Неклассические уравнения математической физики
2007. С. 102–113

УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В МНОГОСЛОЙНОМ ЦИЛИНДРЕ

Г. В. Демиденко

В работе рассматривается одна краевая задача для системы уравнений теории упругости в многослойном цилиндре. Мы приводим схему решения задачи, которую можно использовать при получении явных формул для вектора смещений и компонент тензора напряжений.

Настоящая работа связана с изучением свойств решений системы уравнений теории упругости в многослойных средах. Это направление теории упругости за последние полвека получило бурное развитие в связи с многочисленными применениями многослойных конструкций в современной технике и стройиндустрии.

Хорошо известно, что решение конкретных задач теории упругости представляет значительные трудности в трехмерных областях даже для однородных сред (см., например, [1–4]). В случае же многослойных неоднородных сред трудности естественно возрастают с увеличением числа слоев. В настоящее время разработаны различные методы решения конкретных задач теории упругости для слоистых сред. Подробная библиография работ по этой тематике содержится в монографии [5], в ней описан также предложенный авторами метод решения пространственных задач изгиба слоистых стержней и плит.

В этой работе мы будем рассматривать одну модельную задачу для системы уравнений теории упругости в бесконечной цилиндической области

$$G = \{(x_1, x_2, x_3) : \ R < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R + H, \ -\infty < x_3 < \infty\},$$

при этом цилиндр $\overline{G}$ — многослойный и представим в виде объединения цилиндров

$$\overline{G} = \bigcup_{k=1}^{s} \overline{G}_k,$$

где

$$G_k = \{(x_1, x_2, x_3) : \ R + H_{k-1} < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R + H_k, \ -\infty < x_3 < \infty\},$$

$$0 = H_0 < H_1 < \ldots < H_{s-1} < H_s = H.$$

Мы приведем схему решения задачи, которую можно использовать при получении явных формул для вектора смещений и компонент тензора напряжений.

Запишем систему дифференциальных уравнений теории упругости в цилиндрической системе координат $\{x_1 = r\cos\theta, \ x_2 = r\sin\theta, \ x_3 = z\}$ (см., например,

---

Работа выполнена при поддержке Сибирского отделения Российской академии наук (код проекта 2.2) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00289).

[1], [3]). Предполагается, что внутри каждого слоя G_k выполнены линейные уравнения равновесия

$$\begin{gathered}
\frac{\partial(\sigma_{rr})_k}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\sigma_{r\theta})_k}{\partial\theta}+\frac{\partial(\sigma_{rz})_k}{\partial z}+\frac{(\sigma_{rr})_k-(\sigma_{\theta\theta})_k}{r}=0,\\
\frac{\partial(\sigma_{r\theta})_k}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\sigma_{\theta\theta})_k}{\partial\theta}+\frac{\partial(\sigma_{\theta z})_k}{\partial z}+\frac{2}{r}(\sigma_{r\theta})_k=0,\\
\frac{\partial(\sigma_{rz})_k}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\sigma_{\theta z})_k}{\partial\theta}+\frac{\partial(\sigma_{zz})_k}{\partial z}+\frac{(\sigma_{rz})_k}{r}=0,
\end{gathered}\tag{1}$$

где

$$(\sigma_{rr})_k,\quad(\sigma_{\theta\theta})_k,\quad(\sigma_{zz})_k,\quad(\sigma_{r\theta})_k,\quad(\sigma_{\theta z})_k,\quad(\sigma_{rz})_k$$

— компоненты тензора напряжений в k -том слое. Считаем, что материал каждого слоя подчиняется закону Гука

$$\begin{gathered}
(\sigma_{rr})_k=2\mu_k(\varepsilon_{rr})_k+\lambda_k e_k,\quad(\sigma_{\theta\theta})_k=2\mu_k(\varepsilon_{\theta\theta})_k+\lambda_k e_k,\quad(\sigma_{zz})_k=2\mu_k(\varepsilon_{zz})_k+\lambda_k e_k,\\
(\sigma_{r\theta})_k=2\mu_k(\varepsilon_{r\theta})_k,\quad(\sigma_{\theta z})_k=2\mu_k(\varepsilon_{\theta z})_k,\quad(\sigma_{rz})_k=2\mu_k(\varepsilon_{rz})_k,\\
e_k=(\varepsilon_{rr})_k+(\varepsilon_{\theta\theta})_k+(\varepsilon_{zz})_k,
\end{gathered}\tag{2}$$

где λ_k, μ_k — упругие постоянные Ламе для слоя G_k.

Напомним, что в цилиндрической системе координат компоненты тензора деформации

$$(\varepsilon_{rr})_k,\quad(\varepsilon_{\theta\theta})_k,\quad(\varepsilon_{zz})_k,\quad(\varepsilon_{r\theta})_k,\quad(\varepsilon_{\theta z})_k,\quad(\varepsilon_{rz})_k$$

выражаются через компоненты вектора смещений по следующим формулам

$$\begin{gathered}
(\varepsilon_{rr})_k=\frac{\partial(u_r)_k}{\partial r},\quad(\varepsilon_{\theta\theta})_k=\frac{1}{r}\frac{\partial(u_\theta)_k}{\partial\theta}+\frac{(u_r)_k}{r},\quad(\varepsilon_{zz})_k=\frac{\partial(u_z)_k}{\partial z},\\
(\varepsilon_{r\theta})_k=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(u_r)_k}{\partial\theta}+\frac{\partial(u_\theta)_k}{\partial r}-\frac{(u_\theta)_k}{r}\right),\\
(\varepsilon_{rz})_k=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial(u_z)_k}{\partial r}+\frac{\partial(u_r)_k}{\partial z}\right),\quad(\varepsilon_{\theta z})_k=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial(u_\theta)_k}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial(u_z)_k}{\partial\theta}\right).
\end{gathered}\tag{3}$$

Будем считать, что на границах между слоями G_{k-1} и G_k компоненты тензора деформации σ_{rr}, $\sigma_{r\theta}$, σ_{rz} и компоненты вектора смещений непрерывны, т. е. при $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}=R+H_{k-1}$ выполнены равенства

$$(\sigma_{rr})_k=(\sigma_{rr})_{k-1},\quad(\sigma_{r\theta})_k=(\sigma_{r\theta})_{k-1},\quad(\sigma_{rz})_k=(\sigma_{rz})_{k-1},\tag{4}$$

$$(u_r)_k=(u_r)_{k-1},\quad(u_\theta)_k=(u_\theta)_{k-1},\quad(u_z)_k=(u_z)_{k-1}.\tag{5}$$

На внутренней и внешней боковых поверхностях цилиндра G задаются следующие краевые условия:

$$\sigma_{rr}|_{r=R}=q_{r,int}(z),\quad\sigma_{r\theta}|_{r=R}=0,\quad\sigma_{rz}|_{r=R}=q_{z,int}(z),\tag{6}$$

$$\sigma_{rr}|_{r=R+H}=q_{r,ext}(z),\quad\sigma_{r\theta}|_{r=R+H}=0,\quad\sigma_{rz}|_{r=R+H}=q_{z,ext}(z).\tag{7}$$

Условия поведения решения краевой задачи (1)–(7) при $|z|\to\infty$ будем формулировать в терминах принадлежности компонент решения пространству $L_2(G)$.

Основная наша цель — указать схему решения поставленной краевой задачи в классе вектор-функций, определяющих осесимметричное распределение напряжений.

1. Преобразования системы дифференциальных уравнений (1)–(3)

В каждом цилиндрическом слое G_k запись дифференциальных уравнений (1)–(3) отличается только в индексах, поэтому в дальнейшем, рассматривая эти уравнения в конкретном слое, для простоты индексы будем опускать.

Перепишем систему дифференциальных уравнений (1)–(3) в слое G_k, переходя от переменных

$$(r,\,\theta,\,z),\quad r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}=R+\xi,\quad \xi\in(H_{k-1},\,H_k)$$

к переменным $(x,\,\theta,\,\overline{z})$ по формулам

$$r=\frac{H}{\varepsilon}(1+\varepsilon x),\quad x\in\left(\frac{H_{k-1}}{H},\,\frac{H_k}{H}\right),\quad z=R\overline{z},\quad \varepsilon=\frac{H}{R}.$$

Переходя к безразмерным переменным и функциям, используем следующие обозначения

$$u_x\leftrightarrow\frac{u_r}{H},\quad u_\theta\leftrightarrow\frac{u_\theta}{H},\quad u_z\leftrightarrow\frac{u_z}{H},$$

$$\sigma_{xx}\leftrightarrow\sigma_{rr},\quad \sigma_{x\theta}\leftrightarrow\sigma_{r\theta},\quad \sigma_{xz}\leftrightarrow\sigma_{rz},$$

$$\varepsilon_{xx}\leftrightarrow\varepsilon_{rr},\quad \varepsilon_{x\theta}\leftrightarrow\varepsilon_{r\theta},\quad \varepsilon_{xz}\leftrightarrow\varepsilon_{rz},$$

а для остальных функций обозначения сохраняем.

Уравнения равновесия (1), очевидно, принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}&=-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\frac{\partial\sigma_{x\theta}}{\partial\theta}-\varepsilon\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\sigma_{xx}+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\sigma_{\theta\theta},\\ \frac{\partial\sigma_{x\theta}}{\partial x}&=-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}-\varepsilon\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial z}-\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon x}\sigma_{x\theta},\\ \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}&=-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta}-\varepsilon\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\sigma_{xz}.\end{aligned}\tag{8}$$

Уравнения (3) в новых переменных разобьем на две группы. К первой группе отнесем уравнения, содержащие производные по x:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}=\varepsilon_{xx},\quad \frac{\partial u_\theta}{\partial x}=2\varepsilon_{x\theta}-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\frac{\partial u_x}{\partial\theta}+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}u_\theta,\quad \frac{\partial u_z}{\partial x}=2\varepsilon_{xz}-\varepsilon\frac{\partial u_x}{\partial z}.\tag{9}$$

Ко второй группе отнесем уравнения, не содержащие производных по x:

$$\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}u_x,\quad 2\varepsilon_{\theta z}=\varepsilon\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\frac{\partial u_z}{\partial\theta},\quad \varepsilon_{zz}=\varepsilon\frac{\partial u_z}{\partial z}.\tag{10}$$

Используя закон Гука (2) и уравнения (10), нетрудно получить явные формулы для компонент

$$\varepsilon_{xx},\quad \varepsilon_{x\theta},\quad \varepsilon_{xz},\quad \sigma_{\theta\theta},\quad \sigma_{\theta z},\quad \sigma_{zz}.$$

Подставив эти формулы в уравнения (8) и (9), получим следующую систему дифференциальных уравнений для вектор-функции с компонентами u_x, u_θ, u_z,

σ_{xx}, $\sigma_{x\theta}$, σ_{xz} :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_x}{\partial x} =& -\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}u_x - \frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\varepsilon\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2\mu+\lambda}\sigma_{xx},\\
\frac{\partial u_\theta}{\partial x} =& -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\frac{\partial u_x}{\partial \theta} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}u_\theta + \frac{1}{\mu}\sigma_{x\theta},\\
\frac{\partial u_z}{\partial x} =& -\varepsilon\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{1}{\mu}\sigma_{xz},\\
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} =& \frac{4(\mu+\lambda)\mu}{2\mu+\lambda}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\right)^2 u_x + \frac{4(\mu+\lambda)\mu}{2\mu+\lambda}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\right)^2\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\\
&+ \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\varepsilon\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2\mu}{2\mu+\lambda}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\sigma_{xx} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\frac{\partial \sigma_{x\theta}}{\partial \theta} - \varepsilon\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z},\\
\frac{\partial \sigma_{x\theta}}{\partial x} =& -\frac{4(\mu+\lambda)\mu}{2\mu+\lambda}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\right)^2\frac{\partial u_x}{\partial \theta} - \left(\frac{4(\mu+\lambda)\mu}{2\mu+\lambda}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \mu\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u_\theta\\
&- \frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{2\mu+\lambda}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\varepsilon\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta\partial z} - \frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \theta} - 2\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\sigma_{x\theta},\\
\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} =& -\frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\varepsilon\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{2\mu+\lambda}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\varepsilon\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta\partial z}u_\theta\\
&- \left(\mu\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{4(\mu+\lambda)\mu}{2\mu+\lambda}\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u_z - \frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\varepsilon\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\sigma_{xz}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

В следующих двух параграфах мы будем заниматься построением класса осесимметричных решений этой системы.

2. Построение осесимметричных решений системы уравнений (11)

Поскольку решения исходной краевой задачи должны принадлежать пространству $L_2(G)$, то для его построения будем использовать преобразование Фурье по z:

$$\widehat{\varphi}(x,\theta,\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta z}\varphi(x,\theta,z)dz.$$

Применим оператор Фурье по z к системе уравнений (11). Тогда получим следующую систему дифференциальных уравнений с параметром $\eta\in R$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \widehat{u}_x}{\partial x} =& -\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\widehat{u}_x - \frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\frac{\partial \widehat{u}_\theta}{\partial \theta} - \frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\varepsilon i\eta\widehat{u}_z + \frac{1}{2\mu+\lambda}\widehat{\sigma}_{xx},\\
\frac{\partial \widehat{u}_\theta}{\partial x} =& -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\frac{\partial \widehat{u}_x}{\partial \theta} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\widehat{u}_\theta + \frac{1}{\mu}\widehat{\sigma}_{x\theta}\\
\frac{\partial \widehat{u}_z}{\partial x} =& -\varepsilon i\eta\widehat{u}_x + \frac{1}{\mu}\widehat{\sigma}_{xz},\\
\frac{\partial \widehat{\sigma}_{xx}}{\partial x} =& \frac{4(\mu+\lambda)\mu}{2\mu+\lambda}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\right)^2\widehat{u}_x + \frac{4(\mu+\lambda)\mu}{2\mu+\lambda}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\right)^2\frac{\partial \widehat{u}_\theta}{\partial \theta}\\
&+ \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\varepsilon i\eta\widehat{u}_z - \frac{2\mu}{2\mu+\lambda}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\widehat{\sigma}_{xx} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\frac{\partial \widehat{\sigma}_{x\theta}}{\partial \theta} - \varepsilon i\eta\widehat{\sigma}_{xz},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\widehat{\sigma}_{x\theta}}{\partial x} =& -\frac{4(\mu+\lambda)\mu}{2\mu+\lambda}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\right)^2\frac{\partial\widehat{u}_x}{\partial\theta} - \left(\frac{4(\mu+\lambda)\mu}{2\mu+\lambda}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \mu\varepsilon^2(i\eta)^2\right)\widehat{u}_\theta \\ &- \frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{2\mu+\lambda}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\varepsilon i\eta\frac{\partial\widehat{u}_z}{\partial\theta} - \frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\frac{\partial\widehat{\sigma}_{xx}}{\partial\theta} - 2\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\widehat{\sigma}_{x\theta}, \\ \frac{\partial\widehat{\sigma}_{xz}}{\partial x} =& -\frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\varepsilon i\eta\widehat{u}_x - \frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{2\mu+\lambda}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\varepsilon i\frac{\partial\widehat{u}_\theta}{\partial\theta} \\ &- \left(\mu\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{4(\mu+\lambda)\mu}{2\mu+\lambda}\varepsilon^2(i\eta)^2\right)\widehat{u}_z - \frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\varepsilon i\eta\widehat{\sigma}_{xx} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\widehat{\sigma}_{xz}.\end{aligned} \tag{12}$$

Будем искать решение системы (12), не зависящими от угла θ :

$$\begin{gathered}\widehat{u}_x(x,\theta,\eta) = u_{x0}(x,\eta), \quad \widehat{u}_\theta(x,\theta,\eta) = u_{\theta0}(x,\eta), \quad \widehat{u}_z(x,\theta,\eta) = u_{z0}(x,\eta), \\ \widehat{\sigma}_{xx}(x,\theta,\eta) = \sigma_{xx0}(x,\eta), \quad \widehat{\sigma}_{x\theta}(x,\theta,\eta) = \sigma_{x\theta0}(x,\eta), \quad \widehat{\sigma}_{xz}(x,\theta,\eta) = \sigma_{xz0}(x,\eta).\end{gathered} \tag{13}$$

Подставив эти функции в (12), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром $\eta \in R$:

$$\begin{aligned} D_x u_{x0} =& -\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}u_{x0} - \frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\varepsilon i\eta u_{z0} + \frac{1}{2\mu+\lambda}\sigma_{xx0}, \\ D_x u_{\theta0} =& \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}u_{\theta0} + \frac{1}{\mu}\sigma_{x\theta0}, \\ D_x u_{z0} =& -\varepsilon i\eta u_{x0} + \frac{1}{\mu}\sigma_{xz0}, \\ D_x\sigma_{xx0} =& \frac{4(\mu+\lambda)\mu}{2\mu+\lambda}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\right)^2 u_{x0} + \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\right)^2\varepsilon i\eta u_{z0} \\ &- \frac{2\mu}{2\mu+\lambda}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\sigma_{xx0} - \varepsilon i\eta\sigma_{xz0}, \\ D_x\sigma_{x\theta0} =& -\mu\varepsilon^2(i\eta)^2u_{\theta0} - 2\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\sigma_{x\theta0}, \\ D_x\sigma_{xz0} =& -\frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\varepsilon(i\eta)u_{x0} - \frac{4(\mu+\lambda)\mu}{2\mu+\lambda}\varepsilon^2(i\eta)^2u_{z0} \\ &- \frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\varepsilon i\eta\sigma_{xx0} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\sigma_{xz0}. \end{aligned} \tag{14}$$

Второе и пятое уравнения (14) представляют замкнутую систему относительно $u_{\theta0}$, $\sigma_{x\theta0}$ и не представляют интереса, поскольку в случае осесимметричного распределения напряжений $u_{\theta0} \equiv 0$, $\sigma_{x\theta0} \equiv 0$ (см., например, [3]). Покажем, как можно решить остальные уравнения системы (14).

Из первого уравнения системы (14) имеем

$$\sigma_{xx0} = (2\mu+\lambda)D_x u_{x0} + \lambda\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}u_{x0} + \lambda\varepsilon i\eta u_{z0}. \tag{15}$$

Подставляя его в четвертое уравнение системы (14), после простых преобразований получаем

$$\begin{aligned}(2\mu+\lambda)D_x^2u_{x0} + \lambda\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}D_xu_{x0} - \lambda\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\right)^2u_{x0} + \lambda\varepsilon i\eta D_xu_{z0} \\ = 2\mu\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\right)^2u_{x0} - 2\mu\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}D_xu_{x0} - \varepsilon i\eta\sigma_{xz0}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$(2\mu+\lambda)D_x^2 u_{x0} = (2\mu+\lambda)\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\right)^2 u_{x0} - (2\mu+\lambda)\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}D_x u_{x0} \\ - \lambda\varepsilon i\eta D_x u_{z0} - \varepsilon i\eta\sigma_{xz0}. \quad (16)$$

Аналогичным образом, подставляя (15) в шестое уравнение системы (14), получаем

$$D_x\sigma_{xz0} = -\frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\varepsilon i\eta u_{x0} - \frac{4(\mu+\lambda)\mu}{2\mu+\lambda}\varepsilon^2(i\eta)^2 u_{z0} \\ - \frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\varepsilon i\eta\left((2\mu+\lambda)D_x u_{x0} + \lambda\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}u_{x0} + \lambda\varepsilon i\eta u_{z0}\right) - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\sigma_{xz0}.$$

Отсюда

$$D_x\sigma_{xz0} = -\lambda\varepsilon i\eta D_x u_{x0} - \lambda\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\varepsilon i\eta u_{x0} - (2\mu+\lambda)\varepsilon^2(i\eta)^2 u_{z0} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\sigma_{xz0}. \quad (17)$$

Из третьего уравнения системы (14) имеем

$$\sigma_{xz0} = \mu D_x u_{z0} + \mu\varepsilon i\eta u_{x0}. \quad (18)$$

Подставляя это выражение в систему (16), (17), получим

$$\begin{aligned} (2\mu+\lambda)D_x^2 u_{x0} = {} & (2\mu+\lambda)\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\right)^2 u_{x0} - (2\mu+\lambda)\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}D_x u_{x0} \\ & -\lambda\varepsilon i\eta D_x u_{z0} - \mu\varepsilon i\eta D_x u_{z0} - \mu\varepsilon^2(i\eta)^2 u_{x0}, \\ \mu D_x^2 u_{z0} + \mu\varepsilon i\eta D_x u_{x0} = {} & -\lambda\varepsilon i\eta D_x u_{x0} - \lambda\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\varepsilon i\eta u_{x0} \\ & -(2\mu+\lambda)\varepsilon^2(i\eta)^2 u_{z0} - \mu\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}D_x u_{z0} - \mu\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\varepsilon i\eta u_{x0}. \end{aligned}$$

Перепишем эту систему в следующем виде

$$\begin{aligned} & D_x^2 u_{x0} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}D_x u_{x0} - \left[\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\right)^2 + \frac{\mu}{2\mu+\lambda}\varepsilon^2\eta^2\right]u_{x0} + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\varepsilon i\eta D_x u_{z0} = 0, \\ & D_x^2 u_{z0} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}D_x u_{z0} - \frac{2\mu+\lambda}{\mu}\varepsilon^2\eta^2 u_{z0} + \frac{\mu+\lambda}{\mu}\varepsilon i\eta\left(D_x u_{x0} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}u_{x0}\right) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Из проведенных рассуждений следует, что нахождение осесимметричных решений системы (11) сводится к построению решений первого, третьего, четвертого и шестого уравнений системы (12). А нахождение решений системы этих уравнений сводится к решению системы уравнений (19) и использованию соотношений (15), (18). В результате, с учетом того, что $u_{\theta 0} \equiv 0$, $\sigma_{x\theta 0} \equiv 0$, будут найдены все компоненты (13). Применяя к ним обратный оператор Фурье по η, получим класс осесимметричных решений системы дифференциальных уравнений (11).

Итак, осталось разобраться с решением системы уравнений (19). Этому вопросу посвящен следующий параграф.

3. Нахождение общего решения системы (19)

Нетрудно видеть, что один класс решений системы дифференциальных уравнений (19) можно построить в виде

$$\begin{aligned} u_{x0}(x,\eta) &= D_x v(x,\eta), \\ u_{z0}(x,\eta) &= \varepsilon i\eta v(x,\eta). \end{aligned} \tag{20}$$

Действительно, если это решение, то подставляя в первое уравнение системы (19), должны получить тождество

$$D_x\left(D_x^2 v + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x} D_x v - \varepsilon^2\eta^2 v\right) \equiv 0.$$

А подставляя во второе уравнение (19), должны получить

$$D_x^2 v + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x} D_x v - \varepsilon^2\eta^2 v \equiv 0.$$

Следовательно, если $v(x,\eta)$ является решением дифференциального уравнения

$$D_x^2 v + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x} D_x v - \varepsilon^2\eta^2 v = 0, \tag{21}$$

то вектор-функция (20) удовлетворяет системе (19).

Отметим, что после замены $\xi = \eta(1+\varepsilon x)$, уравнение (21) сводится к модифицированному уравнению Бесселя нулевого порядка

$$D_\xi^2 \hat{v} + \frac{1}{\xi} D_\xi \hat{v} - \hat{v} = 0,$$

Поэтому учитывая (20), получаем два линейно независимых решения системы (19):

$$\begin{aligned} u_{x0}^1(x,\eta) &= D_x I_0(\eta(1+\varepsilon x)), \\ u_{z0}^1(x,\eta) &= \varepsilon i\eta I_0(\eta(1+\varepsilon x)) \end{aligned} \tag{22}$$

и

$$\begin{aligned} u_{x0}^2(x,\eta) &= D_x K_0(\eta(1+\varepsilon x)), \\ u_{z0}^2(x,\eta) &= \varepsilon i\eta K_0(\eta(1+\varepsilon x)), \end{aligned} \tag{23}$$

где $I_0(\xi)$ — функция Бесселя первого рода мнимого аргумента нулевого порядка, $K_0(\xi)$ — функция Макдональда нулевого порядка (см., например, [6]).

Еще один класс решений системы (19), будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_{x0}(x,\eta) &= \alpha_1 w(x,\eta) + \alpha_2(1+\varepsilon x) D_x w(x,\eta), \\ u_{z0}(x,\eta) &= \alpha_3(1+\varepsilon x) i\eta w(x,\eta). \end{aligned} \tag{24}$$

Если это решение, то подставляя во второе уравнение системы (19), должны получить тождество

$$\left(\alpha_3 + \varepsilon\alpha_2\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)(1+\varepsilon x) D_x^2 w + \varepsilon\left(3\alpha_3 + \alpha_1\frac{\mu+\lambda}{\mu} + 2\varepsilon\alpha_2\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right) D_x w$$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon x}\left(\alpha_3 + \alpha_1\frac{\mu+\lambda}{\mu}\right) w - \alpha_3\frac{2\mu+\lambda}{\mu}(1+\varepsilon x)\varepsilon^2\eta^2 w \equiv 0. \tag{25}$$

Выберем параметры α_1, α_2 и α_3 так, чтобы

$$2\alpha_3 + \alpha_1 \frac{\mu+\lambda}{\mu} + \varepsilon\alpha_2 \frac{\mu+\lambda}{\mu} = 0. \tag{26}$$

Тогда разделив обе части (25) на

$$\left(\alpha_3 + \varepsilon\alpha_2 \frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)(1+\varepsilon x),$$

получим тождество

$$D_x^2 w + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x} D_x w - \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon x)^2} w - \frac{\alpha_3 \frac{2\mu+\lambda}{\mu}}{\left(\alpha_3 + \varepsilon\alpha_2 \frac{\mu+\lambda}{\mu}\right)} \varepsilon^2\eta^2 w \equiv 0.$$

Полагаем теперь $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = \varepsilon$, тогда это тождество переписывается следующим образом

$$D_x^2 w + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x} D_x w - \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon x)^2} w - \varepsilon^2\eta^2 w \equiv 0,$$

а коэффициент α_1 имеет вид

$$\alpha_1 = -\varepsilon \frac{3\mu+\lambda}{\mu+\lambda}.$$

В силу сказанного из (24) получаем, что функции

$$\begin{aligned} u_{x0}(x,\eta) = &\quad -\varepsilon \frac{3\mu+\lambda}{\mu+\lambda} w(x,\eta) + (1+\varepsilon x) D_x w(x,\eta), \\ u_{z0}(x,\eta) = &\quad \varepsilon(1+\varepsilon x) i\eta w(x,\eta), \end{aligned} \tag{27}$$

где $w(x,\eta)$ решение уравнения

$$D_x^2 w + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x} D_x w - \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon x)^2} w - \varepsilon^2\eta^2 w = 0, \tag{28}$$

удовлетворяют второму уравнению системы (19).

Покажем, что функции (27) удовлетворяют первому уравнению (19). С учетом того, что $w(x,\eta)$ является решением уравнения (28), можно показать, что проверка этого сводится к доказательству тождества

$$(1+\varepsilon x) D_x^3 w - \left(3\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon x} + \varepsilon^2\eta^2(1+\varepsilon x)\right) D_x w - \varepsilon\left(3\frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon x)^2} + \varepsilon^2\eta^2\right) w \equiv 0. \tag{29}$$

Для его доказательства вновь учитываем, что $w(x,\eta)$ решение уравнения (28) и, следовательно,

$$(1+\varepsilon x) D_x^3 w \equiv -2\varepsilon D_x^2 w + \left(\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon x} + \varepsilon^2\eta^2(1+\varepsilon x)\right) D_x w - \varepsilon\left(\frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon x)^2} - \varepsilon^2\eta^2\right) w.$$

Обозначив левую часть (29) через $l(x,\eta)$ и подставив вместо слагаемого

$$(1+\varepsilon x) D_x^3 w$$

указанное выше выражение, можно получить следующее представление

$$l(x,\eta) \equiv -2\varepsilon\left(D_x^2 w + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x} D_x w - \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon x)^2} w - \varepsilon^2\eta^2 w\right).$$

Отсюда в силу (28) вытекает тождество (29).

Итак, класс функций (27) является решением системы (19).

Отметим, что после замены $\xi = \eta(1+\varepsilon x)$, уравнение (28) сводится к модифицированному уравнению Бесселя первого порядка

$$D_\xi^2 \hat{w} + \frac{1}{\xi} D_\xi \hat{w} - \left(\frac{1}{\xi^2} + 1\right) \hat{w} = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$\hat{w}(\xi) = I_1(\xi) c_1 + K_1(\xi) c_2,$$

где $I_1(\xi)$ — функция Бесселя первого рода мнимого аргумента первого порядка, $K_1(\xi)$ — функция Макдональда первого порядка (см., например, [6]). Поэтому учитывая (27), дополнительно к (22), (23) получаем еще два линейно независимых решения системы (19):

$$\begin{aligned} u_{x0}^3(x,\eta) = & \quad -\varepsilon \frac{3\mu+\lambda}{\mu+\lambda} I_1(\eta(1+\varepsilon x)) + (1+\varepsilon x) D_x I_1(\eta(1+\varepsilon x)), \\ u_{z0}^3(x,\eta) = & \quad \varepsilon(1+\varepsilon x) i\eta I_1(\eta(1+\varepsilon x)) \end{aligned} \tag{30}$$

и

$$\begin{aligned} u_{x0}^4(x,\eta) = & \quad -\varepsilon \frac{3\mu+\lambda}{\mu+\lambda} K_1(\eta(1+\varepsilon x)) + (1+\varepsilon x) D_x K_1(\eta(1+\varepsilon x)), \\ u_{z0}^4(x,\eta) = & \quad \varepsilon(1+\varepsilon x) i\eta K_1(\eta(1+\varepsilon x)). \end{aligned} \tag{31}$$

Итак, при любом фиксированном η вектор-функции (22), (23), (30), (31) образуют базис в пространстве решений системы дифференциальных уравнений (19).

4. Схема построения решения краевой задачи (1)–(7)

Напомним, что мы ищем осесимметричное решение краевой задачи (1)–(7), принадлежащее пространству $L_2(G)$. Следовательно, используя оператор Фурье по z и учитывая сказанное в параграфах 1, 2, решение нашей задачи сводим к построению решения следующей краевой задачи на отрезке:

$$\begin{aligned} & D_x v = A_1 v, \quad x \in I_1 = \left(0, \tfrac{H_1}{H}\right), \\ & D_x v = A_2 v, \quad x \in I_2 = \left(\tfrac{H_1}{H}, \tfrac{H_2}{H}\right), \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & D_x v = A_s v, \quad x \in I_s = \left(\tfrac{H_{s-1}}{H}, 1\right), \\ & Bv|_{x=0} = \begin{pmatrix} \hat{q}_{r,int}(\eta) \\ \hat{q}_{z,int}(\eta) \end{pmatrix}, \\ & Bv|_{x=1} = \begin{pmatrix} \hat{q}_{r,ext}(\eta) \\ \hat{q}_{z,ext}(\eta) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{32}$$

где

$$v(x,\eta)=\begin{pmatrix} u_{x0}(x,\eta)\\ u_{z0}(x,\eta)\\ \sigma_{xx0}(x,\eta)\\ \sigma_{xz0}(x,\eta)\end{pmatrix},$$

$$A_k=\begin{pmatrix} -\dfrac{\lambda_k}{\alpha_k}\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon x} & -\dfrac{\lambda_k}{\alpha_k}\varepsilon i\eta & \dfrac{1}{\alpha_k} & 0\\ -\varepsilon i\eta & 0 & 0 & \dfrac{1}{\mu_k}\\ \dfrac{4\mu_k\beta_k}{\alpha_k}\left(\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\right)^2 & \dfrac{2\mu_k\lambda_k}{\alpha_k}\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\varepsilon i\eta & -\dfrac{2\mu_k}{\alpha_k}\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon x} & -\varepsilon i\eta\\ -\dfrac{2\mu_k\lambda_k}{\alpha_k}\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\varepsilon i\eta & -\dfrac{4\mu_k\beta_k}{\alpha_k}\varepsilon^2(i\eta)^2 & -\dfrac{\lambda_k}{\alpha_k}\varepsilon i\eta & -\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \alpha_k=2\mu_k+\lambda_k,\quad \beta_k=\mu_k+\lambda_k.$$

Решение краевой задачи будем искать в классе кусочно-гладких по x вектор-функций:

$$v\in\bigcup_1^s C^1(I_k),$$

при этом учитывая условия согласования на границах слоев (4), (5), предполагаем, что $v\in C[0,\,1]$.

При построении решения этой задачи можно использовать метод стрельбы. Для этого вначале выпишем базис в пространстве решений системы дифференциальных уравнений

$$D_xv=A_kv,\quad x\in I_k=\left(\frac{H_{k-1}}{H},\,\frac{H_k}{H}\right). \tag{33}$$

Используя формулы линейно независимых решений системы (19) и соотношения (15), (18), получим следующие выражения для базисных вектор-функций системы (33):

$$v_k^j(x,\eta)=\begin{pmatrix} u_{x0}^j(x,\eta)\\ u_{z0}^j(x,\eta)\\ \sigma_{xx0}^j(x,\eta)\\ \sigma_{xz0}^j(x,\eta)\end{pmatrix},\quad j=1,2,3,4,$$

где компоненты $u_{x0}^j(x,\eta)$, $u_{z0}^j(x,\eta)$ определены в (22), (23), (30), (31) и

$$\sigma_{xx0}^j(x,\eta)=(2\mu_k+\lambda_k)D_xu_{x0}^j(x,\eta)+\lambda_k\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}u_{x0}^j(x,\eta)+\lambda_k\varepsilon i\eta u_{z0}^j(x,\eta),$$

$$\sigma_{xz0}^j(x,\eta)=\mu_k(D_xu_{z0}^j(x,\eta)+\varepsilon i\eta u_{x0}^j(x,\eta)).$$

Фундаментальная матрица системы (33) имеет вид

$$V_k(x,\eta) = (v_k^1(x,\eta)\ v_k^2(x,\eta)\ v_k^3(x,\eta)\ v_k^4(x,\eta)).$$

Построим общее решение системы (33) на первом интервале I_1, удовлетворяющее левому граничному условию. Учитывая наши обозначения, такое решение можно записать следующим образом

$$v(x,\eta) = V_1(x,\eta)V_1^{-1}(0,\eta)\begin{pmatrix} \alpha_1(\eta) \\ \alpha_2(\eta) \\ \hat{q}_{r,int}(\eta) \\ \hat{q}_{z,int}(\eta) \end{pmatrix}, \quad x \in I_1,$$

где $\alpha_1(\eta)$, $\alpha_2(\eta)$ — произвольные функции.

Рассмотрим теперь второй интервал I_2 и построим решение системы (33), удовлетворяющее граничному условию

$$v|_{x=H_1/H} = V_1\left(\frac{H_1}{H},\eta\right)V_1^{-1}(0,\eta)\begin{pmatrix} \alpha_1(\eta) \\ \alpha_2(\eta) \\ \hat{q}_{r,int}(\eta) \\ \hat{q}_{z,int}(\eta) \end{pmatrix}.$$

Используя фундаментальную матрицу решений $V_2(x,\eta)$, очевидно, будем иметь

$$v(x,\eta) = V_2(x,\eta)V_2^{-1}\left(\frac{H_1}{H},\eta\right)V_1\left(\frac{H_1}{H},\eta\right)V_1^{-1}(0,\eta)\begin{pmatrix} \alpha_1(\eta) \\ \alpha_2(\eta) \\ \hat{q}_{r,int}(\eta) \\ \hat{q}_{z,int}(\eta) \end{pmatrix}.$$

Далее повторяем аналогичные построения на каждом интервале I_k. Тогда на последнем интервале I_s получим

$$v(x,\eta) = V_s(x,\eta)V_s^{-1}\left(\frac{H_{s-1}}{H},\eta\right)\dots V_1\left(\frac{H_1}{H},\eta\right)V_1^{-1}(0,\eta)\begin{pmatrix} \alpha_1(\eta) \\ \alpha_2(\eta) \\ \hat{q}_{r,int}(\eta) \\ \hat{q}_{z,int}(\eta) \end{pmatrix}.$$

Подставляя теперь эту формулу в правое граничное условие, получаем следующую систему линейных уравнений

$$B\,V_s(1,\eta)V_s^{-1}\left(\frac{H_{s-1}}{H},\eta\right)\dots V_1\left(\frac{H_1}{H},\eta\right)V_1^{-1}(0,\eta)\begin{pmatrix} \alpha_1(\eta) \\ \alpha_2(\eta) \\ \hat{q}_{r,int}(\eta) \\ \hat{q}_{z,int}(\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{q}_{r,ext}(\eta) \\ \hat{q}_{z,ext}(\eta) \end{pmatrix}$$

для нахождения неизвестных функций $\alpha_1(\eta)$, $\alpha_2(\eta)$.

Решая выписанную систему линейных уравнений, найдем решение краевой задачи (32). Следовательно, при подходящих условиях на граничные функции, обращая преобразование Фурье по η, можно получить явные формулы исходной краевой задачи.

В заключение автор выражает благодарность проф. Ю. В. Немировскому за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Векуа И. Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982.

2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.

3. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975.

4. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. Л., М.: ОНТИ, 1937.

5. *Горынин Г. Л., Немировский Ю. В.* Пространственные задачи изгиба и кручения слоистых конструкций. Метод асимптотического расщепления. Новосибирск: Наука, 2004.

6. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963.

Демиденко Геннадий Владимирович

Россия, Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

`demidenk@math.nsc.ru`