Неклассические уравнения математической физики
2007. С. 114–127

УДК 517.956+517.968.2

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНО-НАГРУЖЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов

В работе рассматриваются вопросы разрешимости граничной задачи для спектрально-нагруженного по пространственной переменной уравнения теплопроводности, а также сопряженной граничной задачи.

В данной работе развивается теория о разрешимости так называемых спектрально-нагруженных параболических уравнений (на примере одномерного по пространственной переменной оператора теплопроводности на четверти плоскости). В ранее проведенных исследованиях [1–4] нагруженное слагаемое являлось слабым возмущением для дифференциальной части изучаемых уравнений. В [5] исследуется разрешимость параболического уравнения, в котором нагрузка является коэффициентом младшего слагаемого. Различные случаи, когда нагрузка уравнения определяется следом искомого решения граничной задачи на линии $x(t) = t^\omega$ и не является слабым возмущением его дифференциальной части, были предметом рассмотрений работ [6–10]. В указанных работах изучены случаи: $\omega = 1/2$ [8, 9], $1/2 < \omega < \infty$ [10] и $\omega = 1$ [11, 12]. Здесь мы изучаем случай $\omega = 0$, следуя результатам работ [10–12]. При этом так же, как в [8–12], мы пользуемся методами функционального анализа, теории обобщенных функций, комплексного анализа, дифференциальных и интегральных уравнений [13–22].

В п. 1 даются постановки исследуемых задач 1 и 2. Сведение пары граничных задач к интегральным уравнениям приводится в п. 2. Теория разрешимости полученных в п. 2 интегральных уравнений излагается в п. 3. Основные результаты этого пункта формулируются в леммах 1–3. В пп. 4 и 5 соответственно решаются задачи 1 и 2, сформулированные в п. 1 (теоремы 1–5). Наконец, в п. 6 приводится пример нелокальной (внутренне-граничной) задачи для уравнения теплопроводности в четверти плоскости, к которому применяются полученные в пп. 4 и 5 результаты работы.

1. Постановки задач

Пусть $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$, $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$, $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$. Рассмотрим в области $Q = \{x \in \mathbb{R}_+^x,\ t \in \mathbb{R}_+^t\}$ следующие граничные задачи:

$$L_\lambda u \equiv (L - \lambda B)u = f \Longleftrightarrow \begin{cases} u_t - u_{xx} + \lambda u_{xx}(x,t)|_{x=1} = f, \\ u(x,0) = u(0,t) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$L_\lambda^* v \equiv (L-\lambda B)^* v = g \Longleftrightarrow \begin{cases} -v_t - v_{xx} + \overline{\lambda}\delta''(x-1) \otimes \int\limits_0^\infty v(\xi,t)\,d\xi = g, \\ v(x,\infty) = v(0,t) = v(\infty,t) = v_x(\infty,t) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

и спектральные задачи:

$$Lu = \lambda B u, \tag{3}$$

$$L^* v = \overline{\lambda} B^* v, \tag{4}$$

где оператор B определяется нагруженным слагаемым $u_{xx}(x,t)|_{x=1}$,

$$\begin{cases} \lambda \in \mathbb{C} \text{ — спектральный параметр}, \quad f \in L_\infty(Q),\ g \in L_1(Q) \text{ — заданы}, \\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\right)\Bigg|_{x=1} \in L_\infty(\mathbb{R}_+^t), \end{cases} \tag{5}$$

$G(x,\xi,t)$ — функция Грина, определяемая ядром интегрального оператора L^{-1}.

Определим функциональные классы $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ для решений соответственно граничных задач (1) и (2), а также области определения $\mathcal{D}(L)$ и $\mathcal{D}(L^*)$ операторов L и L^* соответственно следующим образом

$$\mathcal{U} = \{u|\ u,\ u_t - u_{xx} \in L_\infty(Q),\ u_{xx}(x,t)|_{x=1} \in L_\infty(\mathbb{R}_+)\}, \tag{6}$$

$$\mathcal{V} = \left\{v|\ v,\ v_t + v_{xx} \in L_1(Q),\ \int\limits_0^\infty v(\xi,t)\,d\xi \in L_1(\mathbb{R}_+)\right\}, \tag{7}$$

$$\mathcal{D}(L) = \{u|\ u \in \mathcal{U},\ u(x,0) = u(0,t) = 0\}, \tag{8}$$

$$\mathcal{D}(L^*) = \{v|\ v \in \mathcal{V},\ v(x,\infty) = v(0,t) = v(\infty,t) = v_x(\infty,t) = 0\}. \tag{9}$$

Граничная задача (2) является сопряженной к задаче (1). Действительно, согласно (1), (2), имеем

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, L^* v\rangle \quad \forall u \in \mathcal{D}(L), \quad \forall v \in \mathcal{D}(L^*).$$

Задача 1. Требуется исследовать вопросы разрешимости граничных задач (1) и (2) при условиях (5)–(9).

Задача 2. Требуется исследовать спектральные задачи (3) и (4) об определении пар $\{\lambda, u_\lambda(x,t)\}$ и $\{\lambda, v_\lambda(x,t)\}$ при условиях (6)–(9).

2. Сведение к интегральным уравнениям

Обращая дифференциальную часть в граничной задаче (1), будем иметь

$$u(x,t) = -\lambda \int\limits_0^t \mathcal{K}_0(x,t-\tau) u_{\eta\eta}(\eta,\tau)|_{\eta=1}\,d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{10}$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right) \right\}, \tag{11}$$

$$\mathcal{K}_0(x,t-\tau)=\int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)\,d\xi=\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right). \tag{12}$$

Теперь дифференцируя равенство (10) по x дважды и используя обозначения

$$\mu(t)=u_{xx}(x,t)|_{x=1}, \tag{13}$$

$$\mathcal{K}_2(t-\tau)=-\frac{\partial^2\mathcal{K}_0(x,t-\tau)}{\partial x^2}\bigg|_{x=1}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{1}{4(t-\tau)}\right), \tag{14}$$

$$f_1(t)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\right)\bigg|_{x=1}, \tag{15}$$

получаем интегральное уравнение

$$\mathbf{K}_{2\lambda}\mu\equiv(I-\lambda\mathbf{K}_2)\mu\equiv\mu(t)-\lambda\int\limits_0^t\mathcal{K}_2(t-\tau)\mu(\tau)\,d\tau=f_1(t),\quad t\in\mathbb{R}_+. \tag{16}$$

Теперь, обращая дифференциальную часть в задаче (2) аналогично задаче (1), будем иметь

$$v(x,t)=-\overline{\lambda}\int\limits_t^\infty\int\limits_0^\infty G(x,\xi,\tau-t)\delta''(\xi-1)\otimes\int\limits_0^\infty v(\eta,\tau)\,d\eta\,d\xi\,d\tau$$
$$+\int\limits_t^\infty\int\limits_0^\infty G(x,\xi,\tau-t)g(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \tag{17}$$

Интегрируя соотношение (17) по переменной x от 0 до ∞ и обозначая

$$\nu(t)=\int\limits_0^\infty v(\eta,t)\,d\eta, \tag{18}$$

получаем интегральное уравнение

$$\mathbf{K}^*_{2\lambda}\nu\equiv(I-\overline{\lambda}\mathbf{K}^*_2)\nu\equiv\nu(t)-\overline{\lambda}\int\limits_t^\infty\mathcal{K}_2(\tau-t)\nu(\tau)\,d\tau=g_1(t),\quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{19}$$

где

$$\mathcal{K}_2(\tau-t)=-\int\limits_0^\infty\delta''(\xi-1)\otimes\operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau-t}}\right)d\xi$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}(\tau-t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{1}{4(\tau-t)}\right), \tag{20}$$

$$g_1(t)=\int\limits_t^\infty\int\limits_0^\infty\operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau-t}}\right)g(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \tag{21}$$

Очевидно, что уравнение (19) является сопряженным интегральным уравнением для (16).

Таким образом, решение сопряженных граничных задач (1) и (2) сведено к исследованию пары сопряженных интегральных уравнений (16) и (19).

Заметим, что ядро сопряженного интегрального уравнения (19) $\mathcal{K}_2(\tau, t)$ обладает следующим свойством:

$$\int_t^{\infty} \mathcal{K}_2(\tau - t)\, d\tau = 1 \quad \text{для} \quad \forall\, t > 0. \tag{22}$$

Тождество (22) означает, что норма интегрального оператора, действующего в пространстве суммируемых функций и определяемого ядром $\mathcal{K}_2(\tau - t)$, равна единице. Это принципиальным образом отличает уравнение (19) от уравнений Вольтерры второго рода, для которых, как известно, решение существует и единственно.

3. О разрешимости интегральных уравнений (16) и (19)

Введем соответствующие односторонние функции для функций μ, f_1, ν, g_1 равенствами

$$l_+(\theta) = \begin{cases} l(\theta), & \text{если} \quad \theta > 0, \\ 0, & \text{если} \quad \theta \le 0, \end{cases} \qquad l_-(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \theta \ge 0, \\ -l(\theta), & \text{если} \quad \theta < 0, \end{cases}$$

а для функции $\mathcal{K}_2$ согласно формулам

$$k_+(\theta) = \begin{cases} \mathcal{K}_2(-\theta), & \text{если} \quad \theta > 0, \\ 0, & \text{если} \quad \theta \le 0, \end{cases} \qquad k_-(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \theta \ge 0, \\ \mathcal{K}_2(\theta), & \text{если} \quad \theta < 0. \end{cases} \tag{23}$$

Тогда из уравнений (16), (19) получим

$$(I - \lambda \mathbf{k}_-)\mu_+ \equiv \mu_+(t) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} k_+(t-\tau)\mu_+(\tau)\, d\tau = f_{1+}(t) + \mu_-(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{24}$$

$$(I - \lambda \mathbf{k}_+)\nu_+ \equiv \nu_+(t) - \overline{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} k_-(t-\tau)\nu_+(\tau)\, d\tau = g_{1+}(t) + \nu_-(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{25}$$

Уравнения (24), (25) совпадают соответственно с уравнениями (16), (19), если $t > 0$, и, как будет показано ниже, решения уравнений (16), (19) не зависят от способа их доопределения на отрицательной полуоси, т. е. не зависят от функций $\mu_-(t)$, $\nu_-(t)$.

Вначале исследуем уравнение (25). Применяя преобразование Фурье для (25), получаем

$$\mathbf{N}^+(s) - \overline{\lambda}\mathbf{K}^-(s)\mathbf{N}^+(s) = \mathbf{G}_1^+(s) + \mathbf{N}^-(s), \quad s \in \mathbb{R}, \tag{26}$$

где прописными буквами обозначены соответствующие образы Фурье, причем

$$\mathbf{K}^-(s) = \exp[-(1 + i\,\mathrm{sign}(s))\sqrt{|s|/2}\,].$$

Эта функция имеет аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость $z = s + i\sigma$ с разрезом вдоль мнимой положительной полуоси $\mathbf{K}^-(z) = \exp\{-\sqrt{i\,z}\}$.

Более того, здесь существуют функции $\mathbf{N}^+(z)$, аналитическая в верхней полуплоскости переменной $z = s + i\sigma$, $\sigma \geq 0$, и $\mathbf{N}^-(z)$, аналитическая в нижней полуплоскости переменной $z = s + i\sigma$, $\sigma \leq 0$, следы которых на действительной оси $\sigma = 0$ соответственно равны $\mathbf{N}^+(s)$ и $\mathbf{N}^-(s)$.

При выполнении условия

$$\mathbf{A}^*_\lambda(s) \equiv 1 - \overline{\lambda}\mathbf{K}^-(s) \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R} \tag{27}$$

из (26) получаем следующую задачу Римана:

$$\mathbf{N}^+(s) = [\mathbf{A}^*_\lambda(s)]^{-1}\mathbf{N}^-(s) + \overline{\lambda}\mathbf{R}^-_\lambda(s)\mathbf{G}^+_1(s) + \mathbf{G}^+_1(s), \quad s \in \mathbb{R}, \tag{28}$$

где $\mathbf{R}^-_\lambda(s) = \mathbf{K}^-(s)/\mathbf{A}^*_\lambda(s)$.

Коэффициент $\mathbf{R}^-_\lambda(s)$ в задаче Римана (28) имеет аналитическое продолжение $\mathbf{R}^-_\lambda(z)$ в плоскости $z = s + i\sigma$ с разрезом вдоль мнимой положительной полуоси и $\mathbf{R}^-_\lambda(z)$ имеет простые полюсы в точках

$$z_k = s_k + i\sigma_k = -2(\arg\lambda + 2k\pi)\ln|\lambda| - i[\ln^2|\lambda| - (\arg\lambda + 2k\pi)^2], \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{29}$$

которые являются нулями функции $\mathbf{A}^*_\lambda(z)$ и расположены на параболе

$$z = s + i\left(\frac{s^2}{4\ln^2|\lambda|} - \ln^2|\lambda|\right), \quad s \in \mathbb{R}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \tag{30}$$

Очевидно, что вершина параболы (30) расположена на мнимой оси и в зависимости от значения $|\lambda|$ смещается вниз или вверх по мнимой оси плоскости переменной z, а ветви параболы обращены вверх.

Запишем условие (27) в терминах комплексного параметра λ. Из формулы (29) для корней z_k замечаем, что критерий (27) выполнен тогда и только тогда, когда не равны нулю мнимые части этих корней, т. е. $\ln^2|\lambda| - (\arg\lambda + 2k\pi)^2 \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}$. Последнее условие при $|\lambda| > 1$ будет эквивалентно следующему

$$|\lambda| \neq \exp(|\arg\lambda + 2k\pi|) \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{31}$$

При $|\lambda| < 1$, очевидно, функция $\mathbf{A}^*_\lambda(z)$ не равна нулю на всей комплексной плоскости $z = s + i\sigma$ с разрезом вдоль мнимой положительной полуоси, так как $|\exp(\sqrt{iz})| > 1$. Действительно, для наличия нулей у функции $\mathbf{A}^*_\lambda(z)$ необходимо выполнение равенства $|\lambda| = |\exp(\sqrt{iz})|$. Последнее равенство в этом случае невозможно.

Если же $|\lambda| = 1$, то уравнение $|\lambda| = |\exp(\sqrt{iz})|$ относительно комплексной переменной λ имеет единственное решение $\lambda = 1$, которое соответствует значению $z = 0$.

Линии, описываемые уравнением $|\lambda| = \exp(|\arg\lambda + 2k\pi|)$, делят комплексную плоскость параметра λ на непересекающиеся области D_m, $m = 0, 1, 2, \ldots$, следующим образом

$$D_{2n} = \{D^{(1)}_n \cap D^{(2)}_n\} \setminus \bigcup_{k=-1}^{2n-1} D_k, \quad D_{-1} = \phi, \quad D_{2n+1} = \{D^{(1)}_n \cup D^{(2)}_n\} \setminus \bigcup_{k=0}^{2n} D_k, \tag{32}$$

где $D^{(1)}_n = \{\lambda : \ |\lambda| < \exp[(2n+1)\pi - \arg\lambda]\}$, $D^{(2)}_n = \{\lambda : \ |\lambda| < \exp[2n\pi + \arg\lambda]\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Внешние части границ ∂D_m областей D_m, $m = 0, 1, 2, \ldots$, обозначим соответственно через Γ_m, $m = 0, 1, 2, \ldots$

Замечание. Отметим, что, кроме области D_0, которая имеет только внешнюю границу $\Gamma_0 = \partial D_0$, каждая из областей D_m имеет границу ∂D_m, состоящую из внешней Γ_m и внутренней Γ_{m-1} частей: $\partial D_m = \Gamma_{m-1} \cup \Gamma_m$, причем,

$\Gamma_{m-1} \cap \Gamma_m = (-1)^m \exp\{m\pi\}$, т. е. внешняя Γ_m и внутренняя Γ_{m-1} части границы ∂D_m области D_m имеют одну общую точку, лежащую на действительной оси комплексной плоскости параметра λ.

Таким образом, получаем, что $\lambda \in \Gamma_m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, тогда и только тогда, когда существует хотя бы одна точка $\tilde{s}$, для которой выполнено равенство $\mathbf{A}^*_\lambda(\tilde{s}) = 0$.

Пусть $|\lambda| > 1$. Тогда согласно соотношению (30) функция $\mathbf{A}^*_\lambda(z)$ в нижней полуплоскости может иметь только конечное число нулей вида (29), где

$$-N_1 \le k \le N_2, \quad N_1 = [(\ln|\lambda| + \arg\lambda)/(2\pi)], \quad N_2 = [(\ln|\lambda| - \arg\lambda)/(2\pi)]; \tag{33}$$

здесь символ $[a]$ означает целую часть числа a, причем целая часть отрицательного числа принимается равной нулю. Действительно, неравенство (33) следует из условия, что мнимые части корней (29) должны принимать отрицательные значения, т. е. $\mathrm{Re}\{-iz_k\} \le 0$ (из условия принадлежности решения классу суммируемых функций). Таким образом, из неравенства $(2\pi k + \arg\lambda)^2 < \ln^2|\lambda|$ следует утверждение (33).

Задача Римана (28) имеет положительный индекс $\varkappa^*(\lambda)$, равный числу нулей функции $\mathbf{A}^*_\lambda(z)$ в нижней полуплоскости (нули считаются с учетом их кратности)

$$\varkappa^*(\lambda) = \mathrm{Ind}\{[\mathbf{A}^*_\lambda(z)]^{-1}\} = -\mathrm{Ind}\{\mathbf{A}^*_\lambda(z)\} = N_1 + N_2 + 1 > 0. \tag{34}$$

Следует отметить, что из (29) и (30) получаем индекс задачи Римана $\varkappa^*(\lambda) = 0$ при $|\lambda| < 1$.

Пусть теперь

$$\sum_{k=-N_1}^{N_2} \frac{c_k}{z - z_k}$$

— главная часть разложения функции $[\mathbf{A}^*_\lambda(z)]^{-1}\mathbf{N}^-(z)$ в ряд Лорана по степеням $z - z_k$, $k = -N_1, \ldots, 0, \ldots, N_2$, тогда

$$\chi(z) \equiv \frac{\mathbf{N}^-(z)}{\mathbf{A}^*_\lambda(z)} - \sum_{k=-N_1}^{N_2} \frac{c_k}{z - z_k}$$

будет функцией, оригинал которой равен нулю при $t \in \mathbb{R}_+$. Теперь равенство (28) можно представить в виде

$$\mathbf{N}^+(s) = \mathbf{G}^+_1(s) + \overline{\lambda}\mathbf{R}^-_\lambda(s)\mathbf{G}^+_1(s) + \sum_{k=-N_1}^{N_2} \frac{c_k}{s - z_k} + \chi(s), \quad s \in \mathbb{R}. \tag{35}$$

Переходя в соотношении (35) к оригиналам, при $t \in \mathbb{R}_+$ получаем общее решение интегрального уравнения (19)

$$\nu(t) = g_1(t) + \overline{\lambda} \int_t^\infty \mathbf{r}_{\lambda-}(t - \tau) g_1(\tau)\, d\tau + \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp(-iz_k t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{36}$$

где $\mathbf{r}_{\lambda-}(\theta)$ — сужение на отрицательную полуось оригинала образа Фурье $\mathbf{R}^-_\lambda(s)$ и определяется равенством (согласно теории вычетов [13])

$$\mathbf{r}_{\lambda-}(\theta) = 2 \sum_{k=-\infty}^{-(N_1+1)} \sqrt{i\, z_k} \exp(-iz_k\theta) + 2 \sum_{k=N_2+1}^{\infty} \sqrt{i\, z_k} \exp(-iz_k\theta)$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}(-\theta)^{3/2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{\lambda^m} \exp\left(\frac{m^2}{4\theta}\right), \quad \mathrm{Re}(iz_k) < 0, \quad |\lambda| > 1, \quad \theta \in \mathbb{R}_-, \tag{37}$$

$$\mathbf{r}_{\lambda-}(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(-\theta)^{3/2}} \sum_{m=1}^{\infty} m\lambda^m \exp\left(\frac{m^2}{4\theta}\right), \quad |\lambda| \le 1, \quad \theta \in \mathbb{R}_-, \tag{38}$$

числа N_1, N_2, z_k находятся по формулам (33) и (29).

Для того чтобы решение $\nu(t)$, определяемое формулой (36), было суммируемым достаточно, чтобы функция $\mathbf{r}_{\lambda-}(t-\tau)$ была бы ограничена для любых $0 < \tau \le t < \infty$, так как функция $g_1(t) + \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k \exp(-iz_k t)$ является суммируемой функцией переменной t. Функция $\mathbf{r}_{\lambda-}(t-\tau)$ будет ограниченной, поскольку функция $\mathbf{r}_{\lambda-}(\theta)$ (37) удовлетворяет оценке

$$|\mathbf{r}_{\lambda-}(\theta)| \le C_1|\theta|^{-1/2}\exp(-\delta_0|\theta|) + C_2|\theta|^{-3/2}\exp(-\delta_0|\theta|^{-1}) \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}_-, \tag{39}$$

где

$$\delta_0 = \min\{1/4;\ [2\pi(N_1+1) + \arg\lambda]^2 - \ln^2|\lambda|;\ [2\pi(N_2+1) + \arg\lambda]^2 - \ln^2|\lambda|\}. \tag{40}$$

Оценка (39) вытекает из следующих соотношений. Для второго слагаемого из (37) получим

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=N_2+1}^{\infty} \sqrt{i\,z_k}\exp(-iz_k\theta)\right| \le |\ln\lambda| \sum_{k=N_2+1}^{\infty} |\exp(-iz_k\theta)| \\
&\quad\le |\ln\lambda| \sum_{k=N_2+1}^{\infty} \exp\{[(2k\pi + \arg\lambda)^2 - \ln^2|\lambda|]\theta\} \le \left|\begin{matrix} y = 2k\pi + \arg\lambda \\ a = 2\pi(N_2+1) + \ln|\lambda| \end{matrix}\right| \\
&\quad\le |\ln\lambda| \int_a^{\infty} \exp\{(y^2 - \ln^2|\lambda|)\theta\}\,dy = |\ln\lambda|\exp\{-\theta\ln^2|\lambda|\} \int_a^{\infty} \exp\{\theta y^2\}\,dy \\
&\quad= |z = y - a| = |\ln\lambda|\exp\{-\theta\ln^2|\lambda|\} \int_0^{\infty} \exp\{\theta(a^2 + z^2 + 2az)\}\,dz \\
&\quad= |\ln\lambda|\exp\{-\theta\ln^2|\lambda| + \theta a^2\} \int_0^{\infty} \exp\{\theta z^2 + \theta\cdot 2az\}\,dz \\
&\quad\le |\ln\lambda|(-\theta)^{-1/2}\exp\{\theta(a^2 - \ln^2|\lambda|)\} \int_0^{\infty} \exp\{-(\sqrt{-\theta}z)^2\}\,d(\sqrt{-\theta}z) \\
&\quad= |\ln\lambda|\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\theta}}\exp\{\delta_2\theta\},
\end{aligned}$$

где $\delta_2 = [2\pi(N_2+1) + \arg\lambda]^2 - \ln^2|\lambda| > 0$.

Аналогично для первого слагаемого имеем неравенство

$$\left|\sum_{k=-\infty}^{-(N_1+1)} \sqrt{i\,z_k}\exp(-iz_k\theta)\right| \le |\ln\lambda|\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\theta}}\exp\{\delta_1\theta\},$$

где $\delta_1 = [2\pi(N_1+1) + \arg\lambda]^2 - \ln^2|\lambda| > 0$.

Третье слагаемое из (37) оцениваем следующим образом

$$\begin{aligned}
|\theta|^{-3/2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{\lambda^m}\exp\left(-\frac{m^2}{4|\theta|}\right) &= |\theta|^{-3/2}\exp\left(-\frac{1}{4|\theta|}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{\lambda^m}\exp\left(-\frac{m^2-1}{4|\theta|}\right) \\
&\le C|\theta|^{-3/2}\exp\left(-\frac{1}{4|\theta|}\right).
\end{aligned}$$

Для представления из (38) получаем при $|\lambda| = 1$ оценку

$$|\theta|^{-3/2}\sum_{m=1}^{\infty} m\exp\left(-\frac{m^2}{4|\theta|}\right) \le \frac{2}{\sqrt{|\theta|}}\int_1^{\infty}\exp\left(-\frac{y^2}{4|\theta|}\right)d\left(-\frac{y^2}{4|\theta|}\right) = \frac{2}{\sqrt{|\theta|}}\exp\left(-\frac{1}{4|\theta|}\right),$$

а при $|\lambda| < 1$ — оценку

$$|\theta|^{-3/2}\sum_{m=1}^{\infty} m\lambda^m\exp\left(-\frac{m^2}{4|\theta|}\right) \le C|\theta|^{-3/2}\exp\left(-\frac{1}{4|\theta|}\right).$$

Можно проверить, что функция (36) будет решением уравнения (25) при произвольных коэффициентах c_k. Так как число линейно независимых решений соответствующего однородного уравнения для уравнения (25) равно индексу $\varkappa^*(\lambda)$ (34), то найденное решение (36) действительно будет общим решением неоднородного уравнения (25).

Сформулируем полученные результаты в виде следующих лемм.

Лемма 1. *Значения* $\lambda \in D_0$ *из* (32) *являются регулярными числами оператора* $\mathbf{K}_2^*$ (19).

Лемма 2. *Множество* $\mathbb{C} \setminus D_0$ *состоит из характеристических чисел оператора* $\mathbf{K}_2^*$ (19). *Причем если* $\lambda \in D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \{(-1)^m e^{m\pi}\}$, $m = 1, 2, \ldots,$ *то* $\dim \operatorname{Ker}(\mathbf{K}_{2\lambda}^*) = \varkappa^*(\lambda) = m$ *и соответствующие собственные функции имеют вид*

$$\nu_{\lambda k}(t) = \exp(-iz_k t), \quad k = 1, \ldots, m = \varkappa^*(\lambda) = N_1 + N_2 + 1.$$

Теперь рассмотрим интегральное уравнение (24). Применяя к нему преобразование Фурье, получаем

$$\mathbf{M}^+(s) - \lambda\mathbf{K}^+(s)\mathbf{M}^+(s) = \mathbf{F}_1^+(s) + \mathbf{M}^-(s), \quad s \in \mathbb{R}, \tag{41}$$

где прописными буквами обозначены соответствующие образы Фурье.

При выполнении условия

$$\mathbf{A}_\lambda(s) \equiv 1 - \lambda\mathbf{K}^+(s) \ne 0 \quad \forall s \in \mathbb{R} \tag{42}$$

из (41) получаем краевую задачу Римана

$$\mathbf{M}^+(s) = [\mathbf{A}_\lambda(s)]^{-1}\mathbf{M}^-(s) + \lambda\mathbf{R}_\lambda^+(s)\mathbf{F}_1^+(s) + \mathbf{F}_1^+(s), \quad s \in \mathbb{R}, \tag{43}$$

где $\mathbf{R}_\lambda^+(s) = \mathbf{K}^+(s)/\mathbf{A}_\lambda(s)$. Здесь коэффициент $\mathbf{R}_\lambda^+(s)$ задачи (43) есть функция, аналитически продолжимая в верхнюю полуплоскость, за исключением конечного числа возможных полюсов, являющихся нулями функции $\mathbf{A}_\lambda(s)$. Поэтому индекс $\varkappa(\lambda)$ задачи (43) неположителен, т. е. $\varkappa(\lambda) = -\varkappa^*(\lambda) \le 0$. Переписав задачу (41) в виде $[1 - \lambda\mathbf{K}^+(s)]\mathbf{M}^+(s) = \mathbf{F}_1^+(s) + \mathbf{M}^-(s)$, $s \in \mathbb{R}$, видим, что $\mathbf{M}^-(s) \equiv 0$, так что краевая задача Римана (43) принимает вид

$$\mathbf{M}^+(s) = \lambda\mathbf{R}_\lambda^+(s)\mathbf{F}_1^+(s) + \mathbf{F}_1^+(s), \quad s \in \mathbb{R}. \tag{44}$$

Отсюда непосредственно следует, что однородное интегральное уравнение, соответствующее уравнению (24), для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ имеет только тривиальное решение.

Переходя в соотношении (44) к оригиналам, при $t \in \mathbb{R}_+$ получаем решение интегрального уравнения (24)

$$\mu(t) = f_1(t) + \lambda\int_0^t \mathbf{r}_{\lambda+}(t-\tau)f_1(\tau)\,d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{45}$$

где $\mathbf{r}_{\lambda+}(\theta)$ — сужение на положительную полуось оригинала образа Фурье $\mathbf{R}_\lambda^+(s)$ и определяется формулой (согласно теории вычетов)

$$\mathbf{r}_{\lambda+}(\theta) = 2\sum_{k=-\infty}^{-(N_1+1)} \sqrt{-i\,z_k}\exp(iz_k\theta) + 2\sum_{k=N_2+1}^{\infty} \sqrt{-i\,z_k}\exp(iz_k\theta)$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}\theta^{3/2}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{\lambda^m}\exp\biggl(-\frac{m^2}{4\theta}\biggr), \quad \mathrm{Re}(-iz_k)>0, \quad |\lambda|>1, \quad \theta\in\mathbb{R}_+, \tag{46}$$

$$\mathbf{r}_{\lambda+}(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\theta^{3/2}}\sum_{m=1}^{\infty} m\lambda^m\exp\biggl(-\frac{m^2}{4\theta}\biggr), \quad |\lambda|\le 1, \quad \theta\in\mathbb{R}_+, \tag{47}$$

где числа N_1, N_2, z_k заданы равенствами (33) и (29).

Для того чтобы выражение $\mu(t)$, определяемое равенством (45), было существенно ограниченным достаточно, чтобы функция $\mathbf{r}_{\lambda+}(t-\tau)$ была суммируемой для любых $0<\tau\le t<\infty$, так как функция $f_1(t)$ является существенно ограниченной функцией переменной t. Функция $\mathbf{r}_{\lambda+}(t-\tau)$ будет суммируемой, поскольку для функции $\mathbf{r}_{\lambda+}(\theta)$ (46) имеет место оценка

$$|\mathbf{r}_{\lambda+}(\theta)| \le C_1|\theta|^{-1/2}\exp(-\delta_0|\theta|) + C_2|\theta|^{-3/2}\exp(-\delta_0|\theta|^{-1}) \quad \forall\,\theta\in\mathbb{R}_+ \tag{48}$$

с постоянной δ_0, определенной равенством (40).

Далее, если $\lambda\in D_0$, то по лемме 1 неоднородное уравнение (24) безусловно однозначно разрешимо; если $\lambda\in\mathbb{C}\setminus D_0$, то по лемме 2 для однозначной разрешимости уравнения (24) необходимо и достаточно выполнение следующих условий ортогональности

$$\int\limits_0^\infty \overline{g_1(t)}\exp(-iz_kt)\,dt = 0, \quad k=1,\dots,m. \tag{49}$$

Итак, мы доказали следующее утверждение.

Лемма 3. *На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ отсутствуют характеристические числа оператора* $\mathbf{K}_2$ (16).

Таким образом, из полученных результатов следует, что решения интегральных уравнений (19) и (16) определены (согласно равенствам (36) и (45)) выражениями

$$\nu_\lambda(t) = g_1(t) + \overline{\lambda}\int\limits_t^\infty \mathbf{r}_{\lambda-}(t-\tau)g_1(\tau)\,d\tau + \sum_{k=-N_1}^{N_2} c_k\exp(-iz_kt), \quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{50}$$

$$\mu_\lambda(t) = f_1(t) + \lambda\int\limits_0^t \mathbf{r}_{\lambda+}(t-\tau)f_1(\tau)\,d\tau, \quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{51}$$

и удовлетворяют условиям

$$\nu_\lambda(t)\in L_1(\mathbb{R}_+), \quad \mu_\lambda(t)\in L_\infty(\mathbb{R}_+). \tag{52}$$

Последнее согласуется с условиями (6) и (7).

4. О разрешимости граничных задач (1) и (2)

Согласно (10) запишем решение задачи (1) в виде

$$u(x,t) = -\lambda \int\limits_0^t \mathcal{K}_0(x,t-\tau)\mu_\lambda(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \qquad (53)$$

где $\mu_\lambda(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$ (51) и $f(x,t) \in L_\infty(Q)$. Учитывая неотрицательность и суммируемость функции $\mathcal{K}_0(x,t-\tau)$ (12) на соответствующем множестве значений $\{t,\,\tau,\,x\}$, из (53) получаем следующую оценку

$$|u(x,t)| \le (C_1|\lambda| + C_2) \int\limits_0^t \mathcal{K}_0(x,t-\tau)d\tau \le C_3(|\lambda|),\ \ \{x,\,t\} \in Q. \qquad (54)$$

Для производных решения $u(x,t)$ (53) справедливо соотношение

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = -\lambda\mu_\lambda(t) + f(x,t) \in L_\infty(Q) \qquad (55)$$

(которое следует и из уравнения (1)).

Итак, функция (53) удовлетворяет уравнению из (1) в смысле соотношения (55). Для решения $u(x,t)$ (53) непосредственно проверяется выполнение начального и граничного условий из (1). Таким образом, функция (53) согласно (54) и (55) полностью удовлетворяет граничной задаче (1) и принадлежит классу (6).

Далее, согласно (17) запишем решение задачи (2) в виде

$$v(x,t) = -\overline{\lambda} \int\limits_t^\infty G_{\xi\xi}(x,\xi,\tau-t)\big|_{\xi=1}\nu_\lambda(\tau)\,d\tau + \int\limits_t^\infty \int\limits_0^\infty G(x,\xi,\tau-t)g(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \qquad (56)$$

где функция $\nu_\lambda(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$ (36).

Для того чтобы функция $v(x,t)$ принадлежала классу (7) достаточно выполнения условий

$$\int\limits_t^\infty G_{\xi\xi}(x,\xi,\tau-t)\big|_{\xi=1}\nu_\lambda(\tau)\,d\tau \in L_1(Q), \qquad (57)$$

$$\int\limits_t^\infty \int\limits_0^\infty G(x,\xi,\tau-t)g(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \in L_1(Q). \qquad (58)$$

Включение (58) действительно имеет место согласно условиям (5), а включение (57) равносильно неравенству

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_t^\infty G_{\xi\xi}(x,\xi,\tau-t)\big|_{\xi=1}\nu_\lambda(\tau)\,d\tau\,dt\,dx \le \|\nu_\lambda\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} \le \infty.$$

Очевидно, что для производных $v_t(x,t)$, $v_{xx}(x,t)$ функции $v(x,t)$ справедливо включение

$$v_t + v_{xx} \in L_1(Q).$$

Сформулируем полученные результаты о разрешимости граничных задач (1) и (2) в виде следующих теорем.

Теорема 1. *Если* $\lambda \in D_0$, *то для любой функции* g, *удовлетворяющей условию* (5), *граничная задача* (2) *имеет единственное решение* $v \in \mathcal{V}$. *Если*

$$\lambda \in \{\mathbb{C} \setminus D_0\} \cap \{D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \{(-1)^m e^{m\pi}\}\},$$

то для любой функции g, *удовлетворяющей условию* (5), *граничная задача* (2) *имеет общее решение* $v \in \mathcal{V}$, *состоящее из суммы решения*

$$v_{\text{одн}}(x,t) = \sum_{k=1}^{m} c_k v_{\lambda k}(x,t) \tag{59}$$

однородного уравнения, где

$$v_{\lambda k}(x,t) = -\overline{\lambda} \int\limits_0^t \mathcal{K}_0(x,\tau-t)\nu_{\lambda k}(\tau)\,d\tau, \quad k=1,\ldots,m, \tag{60}$$

$\nu_{\lambda k} = \exp(-iz_k t)$, $k=1,\ldots,m$, c_k, $k=1,\ldots,m$, *— произвольные постоянные, и частного решения*

$$v_{\text{част}}(x,t) = -\overline{\lambda} \int\limits_0^t \mathcal{K}_0(x,\tau-t)\hat{g}(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty G(x,\xi,\tau-t)g(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{61}$$

где в соответствии с формулой (36)

$$\hat{g}(\tau) = g_1(t) + \overline{\lambda} \int\limits_t^\infty \mathbf{r}_{\lambda -}(t-\tau)g_1(\tau)\,d\tau.$$

Теорема 2. *Если* $\lambda \in D_0$, *то для любой функции* f, *удовлетворяющей условию* (5), *граничная задача* (1) *имеет единственное решение* $u \in \mathcal{U}$. *Если*

$$\lambda \in \{\mathbb{C} \setminus D_0\} \cap \{D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \{(-1)^m e^{m\pi}\}\},$$

то для однозначной разрешимости граничной задачи (1) *в классе* $\mathcal{U}$ *необходимо и достаточно, чтобы функция* f *из* (5), *удовлетворяла условиям ортогональности*

$$\int\limits_0^\infty \overline{v_{\lambda k}(x,t)} f(x,t)\,dx\,dt = 0, \quad k=1,\ldots,m = \varkappa^*(\lambda) = N_1 + N_2 + 1. \tag{62}$$

Теорема 3. *Задача* (1) *является нётеровой с неположительным индексом* $\operatorname{Ind}\{\text{Задача}\,(1)\} \equiv \dim \operatorname{Ker}(\mathbf{L}_\lambda) - \dim \operatorname{Ker}(\mathbf{L}^*_\lambda) = -\varkappa^*(\lambda) = -m$ (*в зависимости от значений спектрального параметра* $\lambda \in \mathbb{C}$.)

5. О спектре операторов L (3) и L^* (4)

Непосредственно из утверждений лемм 1–3 вытекают

Теорема 4. *Открытое множество* D_0 (32) *является резольвентным для оператора* L^* (4), *а его дополнение* $\mathbb{C} \setminus D_0$ *составляет спектр оператора* L^* (4). *Причем если*

$$\lambda \in D_m \cup \Gamma_{m-1} \setminus \{(-1)^m e^{m\pi}\}, \quad m = 1,2,\ldots,$$

то $\dim \operatorname{Ker}(L^*) = \varkappa^*(\lambda) = m$ *и соответствующие собственные функции оператора* L^* (4) *определяются формулами*

$$v_{\lambda k}(x,t) = -\lambda \int_0^t \mathcal{K}_0(x,\tau - t)\nu_\lambda(\tau)\, d\tau, \quad k = 1,\ldots,m = \varkappa^*(\lambda) = N_1 + N_2 + 1, \tag{63}$$

где

$$\nu_{\lambda k}(t) = \exp(-iz_k t), \quad k = 1,\ldots,m = \varkappa^*(\lambda) = N_1 + N_2 + 1.$$

Теорема 5. *Множество* $\mathbb{C}$ *не содержит собственных значений оператора* L (3).

6. Пример нелокальной задачи

Здесь мы приведем пример нелокальной задачи, для которой результаты работы применимы. Это следующая нелокальная (внутренне-граничная) задача:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t), \ \ \{x,t\} \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; \\ u(x,0) = 0, \ \ u(0,t) = \lambda u(x,t)_{|x=1}, \ \ \lambda \in \mathbb{C}, \end{cases} \tag{64}$$

и ее сопряженная:

$$\begin{cases} -v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) - \overline{\lambda} \cdot \delta(x-1) \otimes v_x(0,t) = g(x,t), \\ v(x,\infty) = v(0,t) = v(\infty,t) = v_x(\infty,t) = 0; \end{cases}$$

которые соответственно сводятся к изучению пары сопряженных интегральных уравнений

$$u(1,t) = \lambda \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4(t-\tau)}\right) u(1,\tau)d\tau + \int_0^t \int_0^\infty G(1,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{65}$$

$$v_x(0,t) = \overline{\lambda} \int_t^\infty \frac{1}{2\sqrt{\pi}(\tau-t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4(\tau-t)}\right) \cdot v_x(0,\tau)d\tau + \int_t^\infty \int_0^\infty G_x(0,\xi,\tau-t)g(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{66}$$

где $G(x,\xi,t)$ — функция Грина (11).

Интегральные уравнения (65) и (66) полностью совпадают соответственно с уравнениями (16) и (19). Необходимо в качестве функций $\mu(t)$ и $\nu(t)$ принять следующие: $\mu(t) = u(1,t)$ и $\nu(t) = v_x(0,t)$. Поэтому, согласно вышеизложенным результатам граничная задача (64) является нётеровой с неположительным индексом в зависимости от значений спектрального параметра $\lambda \in \mathbb{C}$.

Заключение

Таким образом, установлено, что рассматриваемая в работе граничная задача для спектрально-нагруженного уравнения теплопроводности является нётеровой с неположительным индексом. Найдена зависимость индекса задачи от значений спектрального параметра λ.

Авторы приносят свою признательность за обсуждение результатов данной работы Т. Ш. Кальменову, В. А. Кондратьеву и H. Begehr.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их приложения // Диффер. уравн. 1983. Т. 19, № 1. С. 86–94.
2. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.
3. *Дженалиев М. Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Ин-т математики, 1995.
4. *Дженалиев М. Т.* О нагруженных уравнениях с периодическими граничными условиями // Диффер. уравн. 2001. Т. 37, № 1. С. 48–54.
5. *Кожанов А. И.* Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче // Мат. заметки. 2004. Т. 76, вып. 6. С. 840–853.
6. *Рамазанов М. И.* О краевой задаче для "существенно" нагруженного параболического уравнения в неограниченных областях // Докл. АМАН. Нальчик, 2004. Т. 7, № 1. С. 84–91.
7. *Амангалиева М. М., Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.* О граничных задачах для “существенно” нагруженных параболических уравнений в ограниченных областях в многомерном случае // Докл. АМАН. Нальчик, 2004. Т. 7, № 1. С. 18–23.
8. *Амангалиева М. М., Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И., Туймебаева А. Е.* Особое интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода. 1. Однородный случай // Мат. журн. Алматы, 2006. Т. 6, № 1(19). С. 33–46.
9. *Амангалиева М. М., Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И., Туймебаева А. Е.* Особое интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода. 2. Неоднородный случай и нелокальные задачи // Мат. журн. Алматы, 2006. Т. 6, № 2(20). С. 37–44.
10. *Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.* О граничной задаче для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 527–547.
11. *Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.* Об одной граничной задаче для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности. I // Диффер. уравн. 2007. Т. 43, № 4. С. 498–508.
12. *Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.* Об одной граничной задаче для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности. II // Диффер. уравн. 2007. Т. 43, № 6. С. 788–794.
13. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1958.
14. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции, вып. 1. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959.
15. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз., 1959.
16. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
17. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1963.
18. *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1979.
19. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.
20. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
21. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. I. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.

22. *Шубин М. А.* Лекции об уравнениях математической физики. М.: МЦНМО, 2001.

Дженалиев Мувашархан Танабаевич
Казахстан, Алматы, Институт математики МОН РК
dzhenali@math.kz

Рамазанов Мурат Ибраевич
Казахстан, Караганда, Карагандинский государственный университет им. академика Е. А. Букетова
ramamur@mail.ru