Неклассические уравнения математической физики 2007. С. 69–77

УДК 517.954+517.956

ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕКТНОСТИ МОДИФИЦИРОВАННОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УДАРНЫХ ВОЛН В ВЯЗКОМ ГАЗЕ

А. М. Блохин, Д. Л. Ткачев

Обсуждается вопрос о постановке дополнительных граничных условий при исследовании неодномерной линейной задачи об устойчивости ударной волны — разрыва в вязком газе и об исследовании корректности модифицированной задачи. Заметим, что рассмотрение многомерного случая необходимо, чтобы естественным образом подойти, например, к изучению задачи об обтекании затупленного тела вязким газом.

При постановке физического эксперимента, а также при численном моделировании течений вязкого теплопроводного газа (рассматривается модель Навье – Стокса), особенный интерес вызывают характерные качественные свойства таких движений — детальная информация о них позволяет существенно эффективнее организовать процесс изучения явления. Одно из свойств течений — образование в ряде случаев узких, так называемых переходных зон, в которых параметры, характеризующие такие движения (компоненты вектора скорости, плотность, давление, температура и т. д.) испытывают резкие изменения (большие градиенты) по пространственным переменным, оставаясь при этом непрерывными. Возникают течения типа “вязкого профиля”. Так происходит, например, когда вязкий теплопроводный газ обтекает затупленное тело.

В связи с этим очень перспективна идея приближенной замены узких переходных зон поверхностями сильного разрыва, т. е. ударными волнами, — в этом суть метода “ударных волн”. Такой подход имеет ряд существенных преимуществ: во-первых, резко сокращается объем вычислений; во-вторых, математическая теория сильных разрывов относительно хорошо развита не только для одномерного, но и для многомерных течений [1, 2], созданы эффективные численные алгоритмы.

В последнее время появился ряд работ, в которых существенно используется метод “ударных волн”. Так, например, в работе [3] (мы выбрали ее как типичную из большого количества работ вычислительного плана на обсуждаемую тему) описываются результаты численного исследования задачи о нахождении двумерного стационарного вязкого течения газа около неподвижных затупленных тел. При этом головной скачок уплотнения (т. е. ударная волна) рассматривается как поверхность сильного разрыва, на которой выполнены соответствующие отношения. Ясно, что головной скачок уплотнения вводится только для того, чтобы существенно ограничить расчетную область, в которой ищется решение уравнений Навье – Стокса. Стационарные же режимы обтекания затупленных тел находились в [3] методом установления, т.е. стационарные решения системы уравнений

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, код проекта 07-01-00585

Навье – Стокса определялись как предел при $t \to \infty$ решений нестационарной задачи.

Следует отметить, что предлагаемый разрывный подход к исследованию волн в вязком теплопроводном газе используется и в теоретических исследованиях [4, 5]. В работе [4] при исследовании устойчивости плоских ударных волн с целью оценки влияния малой вязкости на развитие возмущений предполагается, что шириной переходной зоны можно пренебречь. Поэтому задача об изучении развития возмущений сводится, как и в невязком газе, к исследованию линейной смешанной задачи с граничными условиями на фронте ударной волны, полученными после линеаризации уравнений сильного разрыва.

Однако в работах [6–8] на примере математической модели Навье – Стокса для сжимаемой жидкости была показана неприемлемость подхода, основанного на представлении ударных волн в вязком газе как поверхностей сильного разрыва. Оказывается, что такой вывод можно сделать уже по линейному приближению. С этой целью изучается смешанная задача, полученная путем линеаризации нестационарных уравнений Навье – Стокса и уравнений сильного разрыва относительно кусочно-постоянного решения. Это кусочно-постоянное решение описывает следующий режим течения вязкого газа: сверхзвуковой стационарный поток вязкого газа (при $x < 0$) отделяется от дозвукового стационарного потока (при $x > 0$) поверхностью сильного разрыва — ударной волной (с уравнением $x = 0$). В упомянутых выше работах было показано, что ударная волна неустойчива вне зависимости от характера линеаризованных граничных условий при $x = 0$. Это обстоятельство является следствием того факта, что число независимых параметров, определяющих произвольное малое возмущение разрыва, больше числа линеаризованных граничных условий на разрыве. Таким образом, ударная волна в вязком газе, рассматриваемая как поверхность сильного разрыва, подобна неэволюционным разрывам в идеальных средах.

Заметим, что с математической точки зрения построенные в [6–8] для доказательства неустойчивости частные, экспоненциально растущие со временем решения есть, по существу, примеры Адамара, которые показывают некорректность упомянутой выше линейной смешанной задачи. Обнаруженную неустойчивость можно также трактовать как косвенное доказательство невозможности нахождения стационарных режимов обтекания затупленных тел вязким газом с головным скачком уплотнения в виде поверхности сильного разрыва методом установления. С физической же точки зрения этот факт означает практическую нереализуемось вышеописанного стационарного режима течения вязкого газа с ударной волной.

Вместе с тем, учитывая изложенные выше преимущества разрывного подхода, хотелось бы модифицировать этот подход так, чтобы можно было бы обоснованно применить его, например, в задачах о нахождении стационарных режимов обтекания методом установления для сред с диссипацией.

В [9, 10] на примере линейной смешанной задачи об устойчивости ударных волн в вязком газе предлагается идея такой модификации, основанная на "уравненческом" подходе. Суть этой идеи заключается в том, чтобы дописать к исходной линейной задаче об устойчивости дополнительные граничные условия так, чтобы для вновь сформулированной смешанной задачи стационарный режим течения вязкого газа с ударной волной, описанный выше, стал бы асимптотически устойчив (по Ляпунову). Отсюда следует, что по крайне мере на линейном уровне был бы обоснован метод установления, что означало бы возможность определения стационарного режима течения вязкого газа с ударной волной этим методом. Упомянутые же выше дополнительные граничные условия предлагается конструировать с учетом априорной информации о разыскиваемом методом установле-

ния стационарном режиме течения вязкого газа с ударной волной.

В докладе обсуждается вопрос о постановке дополнительных граничных условий при исследовании неодномерной линейной задачи об устойчивости ударной волны — разрыва в вязком газе и об исследовании корректности модифицированной задачи. Заметим, что рассмотрение многомерного случая необходимо, чтобы естественным образом подойти, например, к изучению уже упомянутой задачи об обтекании затупленного тела вязким газом. Основные результаты доклада опубликованы в работах [11–13].

1. Постановка линейной смешанной задачи и дополнительных граничных условий. О возможности построения примеров некорректности типа примера Адамара для задачи (1)–(5)

В качестве математической модели используем систему уравнений Навье – Стокса. После линеаризации этой системы уравнений и соотношений на ударной волне (подробнее об уравнениях на сильном разрыве см. в [14]) относительно кусочно-постоянного решения (см. начало работы) получаем линейную смешанную задачу, которую необходимо дополнить специально выбранными граничными условиями

$$\xi u_\infty|_{x=0} = 0, \quad \xi v_\infty|_{x=0} = 0;$$

$$r\xi u + r_2\eta v = \frac{\beta^2}{M^2}\epsilon p \quad \text{при} \quad x = 0,$$

где u_∞, v_∞ — компоненты вектора скорости набегающего потока, r, r_2, M^2 — некоторые физические постоянные, $\beta^2 = 1 - M^2$; ϵ — параметр, $\xi = \frac{\partial}{\partial x}$, $\eta = \frac{\partial}{\partial y}$ — дифференциальные операторы.

Окончательно, после ряда упрощающих процедур можно сформулировать задачу для нахождения давления p и вихря скорости $\Omega = \eta u - \xi v$:

$$\begin{aligned} &\{M^2(\tau+\xi)^2 - \triangle - 2M^2(\tau+\xi)\triangle\}p = 0, \quad \text{при} \quad x > 0,\ t > 0; \\ &\{(\tau+\xi) - \delta\triangle\}\Omega \quad \text{при} \quad x > 0,\ t > 0; \end{aligned} \tag{1}$$

$$(1+d)\tau^2 p - \frac{\beta^2}{M^2}\tau\xi p + \Lambda\eta^2 p - 2\delta d\tau \triangle p - 2\tau\xi(\tau - (\delta d - 1)\xi)p = 0, \quad x = 0; \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \delta\eta\Omega &= 2\tau\xi p - d\tau p + \frac{1}{M^2}\xi p + 2\xi^2 p + \frac{k}{\delta}(\tau+\xi)p + \frac{\beta^2}{2M^2\delta}\epsilon p \\ &= 2\tau\xi p + 2\xi^2 p + \gamma_1\tau p + \gamma_2\tau p + \frac{\beta^2}{2M^2\delta}\epsilon p, \quad x = 0; \end{aligned} \tag{3}$$

$$\delta\xi\Omega = \delta\tau\Omega + \Omega - \eta\left((\Lambda - d + \frac{1}{M^2})p + 2(1-\delta d)\tau p + 2\xi p\right), \quad x = 0. \tag{4}$$

Здесь $\delta,\ d,\ \Lambda,\ k$ — некоторые постоянные, $\gamma_1 = \frac{1-\delta}{\delta} - d$, $\gamma_2 = \frac{1-\delta}{\delta} + \frac{1}{M^2}$.

Сформулируем также начальные условия для системы (1):

$$p|_{t=0} = p_0(x,y), \quad p_t|_{t=0} = p_1(x,y); \quad \Omega|_{t=0} = \Omega_0(x,y) \tag{5}$$

(подробный вывод соотношений (1)–(5) приведен в работе [12]).

Будем искать у уравнений (1) частные решения экспоненциального вида:

$$\begin{aligned} p &= \widehat{p}\,\exp\{n(St + Rx + iy)\}, \\ \Omega &= \widehat{\Omega}\,\exp\{n(St + \rho x + iy)\}, \quad x \geq 0, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\widehat{\rho}$, $\widehat{\Omega}$, R, S, ρ — некоторые постоянные, причем Re $S > 0$; Re R, Re $\rho < 0$. В силу того, что функции ρ, Ω являются решением системы (1), мы получаем следующие асимптотические представления для S, R_1, R_2, ρ:

$$S = S_0 + \epsilon S_1 + \frac{\epsilon^2}{2!} S_2 + \dots, \quad \text{Re } S_0 \geq 0, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} R_1 &= -S_0 - \epsilon S_1 - \frac{\epsilon^2}{2!}\left(S_2 + \frac{1}{M^2}\right) + \dots, \\ R_2 &= -1 + \frac{\epsilon^2}{2!}\frac{1 - S_0}{2} + \dots, \\ \rho &= -1 + \frac{\epsilon^2}{2!}\frac{1 - S_0}{\delta} + \dots \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $\epsilon = \frac{1}{n^2}$.

Разложения (7), (8) справедливы, если $S_0 \neq 1$.

Окончательно, ищем решение задачи (1)–(5) в виде

$$p = \exp\{n(St + iy)\} \sum_{j=1}^{2} \widehat{p}_j \exp\{nR_j x\},$$

$$\Omega = \exp\{n(St + iy)\} \widehat{\Omega} \exp\{n\rho x\}.$$

Замечание 1. Так как единственный вариант для S_0 таков: $S_0 = -1$, то с учетом формул (8) заключаем, что корень уравнений относительно S (а он является нулем соответствующего определителя Лопатинского (см. (27))) лежит вне области, в которой Re $R_{1,2} < 0$ одновременно.

Дальнейшее изложение материала работы будет посвящено доказательству существования и единственности гладкого решения задачи (1)–(5) при условии, что начальные данные финитны, и обоснованию асимптотической устойчивости (по Ляпунову) стационарного решения. При обосновании асимптотической устойчивости решающим моментом является наличие подходящих априорных оценок.

2. Формулировка вспомогательной задачи. Нахождение и оценка решения системы (1), убывающего при $x \to +\infty$

Продолжая функции $p(t, x, y)$ и $\Omega(t, x, y)$ нулем при $t < 0$, получаем следующую вспомогательную задачу для системы (1):

$$\begin{aligned} \{2M^2(\tau + \xi) \triangle + \triangle - M^2(\tau + \xi)^2\} p &= 2M^2\delta(t) \triangle p_0 - 2M^2\delta(t)\xi p_0 \\ &\quad - M^2\delta'(t) \triangle p_0 - M^2\delta(t) \triangle p_1, \\ \{(\tau + \xi) - \delta\triangle\}\Omega = \delta(t)\Omega_0, \quad x > 0, \quad (x, y) \in R^2, & \end{aligned} \tag{9}$$

причем производные по переменным t, y в системе (9) понимаются в смысле обобщенных функций, $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. Решение системы (9) должно удовлетворять следующим требованиям: p, $\Omega \in C^\infty([0, \infty);\ D'_{t,y}(R^2))$; p, $\Omega \to 0$ при $x \to +\infty$.

Рассмотрим первое уравнение системы (9) и применим преобразование Фурье – Лапласа по переменным y и t. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \{2M^2\xi^3 + \xi^2(\beta^2 + 2M^2 s) - 2M^2\xi(s + \eta_1^2) - (M^2 s^2 + 2Ms\eta_1^2 + \eta_1^2)\}\widehat{p}(x, \eta_1, s) \\ = 2M^2\xi^2\widehat{p}_0(x, \eta_1) - 2M^2\eta_1^2\widehat{p}_0(x, \eta_1) - 2M^2\xi\widehat{p}_0(x, \eta_1) \\ - M^2\widehat{p}_1(x, \eta_1) - M^2 s\widehat{p}_0(x, \eta_1), \quad x > 0. \end{aligned} \tag{10}$$

В качестве формального решения уравнения (10) можно выбрать такую функцию

$$\widehat{p}^*(x,\eta_1,s)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ix\xi_1}\frac{h(\xi_1,\eta_1,s)}{k(\xi_1,\eta_1,s)}d\xi_1, \tag{11}$$

где

$$h(\xi_1,\eta_1,s)=\int\limits_{0}^{+\infty}e^{ix\xi_1}\Big[\Big\{2M^2\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^2-2M^2\eta_1^2-2M^2\frac{\partial}{\partial x}-M^2s\Big\}\widehat{p}_0(x,\eta_1) - M^2\widehat{p}_1(x,\eta_1)\Big]dx, \tag{12}$$

$$k(\xi_1,\eta_1,s)=2M^2(i\xi_1)^3+(i\xi_1)^2(\beta^2+2M^2s)-2M^2(i\xi_1)(s+\eta_1^2) - (M^2s^2+2M^2s\eta_1^2+\eta_1^2). \tag{13}$$

Вспоминая, что функции $p_0(x,y)$, $u_0(x,y)$, $v_0(x,y)$ финитны и интегрируя их по частям, из представления (11) можно получить такую оценку

$$\|p^*(x,y,t)\|_{L_2(R_+^2)}\le H(t)\big\{\|p_0(x,y)\|_{L_2(R_+^2)}+\|u_0(x,y)\|_{L_2(R_+^2)} + \|v_0(x,y)\|_{L_2(R_+^2)}\big\}. \tag{14}$$

Здесь $H(t)$ — непрерывная функция на интервале $(0,+\infty)$ и $H(t)\to 0$ при $t\to+\infty$.

Рассмотрим второе уравнение системы (9). По аналогии с предыдущим случаем имеем, что функция

$$\widehat{\Omega}^*(x,\eta_1,s)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ix\xi_1}\frac{\Omega_0(\xi_1,\eta_1,s)}{m(\xi_1,\eta_1,s)}d\xi_1, \tag{15}$$

где

$$\begin{gathered}\Omega_0(x,y)=\eta u_0-\xi v_0,\\ m(\xi_1,\eta_1,s)=\delta(\xi_1^2+\eta_1^2)+i\xi_1+s,\end{gathered} \tag{16}$$

является решением рассматриваемого уравнения.

Применяя к $\widehat{\Omega}^*(x,\eta_1,s)$ обратное преобразование Лапласа и действуя по аналогии с выводом неравенства (14), приходим к следующей априорной оценке:

$$\|\widehat{\Omega}^*(x,y,t)\|\le L(t)\{\|u_0(x,y)\|_{L_2(R_+^2)}+\|v_0(x,y)\|_{L_2(R_+^2)}\}. \tag{17}$$

В заключение этого параграфа заметим, что при финитных начальных функциях $p_0(x,y)$, $u_0(x,y)$ и $v_0(x,y)$ можно получить важную информацию о свойствах решений $p^*(x,y,t)$, $\Omega^*(x,y,t)$: если $t>0$, то функции $p^*(x,y,t)$ и $\Omega^*(x,y,t)$ бесконечно дифференцируемы, а начальные данные удовлетворяются в смысле следов из $L_2(R_+)$, а значит, и в смысле обобщенных функций при $t\to+0$.

3. Построение гладкого решения задачи (1)–(5) и его априорные оценки. Асимптотическая устойчивость стационарного решения

Сделаем в смешанной задаче (1)–(5) замену неизвестных функций $p = p^* + \tilde{p}$, $\Omega = \Omega^* + \tilde{\Omega}$. Тогда получим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \{M^2(\tau+\xi)^2 - \triangle - 2M^2(\tau+\xi)\triangle\}\tilde{p} = 0, \quad x>0,\ t>0;\\ \{(\tau+\xi) - \delta\triangle\}\tilde{\Omega} = 0, \quad x>0,\ t>0; \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} L_1(\tilde{p}) = (1+d)\tau^2\tilde{p} - \frac{\beta^2}{M^2}\tau\xi\tilde{p} + \Lambda\eta^2\tilde{p} - 2\delta d\tau \triangle \tilde{p}\\ - 2\tau\xi(\tau - (\delta d - 1)\xi)\tilde{p} = -L_1(p^*), \quad x = 0; \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} L_2(\tilde{p},\tilde{\Omega}) = \delta\eta\tilde{\Omega} - 2\tau\xi\tilde{p} - 2\xi^2\tilde{p} - \Big(\frac{1-\delta}{\delta} - \tilde{d}\Big)\tau\tilde{p}\\ - \Big(\frac{1-\delta}{\delta} + \frac{1}{M^2}\Big)\xi\tilde{p} - \frac{\beta^2}{2M^2\delta}\epsilon\tilde{p} = -L_2(p^*,\Omega^*), \quad x = 0; \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} L_3(\tilde{p},\tilde{\Omega}) = \delta\xi\tilde{\Omega} - \delta\tau\tilde{\Omega} - \Omega + \eta\Big(\Big(\Lambda - d + \frac{1}{M^2}\Big) + 2(1-\delta d)\tau + 2\xi\Big)\tilde{p}\\ = -L_3(p^*,\Omega^*), \end{aligned} \tag{20}$$

$$\tilde{p}|_{t=0} = \tilde{p}_t|_{t=0} = 0, \quad \tilde{\Omega}|_{t=0} = 0. \tag{21}$$

Как и в предыдущем параграфе, применим преобразование Фурье – Лапласа по переменным y и t

$$\begin{aligned} \{2M^2\xi^3 + \xi^2(\beta^2 + 2M^2 s) - 2M^2\xi(s+\eta_1^2)\\ - (M^2s^2 + 2Ms\eta_1^2 + \eta_1^2)\}\widehat{p}(x,\eta_1,s) = 0, \quad x>0; \end{aligned} \tag{22}$$

$$\{\delta\xi^2 - \xi - (s + \delta\eta_1^2)\}\widehat{\Omega}(x,\eta_1,s) = 0, \quad x>0; \tag{23}$$

$$\begin{aligned} \Big\{(1+d)s^2 - \frac{\beta}{M^2}s\xi - \Lambda\eta_1^2 + \delta ds\eta_1^2 - 2s^2\xi - 2s\xi^2\Big\}\widehat{p}(x,\eta_1,s)\\ = -LF(L_1(p^*)), \quad x = 0; \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \delta i\eta_1\widehat{\Omega}(x,\eta_1,s) + \Big\{2s\xi + \xi^2 + \Big(\frac{1-\delta}{\delta} - d\Big)s + \Big(\frac{1-\delta}{\delta} - \frac{1}{M^2}\Big)\xi\\ + \frac{\beta^2}{2M^2\delta}\Big\}\widehat{p}(x,\eta_1,s) = -LF(L_2(p^*,\Omega^*)), \quad x = 0; \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} -(\delta\xi - \delta s - 1)\widehat{\Omega}(x,\eta_1,s) + \Big\{i\eta_1\Big(\Big(\Lambda - d - \frac{1}{M^2}\Big)\\ + 2(1-\delta\tilde{d})s + 2\xi\Big)\Big\}\widehat{p}(x,\eta_1,s) = LF(L_3(p^*,\Omega^*)), \quad x = 0; \end{aligned} \tag{26}$$

где, например, $LF(L_1(p^*))$ обозначает результат применения оператора Фурье – Лапласа к функции $L_1(p^*)$.

Решение задачи (22)–(26) будем искать в классе функций, стремящихся к нулю при $x \to +\infty$ ($\eta_1 \in R,\ s = s_1 + is_2 \in C$ ($s_1 > \sigma,\ \sigma > 0$) — параметры). Для этого вновь вернемся к уравнению (13) и обозначим корни этого уравнения с отрицательной вещественной частью через $\xi^{(1)}(s,\eta_1)$ и $\xi^{(2)}(s,\eta_1)$, а корень уравнения $\delta(z^2-\eta_1^2) - z - s = 0$ с таким же свойством через $\xi^{(3)}(s,\eta_1)$.

Учитывая результаты п. 1 (отсутствие примеров некорректности типа примера Адамара), возможное решение системы (22)–(26) имеет представление

$$\begin{pmatrix} \widehat{p}(x,\eta_1,s) \\ \widehat{\Omega}(x,\eta_1,s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_\Gamma \frac{e^{ix\xi_1}}{A_+(\tau,\xi_1,\eta_1)} d\xi_1 + C_2 \frac{1}{2\pi} \oint\limits_\Gamma \frac{e^{ix\xi_1}\xi_1}{A_+(\tau,\xi_1,\eta_1)} d\xi_1 \\ C_3 e^{\xi^{(3)}(\eta_1,s)x} \end{pmatrix}, \quad x > 0, \tag{27}$$

где $A_+(\tau,\xi_1,\eta_1) = (\xi_1 + i\xi^{(1)}(s,\eta_1))(\xi_1 + i\xi^{(2)}(s,\eta_1))$; простой замкнутый контур Γ охватывает точки $-i\xi^{(1)}(s,\eta_1),\ -i\xi^{(2)}(s,\eta_1)$, а функции $C_1,\ C_2$ и C_3 зависят только от переменных s и η_1, причем $s_1 = \mathrm{Re}\, s > \sigma$, σ — достаточно большое положительное число.

Неоходимое и достаточное условие разрешимости задачи (22)–(26) — отличие от нуля определителя Лопатинского: $detL = det(a_{ij});\quad i,j = 1,2,3$; компоненты матрицы (a_{ij}) таковы:

$$a_{11} = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_\Gamma \frac{L_1(i\xi_1,s,\eta_1)}{A_+(\tau,\xi_1,\eta_1)} d\xi_1,$$

$$a_{12} = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_\Gamma \frac{L_1(i\xi_1,s,\eta_1)\xi_1}{A_+(\tau,\xi_1,\eta_1)} d\xi_1,$$

$$a_{13} = 0,$$

$$a_{21} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_\Gamma \Big\{ \frac{\big[2si\xi_1 + \big(\frac{1-\delta}{\delta} - d\big)s\big] - 2\xi_1^2 + \big(\frac{1-\delta}{\delta} + \frac{1}{M^2}\big)i\xi_1 + \frac{\beta^2}{2M^2\delta}\epsilon}{A_+(\tau,\xi_1,\eta_1)} \Big\} d\xi_1,$$

$$a_{22} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_\Gamma \Big\{ \frac{\big[2si\xi_1 + \big(\frac{1-\delta}{\delta} - d\big)s\big]\xi_1 + [-2\xi_1^2 + \big(\frac{1-\delta}{\delta} + \frac{1}{M^2}\big)i\xi_1 + \frac{\beta^2}{2M^2\delta}\epsilon]\xi_1}{A_+(\tau,\xi_1,\eta_1)} \Big\} d\xi_1,$$

$$a_{23} = \delta i\eta_1,$$

$$a_{31} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_\Gamma \Big\{ \frac{[(2i\xi_1 + 2(1-\delta d)s)i\eta_1] + \big(\Lambda - d + \frac{1}{M^2}\big)i\eta_1}{A_+(\tau,\xi_1,\eta_1)} \Big\} d\xi_1,$$

$$a_{32} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_\Gamma \Big\{ \frac{[(2i\xi_1 + 2(1-\delta d)s)i\eta_1]\xi_1 + \big(\Lambda - d + \frac{1}{M^2}\big)i\eta_1\xi_1}{A_+(\tau,\xi_1,\eta_1)} \Big\} d\xi_1,$$

$$a_{33} = -\delta\xi^{(3)} + \delta s + 1,$$

где $L_1(i\xi_1,s,\eta_1)$ — символ оператора L_1 (формально операторы дифференцирования $\xi,\ \eta,\ \tau$ заменяются переменными $i\xi_1,\ i\eta_1,\ s$ соответственно), $s_1 = \mathrm{Re}\, s > \sigma,\ \sigma > 0,\ \eta_1 \in R$.

Если

$$\det L \neq 0, \tag{28}$$

то $C_1 = C_1(s,\eta_1),\ C_2 = C_2(s,\eta_1),\ C_3 = C_3(s,\eta_1)$ находятся как решения соответствующей неоднородной линейной системы, а вместе с ними определяются и

искомые функции $\widehat{p}(x, \eta_1, s)$, $\widehat{\Omega}(x, \eta_1, s)$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \widehat{p}(x, \eta_1, t) \\ \widehat{\Omega}(x, \eta_1, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st}[C_1(s, \eta)F_1(\xi_1, s, \eta_1) + C_2(s, \eta)F_2(\xi_1, s, \eta_1)]ds \\ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st} \frac{iC_3(s, \eta_1)}{\xi_1 + i\xi^{(3)}(\eta_1, s)} ds, \end{pmatrix} \quad (29)$$

где $F_1(\xi_1, s, \eta_1)$, $F_2(\xi_1, s, \eta_1)$ — Фурье-образы криволинейных интегралов, стоящих в правой части формулы (27), $a > \sigma$ — показатель роста по t функций $p(x, y, t)$ и $\Omega(x, y, t)$.

Получение нужной оценки функций $p(x, y, t)$ и $\Omega(x, y, t)$, а вместе с этим и решения исходной задачи (1)–(5) связано с возможностью аналитического продолжения по переменной s в левую полуплоскость Фурье – Лаплас-образов функций $p(\xi_1, \eta_1, s)$ и $\Omega(\xi_1, \eta_1, s)$ соответственно. Аналитичность по s позволяет заменить интеграл по прямой в представлении (28) на сумму интегралов по берегам нужных разрезов, причем учитываются и полюса функций, в частности, нули определителя Лопатинского $\det L$.

Сделаем следующее предположение

(А): нули определителя Лопатинского, исключая $s = 0$ при $\eta_1 = 0$, лежат в открытой левой полуплоскости, т.е. их вещественная часть отрицательна.

Замечание 1. Фактически выполнение предположения **(А)**, возможно, приводит к некоторым ограничениям для входящих в задачу параметров. Однако, если оно не выполнено, то стремления к нулю нормы решения с ростом времени уже не будет, хотя корректность постановки изучаемой задачи (1)–(5) может быть обоснована.

Справедливость предположения **(А)** позволяет на основе формул (28) получить априорые оценки решения проблемы (1), (18)–(21):

$$\|p(x, y, t)\|_{L_2(R^2_+)} \leq H(t)\{\|p_0(x, y)\|_{L_2(R^2_+)} + \|u_0(x, y)\|_{L_2(R^2_+)} + \|v_0(x, y)\|_{L_2(R^2_+)}\}, \quad (30)$$

$$\|\Omega(x, y, t)\|_{L_2(R^2_+)} \leq \{\|u_0(x, y)\|_{L_2(R^2_+)} + \|v_0(x, y)\|_{L_2(R^2_+)}\}, \quad (31)$$

где $H_1(t)$, $L_1(t)$ — непрерывные функции на $(0, +\infty)$, причем они стремятся к нулю с возрастанием переменной t.

Априорные оценки (14), (17) вместе с неравенствами (30) и (31) обеспечивают асимптотическую устойчивость (по Ляпунову) стационарного решения исходной проблемы (1)–(5).

Замечание 2. Подводя итог сказанному в пп. 2, 3, можно заключить, что фактически доказана корректность смешанной проблемы (1)–(5) и найдено ее гладкое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блохин А. М.* Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1986.
2. *Majda A.* Compressible Fluid Flow and Systems of Conservation Laws in Several Space Variables. New York: Springer-Verlag, 1984.
3. *Tannehill J. C., Holst T. L., and Rakich J. V.* Numerical computation of two-dimensional viscous blunt body flows with an impinging shock // AIAA Journal. 1976. N 14. P. 204–211.

4. *Zajdel A. M.* Evolution of perturbations for planar shock waves // Appl. Mech. Tech. Phys. 1967. P. 30–39 (in Russian).
5. *Metivier G.* Stability analysis of multidimensional viscous shocks // Abstracts of the International Conference "Eleventh International Conference on Hyperbolic Problems. Theory, Numerics, Application". Lyon, France, July 17 - 21, 2006. P. 6.
6. *Blokhin A. M.* On stability of shock waves in a compressible viscous gas // Le Matematiche. 2002. V. LVII, fasc. 1. P. 3–19.
7. *Blokhin A. M., Trakhinin Yu. L.* On stability of shock waves for some models of continuum mechanics // Sib. J. Ind. Math. 2000. V. 3, N 1(5). P. 33–46 (in Russian).
8. *Blokhin A. M., Trakhinin Yu. L.* On stability of shock waves in a compressible viscous heat conducting gas // Acta Mechanica. 2001. N 150. P. 267–275.
9. *Blokhin A. M., Trakhinin Yu. L.* On a modified shock front problem for the compressible Navier – Stokes equations // Quart. Appl. Math. 2004. V. LXII, N 2. P. 221–234.
10. *Blokhin A. M., Mishchenko E. V.* On an approach to studying the stability of shock waves in a viscous gas // Le Matematiche. 2003. V. LVIII, fasc. 1. P. 35–49.
11. *Esipov D. V., Tkachev D. L.* Well - posedness of a modified initial-boundary value problem on stability of shock waves in a viscous gas // Abstracts of the International Conference "Eleventh International Conference on Hyperbolic Problems. Theory, Numerics, Applications". Lyon, France, July 17–21, 2006. P. 65–67.
12. *Blokhin A. M., Tkachev D. L., Baldan L. O.* Well-posedness of a modified initial-boundary value problem on stability of shock waves in a viscous gas. Part I // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 331, N 1. P. 408–423.
13. *Blokhin A. M., Tkachev D. L., Esipov D. V.* Well-posedness of a modified initial-boundary value problem on stability of shock waves in a viscous gas. Part II // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 331, N 1. P. 424–442.
14. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. РХД, 2003.

Блохин Александр Михайлович
Россия, Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
`blokhin@math.nsc.ru`

Ткачев Дмитрий Леонидович
Россия, Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
`tkachev@math.nsc.ru`