k = G_k,\\ &\mu_1 A_{k1} + \mu_2 A_{k2} + \mu_3 A_{k3} + \nu^k B_k = F_k,\\ &\mu_1^k A_{k1} + \mu_2^k A_{k2} + \mu_3^k A_{k3} + \nu B_k = G_{-k},\\ &\mu_1^{k+1} A_{k1} + \mu_2^{k+1} A_{k2} + \mu_3^{k+1} A_{k3} + B_k = F_{-k} \end{aligned} \tag{53}$$

Определитель матрицы системы (53) имеет вид

$$\Delta_k(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \nu) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \nu^{k+1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \nu^k \\ \mu_1^k & \mu_2^k & \mu_3^k & \nu \\ \mu_1^{k+1} & \mu_2^{k+1} & \mu_3^{k+1} & 1 \end{pmatrix}. \tag{54}$$

Пусть $|\mu_1| > |\mu_2| \geq |\mu_3|$. В этом случае представим определитель (54) в виде

$$\Delta_k(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \nu) = \mu_1^{k+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \gamma^{k+1} \\ 1 & \alpha & \beta & \gamma^k \\ 1 & \alpha^k & \beta^k & \gamma \\ 1 & \alpha^{k+1} & \beta^{k+1} & 1 \end{vmatrix} \equiv \mu_1^{k+1} \Theta_k(\alpha, \beta, \gamma), \tag{55}$$

где

$$\alpha = \mu_2(\mu_1)^{-1}, \quad \beta = \mu_3(\mu_1)^{-1}, \quad \gamma = \nu\mu_1, \quad |\alpha| < 1, \quad |\beta| < 1, \quad |\gamma| < 1. \tag{56}$$

При некоторых $k > 1$ функция $\Theta_k(\alpha, \beta, \gamma)$ может обратиться в нуль, при этом однородная система (53) имеет нетривиальное решение и, следовательно, однородная задача (1), (4) будет иметь ненулевое решение, являющееся многочленом порядка $k+1$. Например, если $\mu_1 = \frac{2}{3}$, $\mu_2 = -\frac{1}{2}$, $\mu_3 = 0$, $\nu = \frac{1}{2}$, то $\alpha = -\frac{3}{4}$, $\beta = 0$, $\gamma = \frac{1}{3}$ и, следовательно, $\Theta_3(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. При этом полином четвертого порядка $(1 - z\bar{z})^2$ является нетривиальным решением однородной задачи (1), (4). При больших k из (56) следует оценка

$$\Theta_k(\alpha, \beta, \gamma) \sim (1-\gamma)(\beta - \alpha) \neq 0,$$

то есть определитель матрицы системы (53) не обращается в нуль, и, следовательно, однородная задача (1), (4) имеет конечное число линейно независимых решений. Для разрешимости соответствующей неоднородной системы необходимо, чтобы граничные функции удовлетворяли такому же числу линейно независимых условий ортогональности. Таким образом, в этом случае справедлива теорема 3, при $\delta = |\mu_1|$.

В заключение рассмотрим случай $|\mu_1| = |\mu_2| = |\mu_3|$. В этом случае в (56) $\alpha = e^{i\tau}$ и $\beta = e^{i\theta}$, где τ и θ — действительные числа. Если при некотором k_0

$$e^{ik_0\theta} = e^{ik_0\tau} = 1, \tag{57}$$

то из (55) имеем

$$\Delta_{mk_0}(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \nu) = \mu_1^{mk_0+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \gamma^{mk_0+1} \\ 1 & \alpha & \beta & \gamma^{mk_0} \\ 1 & 1 & 1 & \gamma \\ 1 & \alpha & \beta & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

следовательно, в этом случае однородная задача (1), (4) имеет бесконечное число линейно независимых решений (некоторые полиномы порядка mk_0+1), а для разрешимости неоднородной задачи необходимо, чтобы функции F и G удовлетворяли бесконечному множеству линейно независимых условий ортогональности.

Аналогично могут быть рассмотрены другие варианты расположения корней.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966. 204с.
2. *Товмасян Н. Е.* Новые постановки и исследования первой, второй и третьей краевых задач для сильно связанных эллиптических систем двух дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами // Изв. АН Арм. ССР. Сер. мат. 1968. Т. 3, № 6. С.497–521.
3. *Буряченко Е. А.* О единственности решения задачи Дирихле в круге для дифференциальных уравнений четвертого порядка в вырожденных случаях // Нелинейные граничные задачи. Донецк, 2000. Т. 10. С. 44–49.
4. *Begehr H., Kumar A.* Boundary value problems for the inhomogenuous polyanalytic equation. 1 // Analysis. 2005. V. 25. P. 55–71.
5. *Бабаян А. О.* Задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения в единичном круге // Изв. НАН Армении. Сер. мат. 2003. Т. 38, № 6. С. 39–48.
6. *Tovmasyan N. E.* Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields. Singapore: World Scientific, 1998.
7. *Axler S., Bourdon P., Ramey W.* Harmonic Function Theory. New York: Springer-Verlag, 2001.
8. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматлит, 1961. 936 с.

Бабаян Арменак Оганесович

Армения, Ереван, Государственный инженерный университет

armenak@web.am