Неклассические уравнения математической физики
2007. С. 137–149

УДК 517.956

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА

Т. Д. Джураев, О. С. Зикиров

В работе изучаются нелокальные краевые задачи для уравнения в частных производных третьего порядка составного типа с оператором Лапласа в главной части. Доказана однозначная разрешимость этих задач. Единственность решения изучаемых задач доказана методом интегралов энергии, а существование решения — методом интегрльных уравнений.

В работах Ж. Адамара [1, 2] было начато исследование краевых задач для простейшего уравнения третьего порядка составного типа, оператор которого представляет собой композицию оператора Лапласа с оператором частной производной по одной из независимых переменных. После этого появился ряд работ, например [3–6] и др., посвященных этому уравнению и более общим уравнениям составного типа. Различные аспекты теории уравнений составного типа изложены наиболее подробно в монографиях [7–9]. В работе [10] исследованы начально-краевые задачи для широких классов уравнений составного типа с переменными коэффициентами в пространстве любого числа измерений. Работа [11] посвящена вопросу о классификации и приведения к каноническому виду уравнений в частных производных третьего порядка с двумя независимыми переменными вида

$$Au_{xxx} + Bu_{xxy} + Cu_{xyy} + Du_{yyy} = F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}), \tag{i}$$

с коэффициентами A, B, C и D, зависящими от x и y.

Если в каждой точке рассматриваемой области характеристическое уравнение

$$A\lambda^3 - B\lambda^2 + C\lambda - D = 0, \quad \lambda = \frac{dy}{dx},$$

соответствующее уравнению (i), имеет один действительный и два комплексно-сопряженных корней, то, как следует из [11], уравнение (i) с помощью неособого преобразования независимых переменных может быть приведено к виду

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_{xx} + u_{yy}) = F_1(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}). \tag{ii}$$

В настоящей работе исследуются нелокальные краевые задачи для уравнения (ii) в случае, когда $F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$ является линейной функцией своих аргументов.

1. Постановка задачи и теорема единственности

В данной работе рассмотрим в области $D = \{(x,y) : 0 < x < p,\ 0 < y < q\}$ уравнение третьего порядка составного типа

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_{xx} + u_{yy}) + Lu = f(x,y), \tag{1}$$

относящееся к одному из канонических видов, указанных в [11].

Здесь α и β — некоторые постоянные, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, L — линейный дифференциальный оператор второго порядка вида

$$Lu \equiv a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + a_1(x,y)u_x + b_1(x,y)u_y + c_1(x,y)u.$$

Без ограничения общности предположим, что $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, но $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Задача $S_{\alpha\beta}$. Найти в области D решение $u(x,y)$, непрерывное вместе с производными первого порядка в замкнутой области $\overline{D}$ и удовлетворяющее уравнению (1) и граничным условиям:

а) если $\alpha\beta \neq 0$, то задаются условия

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(p,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq q, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \psi_1(x), \quad u(x,q) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq p, \tag{3}$$

$$\lambda_1(y)u_x(0,y) + \lambda_2(y)u_x(p,y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq q, \tag{4}$$

$$\mu_1(x)u_y(x,0) + \mu_2(x)u_y(x,q) = \psi_3(x), \quad 0 \leq x \leq p; \tag{5}$$

б) если $\beta = 0$, то выполняются условия (2)–(4);

в) если $\alpha = 0$, то выполняются условия (2), (3) и (5),

где $\lambda_j(y)$, $\mu_j(x)$ $(j = 1,2)$, $\varphi_i(y)$, $\psi_i(x)$ $(i = 1,3)$ — заданные функции, причем

$$\lambda_1^2(y) + \lambda_2^2(y) \neq 0, \quad \mu_1^2(x) + \mu_2^2(x) \neq 0$$

и выполняются следующие условия согласования

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \quad \varphi_1(q) = \psi_2(0), \quad \psi_1(p) = \varphi_2(0), \quad \varphi_2(q) = \psi_2(p),$$

$$\lambda_1(0)\psi_1'(0) + \lambda_2(0)\psi_1'(p) = \varphi_3(0), \quad \mu_1(0)\varphi_1'(0) + \mu_2(0)\varphi_1'(q) = \psi_3(0),$$

$$\lambda_1(q)\psi_2'(0) + \lambda_2(q)\psi_1'(p) = \varphi_3(q), \quad \mu_1(p)\varphi_2'(0) + \mu_2(p)\varphi_2'(q) = \psi_3(p).$$

Замечание 1. Из постановки задачи видно, что в зависимости от расположения характеристик $\beta x - \alpha y = const$ она объединяет в себе различные локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения (1).

Введем некоторые необходимые для дальнейшего обозначения и определения. Через $C_{1/2}^{(0,h)}[a,b]$ обозначим множество функций $\varphi(t)$, заданных на отрезке $[a,b]$ и таких, что $[(t-a)(b-t)]^{1/2}\varphi(t) \in C^{(0,h)}[a,b]$, $0 < h < 1$.

Если на этом множестве функций, ввести норму по формуле

$$\|\varphi(x)\|_{h,1/2} = \|\sqrt{(t-a)(b-t)}\varphi(x)\|_{C^h},$$

где $\|\cdot\|_{C^h}$ — норма в пространстве $C^{(0,h)}[a,b]$, то полученное нормированное пространство будет банаховым [12].

Детальное определение пространств $C^{(1,h)}[a,b]$ и $C^k(D)$ можно найти, например, в [13].

Определение. Функцию $u(x,y)$ из класса $C^{(1,h)}(\overline{D})\cap C^3(D)$ назовем *классическим решением* задачи $S_{\alpha\beta}$, если она удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям (2)–(5).

Можно показать, что в задаче $S_{\alpha\beta}$ случай $\alpha\beta<0$ при помощи замены независимого переменного $t=1-\tau$ редуцируется к случаю $\alpha\beta>0$. Поэтому для определенности положим $\alpha>0$, $\beta>0$.

Справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *таковы, что*

$$a(x,y),\ b(x,y),\ c(x,y)\in C^1(\bar D)\cap C^2(D),$$

$$a_1(x,y),\ b_1(x,y)\in C(\bar D)\cap C^1(D),\quad c_1(x,y)\in C(D),$$

и выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
&1)\ a(x,y)\xi^2+2b(x,y)\xi\eta+c(x,y)\eta^2\ge 0\quad \forall\xi,\eta\in D;\\
&2)\ a_{xx}+2b_{xy}+c_{yy}-a_{1x}-b_{1y}+2c_1\le 0\quad \forall(x,y)\in D;\\
&3)\ |\lambda_1(y)|>|\lambda_2(y)|,\quad |\mu_1(x)|>|\mu_2(x)|.
\end{aligned}$$

Тогда классическое решение задачи $S_{\alpha\beta}$ *единственно.*

Доказательство. Покажем, что однородная задача $S_{\alpha\beta}$, т. е.

$$f(x,y)\equiv 0,\quad \varphi_i(y)=\psi_i(x)\equiv 0\quad (i=1,3)$$

имеет лишь тривиальное решение. Доказательство этого факта проведем на основании интегральных тождеств. Умножим уравнение (1) на функцию $u(x,y)$ и проинтегрируем результат по области D

$$\iint\limits_D u\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_{xx}+u_{yy})\,dxdy+\iint\limits_D uLu\,dxdy=0. \tag{$*$}$$

Преобразуем подынтегральные выражения следующим образом

$$\begin{aligned}
u\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_{xx}+u_{yy})&=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)(uu_{xx}+u_{yy})\\
&-\frac{1}{2}\left[\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}-\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_x^2-u_y^2)+\left(\alpha\frac{\partial}{\partial y}-\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)(2u_xu_y)\right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&u\left(a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}\right)\\
&\quad=\frac{\partial}{\partial x}\left[auu_x+buu_y-\frac{1}{2}(a_x+b_y)u^2\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[buu_x+cuu_y-\frac{1}{2}(b_x+c_y)u^2\right]\\
&\qquad\qquad-(au_x^2+2bu_xu_y+cu_y^2)+\frac{1}{2}(a_{xx}+2b_{xy}+c_{yy})u^2;
\end{aligned}$$

$$u(a_(x,y)u_x+b_1(x,y)u_y+c_1(x,y)u)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(a_1u)^2+\frac{\partial}{\partial y}(b_1u)^2\right]-\frac{1}{2}(a_{1x}+b_{1y}-2c_1)u^2.$$

Применяя формулу Грина к интегралу (*) и учитывая однородные граничные условия (2)–(3), получим

$$\frac{1}{2}\beta\int_0^p[(u_y^2(x,q)-u_y^2(x,0)]dx$$
$$+\frac{1}{2}\alpha\int_0^q[u_x^2(p,y)-u_x^2(0,y)]dy+\int_D\int(au_x^2+2bu_xu_y+cu_y^2)dxdy$$
$$-\frac{1}{2}\int_D\int(a_{xx}+2b_{xy}+c_{yy}-a_{1x}-b_{1y}+2c_1)u^2dxdy=0. \quad (6)$$

Из постановки задачи $S_{\alpha\beta}$ видно, что должно быть $\lambda_1(y)\neq 0$, $\mu_1(x)\neq 0$. Тогда из условий (4) и (5) находим

$$u_x(0,y)=-\frac{\lambda_2(y)}{\lambda_1(y)}u_x(p,y), \quad u_y(x,0)=-\frac{\mu_2(x)}{\mu_1(x)}u_y(x,q).$$

При этом равенство (6) примет вид

$$\frac{1}{2}\beta\int_0^p\left[1-\left(\frac{\lambda_2(y)}{\lambda_1(y)}\right)^2\right]u_y^2(x,q)dx$$
$$+\frac{1}{2}\alpha\int_0^q\left[1-\left(\frac{\mu_2(x)}{\mu_1(x)}\right)^2\right]u_x^2(p,y)dy+\int_D\int(au_x^2+2bu_xu_y+cu_y^2)dxdy$$
$$-\frac{1}{2}\int_D\int(a_{xx}+2b_{xy}+c_{yy}-a_{1x}-b_{1y}+2c_1)u^2dxdy=0. \quad (7)$$

В силу условий теоремы 1 каждое из слагаемых в последнем вырожении неотрицательно. Отсюда заключаем, что $u(x,y)\equiv 0$ в области $\overline{D}$.

Замечание 2. В случаях $\lambda_j(y)\neq 0$, $\lambda_{3-j}(y)=0$, $\mu_j(x)=0$, $\mu_{3-j}(x)\neq 0$ $(j=1,2)$ задача $S_{\alpha\beta}$ неразрешима, так как характеристика $\beta x-\alpha y=0$ уравнения (1) разделяет область D на две части, в одной из которых краевые условия недостаточны для определения решения задачи $S_{\alpha\beta}$, а в другой они лишние.

2. Сведение нелокальной задачи $S_{\alpha\beta}$ к интегральным уравнениям

Существование решения задачи $S_{\alpha\beta}$ для модельного однородного уравнения доказана в работе [14]. Здесь рассмотрим неоднородное уравнение

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_{xx}+u_{yy})=g(x,y) \quad (8)$$

с однородными условиями (2)–(5).

Обозначим через $\psi(x)$ неизвестное значение производной $u_y(x,y)$ при $y=q$, а через $\varphi(y)$ — значение $u_x(x,y)$ при $x=p$.

Пусть область D такова, что $q\leq\beta/\alpha$, тогда полагая

$$\alpha u_x+\beta u_y=v(x,y), \quad (9)$$

из уравнения (8) получим

$$v_{xx}+v_{yy}=g(x,y). \tag{10}$$

В силу (9), учитывая однородные условия (2)–(5) для функции $v(x,y)$ имеем

$$v(0,y)=-\alpha\frac{\lambda_2(y)}{\lambda_1(y)}\varphi(y),\quad v(p,y)=\alpha\varphi(y), \tag{11}$$

$$v(x,0)=-\beta\frac{\mu_2(x)}{\mu_1(x)}\psi(x),\quad v(x,q)=\beta\psi(x). \tag{12}$$

Задачу (10)–(12) будем решать в следующих предположениях: функции $\varphi(y)$ и $\psi(x)$ непрерывны и интегрируемы, причем

$$\alpha\frac{\lambda_2(0)}{\lambda_1(0)}\varphi(0)=\beta\frac{\mu_2(0)}{\mu_1(0)}\psi(0),\quad -\alpha\frac{\lambda_2(q)}{\lambda_1(q)}\varphi(q)=\beta\psi(0);$$

$$-\beta\frac{\mu_2(p)}{\mu_1(p)}\psi(p)=\alpha\varphi(0),\quad \alpha\varphi(q)=\beta\psi(p).$$

Таким образом, на основании (9) задача (8), (2)–(5) сведена к определению в области D решения уравнения (10) с граничными условиями (11)–(12).

Регулярное решение последней задачи представляется формулой

$$\begin{aligned}v(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\beta\int\limits_0^p\left[\frac{\partial G(x,y;\xi,q)}{\partial\eta}-\frac{\mu_2(\xi)}{\mu_1(\xi)}\frac{\partial G(x,y;\xi,0)}{\partial\eta}\right]\psi(\xi)d\xi\\+\frac{1}{2\pi}\alpha\int\limits_0^q\left[\frac{\partial G(x,y;p,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\lambda_2(\eta)}{\lambda_1(\eta)}\frac{\partial G(x,y;0,\eta)}{\partial\xi}\right]\varphi(\eta)d\eta\\-\frac{1}{2\pi}\int\int\limits_D G(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta,\end{aligned} \tag{13}$$

здесь $G(x,y;\xi,\eta)$ — функция Грина задачи Дирихле уравнения Лапласа в прямоугольнике [15].

Теперь в области D решаем задачу

$$\alpha u_x+\beta u_y=v(x,y),$$

$$u(0,y)=0,\quad u(x,0)=0.$$

Ее решение можно записать в виде

$$u(x,y)=\begin{cases}u_1(x,y), & \text{если}\ \ 0\le x\le\frac{\alpha}{\beta}y,\\ u_2(x,y), & \text{если}\ \ \frac{\alpha}{\beta}y\le x\le p,\end{cases} \tag{14}$$

где

$$u_1(x,y)=\frac{1}{\beta}\int\limits_{y-\beta/\alpha x}^{y}v\Big(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t;\xi,q\Big)dt,\quad 0\le x\le\frac{\alpha}{\beta}y, \tag{15}$$

$$u_2(x,y)=\frac{1}{\beta}\int\limits_0^y v\Big(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t;\xi,q\Big)dt,\quad \frac{\alpha}{\beta}y\le x\le p; \tag{16}$$

Подставляя выражение (13) в (15) и (16) и меняя порядок интегрирования, получим

$$u_i(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\beta\int\limits_0^p K_{1i}(x,y;\xi)\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2\pi}\alpha\int\limits_0^q K_{2i}(x,y;\eta)\varphi(\eta)d\eta$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\int\limits_D K_i(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta, \quad i=1,2, \quad (17)$$

где

$$K_{1i}(x,y;\xi) = \int\limits_{z(x,y)}^{y}\left[\frac{\partial G}{\partial\eta}\left(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t;\xi,q\right)-\frac{\mu_2(\xi)}{\mu_1(\xi)}\frac{\partial G}{\partial\eta}\left(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t;\xi,0\right)\right]dt, \quad (18a)$$

$$K_{2i}(x,y;\eta) = \int\limits_{z(x,y)}^{y}\left[\frac{\partial G}{\partial\xi}\left(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t;p,\eta\right)-\frac{\lambda_2(\eta)}{\lambda_1(\eta)}\frac{\partial G}{\partial\xi}\left(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t;0,\eta\right)\right]dt, \quad (18b)$$

$$K_i(x,y;\xi,\eta) = \int\limits_{z(x,y)}^{y} G\left(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t;\xi,\eta\right)dt, \quad z(x,y)=(2-i)\left(y-\frac{\beta}{\alpha}x\right), \quad i=1,2. \quad (18c)$$

Относительно функции (17) справедливо утверждение.

Лемма 1. *Если* $g(x,y)\in C^{(1,h)}(\overline{D})$ *и*

$$\psi(x)\in C^{(0,h)}_{1/2}[0,p], \quad \varphi(y)\in C^{(0,h)}_{1/2}[0,q], \quad 0<h<1,$$

то функция (17) *лежит в пространстве* $C^1(D)$ *и удовлетворяет уравнению* (8) *и граничным условиям* $u(0,y)=0$, $u(x,0)=0$.

Доказательство. Рассмотрим функции $K_{1i}(x,y;\xi)$. Заметим, что

$$\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial\eta} = \frac{y-\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}+\frac{\partial g(x,y;\xi,\eta)}{\partial\eta},$$

поэтому

$$K_{1i}(x,y;\xi) = \int\limits_{z(x,y)}^{y}\left[\frac{t-q}{(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t-\xi)^2+(t-q)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{\mu_2(\xi)}{\mu_1(\xi)}\left(\frac{t}{(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t-\xi)^2+t^2}\right)+\frac{\partial g}{\partial\eta}\right]dt. \quad (19)$$

Вычисляя последней интеграл при $i=1$, получим

$$K_{11}(x,y;\xi) = \frac{\beta^2}{4(\alpha^2+\beta^2)}\left[\ln|(x-\xi)^2+(y-q)^2|+\frac{\mu_2(\xi)}{\mu_1(\xi)}\ln|(x-\xi)^2+y^2|\right]+k_{11}(x,y;\xi), \quad (20)$$

где

$$k_{11}(x,y;\xi) = -\frac{\alpha\beta}{2(\alpha^2+\beta^2)}\left[\operatorname{arctg}\frac{\frac{\alpha}{\beta}(x-\xi)+(y-q)}{(x-\xi)-\frac{\alpha}{\beta}(y-q)}+\frac{\mu_2(\xi)}{\mu_1(\xi)}\operatorname{arctg}\frac{\frac{\alpha}{\beta}(x-\xi)+y}{(x-\xi)-\frac{\alpha}{\beta}y}\right]$$

$$+\frac{\alpha\beta}{2(\alpha^2+\beta^2)}\left[\operatorname{arctg}\frac{(y-q)-\frac{\beta}{\alpha}x-\frac{\alpha}{\beta}\xi}{(x-\xi)-\frac{\alpha}{\beta}(y-q)}+\frac{\mu_2(\xi)}{\mu_1(\xi)}\operatorname{arctg}\frac{y-\frac{\beta}{\alpha}x-\frac{\alpha}{\beta}\xi}{(x-\xi)-\frac{\alpha}{\beta}y}\right]$$
$$-\frac{\beta^2}{4(\alpha^2+\beta^2)}\left[\ln|\xi^2+(y-\frac{\beta}{\alpha}x-q)^2|+\frac{\mu_2(\xi)}{\mu_1(\xi)}\ln|\xi^2+(y-\frac{\beta}{\alpha}x)^2|\right].$$

Вычисляя (19) при $i=2$, имеем

$$K_{12}(x,y;\xi)=\frac{\beta^2}{4(\alpha^2+\beta^2)}\left[\ln|(x-\xi)^2+(y-q)^2|+\frac{\mu_2(\xi)}{\mu_1(\xi)}\ln|(x-\xi)^2+y^2|\right]+k_{12}(x,y;\xi), \tag{21}$$

здесь

$$k_{12}(x,y;\xi)=-\frac{\alpha\beta}{2(\alpha^2+\beta^2)}\left[\operatorname{arctg}\frac{\frac{\alpha}{\beta}(x-\xi)+(y-q)}{(x-\xi)-\frac{\alpha}{\beta}(y-q)}+\frac{\mu_2(\xi)}{\mu_1(\xi)}\operatorname{arctg}\frac{\frac{\alpha}{\beta}(x-\xi)+y}{(x-\xi)-\frac{\alpha}{\beta}y}\right]$$
$$+\frac{\alpha\beta}{2(\alpha^2+\beta^2)}\left[\operatorname{arctg}\frac{\frac{\alpha}{\beta}(x-\xi)-(\frac{\alpha^2}{\beta^2}y+q)}{(x-\xi)-\frac{\alpha}{\beta}(y-q)}+\frac{\mu_2(\xi)}{\mu_1(\xi)}\operatorname{arctg}\frac{\frac{\alpha}{\beta}(x-\frac{\alpha}{\beta}y-\xi)}{(x-\xi)-\frac{\alpha}{\beta}y}\right]$$
$$-\frac{\beta^2}{4(\alpha^2+\beta^2)}\left[\ln|(x-\frac{\alpha}{\beta}y-\xi)^2+q^2|+\frac{\mu_2(\xi)}{\mu_1(\xi)}\ln|(x-\frac{\alpha}{\beta}y-\xi)^2|\right].$$

Функции $k_{1i}(x,y;\xi)$ при $x=\xi$, $y=q$ и $y=0$ непрерывны и ограничены, а $\frac{\partial k_{1i}(x,y;\xi)}{\partial x}$, $\frac{\partial k_{1i}(x,y;\xi)}{\partial y}$ непрерывны и ограничены при всех $x\neq\xi$, $y\neq q$ и $y\neq 0$, а при $x\to\xi$, $y\to q$ и $y\to 0$ имеют место оценки

$$\left|\frac{\partial k_{1i}(x,y;\xi)}{\partial x}\right|\leq\frac{c_1}{r},\qquad\left|\frac{\partial k_{1i}(x,y;\xi)}{\partial y}\right|\leq\frac{c_2}{r},$$

здесь $c_1,c_2=const$, $r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2$.

Используя равенство

$$\frac{\partial G(x,y;\xi,\eta)}{\partial\xi}=\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}+\frac{\partial g(x,y;\xi,\eta)}{\partial\xi},$$

аналогично интегрируются функции $K_{2i}(x,y;\eta)$:

$$K_{2i}(x,y;\eta)=\frac{\alpha^2}{4(\alpha^2+\beta^2)}\left[\ln|(x-p)^2+(y-\eta)^2|+\frac{\lambda_2(\eta)}{\lambda_1(\eta)}\ln|x^2+(y-\eta)^2|\right]+k_{2i}(x,y;\eta), \tag{22}$$

где

$$k_{21}(x,y;\eta)=-\frac{\alpha\beta}{2(\alpha^2+\beta^2)}\left[\operatorname{arctg}\frac{\frac{\alpha}{\beta}(x-p)+(y-\eta)}{(x-p)-\frac{\alpha}{\beta}(y-q)}+\frac{\lambda_2(\eta)}{\lambda_1(\eta)}\operatorname{arctg}\frac{\frac{\alpha}{\beta}x+(y-q)}{x-\frac{\alpha}{\beta}(y-\eta)}\right]$$
$$-\frac{\alpha\beta}{2(\alpha^2+\beta^2)}\left[\operatorname{arctg}\frac{(y-\eta)-\frac{\beta}{\alpha}x-\frac{\alpha}{\beta}p}{(x-p)-\frac{\alpha}{\beta}(y-\eta)}+\frac{\lambda_2(\eta)}{\lambda_1(\eta)}\operatorname{arctg}\frac{(y-\eta)-\frac{\beta}{\alpha}x}{x-\frac{\alpha}{\beta}(y-\eta)}\right]$$
$$-\frac{\alpha^2}{4(\alpha^2+\beta^2)}\left[\ln|(p)^2+(y-\frac{\beta}{\alpha}x-\eta)^2|+\frac{\lambda_2(\eta)}{\lambda_1(\eta)}\ln|(y-\frac{\beta}{\alpha}x-\eta)^2|\right],$$

$$k_{22}(x,y;\eta)=-\frac{\alpha\beta}{2(\alpha^2+\beta^2)}\left[\operatorname{arctg}\frac{\frac{\alpha}{\beta}(x-p)+(y-\eta)}{(x-p)-\frac{\alpha}{\beta}(y-q)}+\frac{\lambda_2(\eta)}{\lambda_1(\eta)}\operatorname{arctg}\frac{\frac{\alpha}{\beta}x+(y-q)}{x-\frac{\alpha}{\beta}(y-\eta)}\right]$$

$$-\frac{\alpha\beta}{2(\alpha^2+\beta^2)}\left[\operatorname{arctg}\frac{\frac{\alpha}{\beta}(x-p)-\frac{\alpha^2}{\beta^2}y-\eta}{(x-p)-\frac{\alpha}{\beta}(y-\eta)}+\frac{\lambda_2(\eta)}{\lambda_1(\eta)}\operatorname{arctg}\frac{\frac{\alpha}{\beta}x-\frac{\alpha^2}{\beta^2}y-\eta}{x-\frac{\alpha}{\beta}(y-\eta)}\right]$$
$$-\frac{\alpha^2}{4(\alpha^2+\beta^2)}\left[\ln|(x-\frac{\alpha}{\beta}y-p)^2+\eta^2|+\frac{\lambda_2(\eta)}{\lambda_1(\eta)}\ln|(x-\frac{\alpha}{\beta}y)^2+\eta)^2|\right].$$

Функции $k_{2i}(x,y;\eta)$ при $x=0$, $x=p$ и $y=\eta$ непрерывны и ограничены, а $\frac{\partial k_{1i}(x,y;\xi)}{\partial x}$, $\frac{\partial k_{1i}(x,y;\xi)}{\partial y}$ непрерывны и ограничены при всех $x\neq 0$, $x\neq p$ и $y\neq\eta$, а при $x\to 0$, $x\to p$ и $y\to\eta$ имеют место оценки

$$\left|\frac{\partial k_{2i}(x,y;\eta)}{\partial x}\right|\leq\frac{c_3}{r},\quad\left|\frac{\partial k_{2i}(x,y;\eta)}{\partial y}\right|\leq\frac{c_4}{r},$$

здесь $c_3,c_4=const$, $r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2$.

Аналогично доказывается, что функции $K_i(x,y;\xi,\eta)$ непрерывны и ограничены при $x=\xi$, $y=\eta$, а производные $K_{ix}(x,y;\xi,\eta)$, $K_{iy}(x,y;\xi,\eta)$ непрерывны при всех $x\neq\xi$, $y\neq\eta$, а при $x\to\xi$, $y\to\eta$ имеют логарифмическую особенность. Это следует из равенства (18c).

Следовательно, из теории гармонических потенциалов [16] и условий леммы 1 следует, что функция $u_i(x,y)\in C^{(1,h)}(\overline{D})\bigcap C^3(D)$.

Если продифференцировать (17) по x и по y, то получим, что $u_i(x,y)$ удовлетворяет уравнению (8), удовлетворение условиям $u_1(0,y)=0$ и $u_2(0,y)=0$ также следует из формулы (17). Лемма доказана.

Решение исследуемой задачи $S_{\alpha\beta}$ будем искать в виде (17), предполагая, что функции $g(x,y)$, $\psi(x)$, $\varphi(y)$ удовлетворяют условиям леммы. Согласно лемме функция (17) удовлетворяет всем условиям задачи, кроме условий $u(x,q)=0$, и $u(p,y)=0$. Для того чтобы удовлетворить этим условиям, перейдем в (17) к пределу $y\to q$ при $i=1$ и $x\to p$ при $i=2$. В силу непрерывности (17) придем к следующим интегральным уравнениям для определения функции $\psi(x)$ и $\varphi(y)$

$$-\frac{1}{2\pi}\beta\int_0^p K_{11}(x,q;\xi)\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2\pi}\alpha\int_0^q K_{21}(x,q;\eta)\varphi(\eta)d\eta=\Phi_1(x),\quad 0\leq x\leq p,\tag{23}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\beta\int_0^p K_{12}(p,y;\xi)\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2\pi}\alpha\int_0^q K_{22}(p,y;\eta)\varphi(\eta)d\eta=\Phi_2(y),\quad 0\leq y\leq q,\tag{24}$$

здесь

$$\Phi_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int\int_D K_1(x,q;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

$$\Phi_2(y)=\frac{1}{2\pi}\int\int_D K_2(p,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Из равенств (20) и (22) легко заметить, что ядра $K_{11}(x,q;\xi)$ и $K_{22}(p,y;\eta)$ интегральных уравнений (23) и (24) имеют логарифмическую особенность при $x=\xi$ и $y=\eta$ соответственно, а функции $K_{21}(x,q;\eta)$, $K_{12}(p,y;\xi)$ и $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(y)$ непрерывно-дифференцируемы, причем $\Phi_1'(x)$, $\Phi_2'(y)$ удовлетворяют условию Гельдера.

В силу условий леммы 1 в классе $C^{(1,h)}(\bar{D})\cap C^3(D)$ однородная задача (8), (2)–(5) относительно функций $\psi(x)$ и $\varphi(y)$ эквивалентна системе интегральных уравнений (23)–(24).

Отметим, что из единственности решения исходной задачи $S_{\alpha\beta}$ следует единственность решения полученной системы интегральных уравнений.

3. Существование решения системы интегральных уравнений

В этом пункте рассмотрим вопрос о существование решения системы интегральных уравнений (23)–(24). Возможны различные способы доказательства существования решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Здесь приведем доказательство, основанное на частичного обращения интегральных операторов [16].

Обратимся к уравнению (23). Перепишем интегральное уравнение (23), разбив ядро уравнения на регулярную и сингулярную части, в виде

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^p \Big[\ln|x-\xi| + k_1(x,\xi)\Big]\psi(\xi)d\xi = F(x), \tag{25}$$

где

$$k_1(x,\xi) = \frac{\mu_2(\xi)}{\mu_1(\xi)}\ln|(x-\xi)^2+q^2| + \frac{2\alpha}{\beta}k_{11}(x,q;\xi),$$

$$F(x) = \frac{4(\alpha^2+\beta^2)}{\beta^2}\Phi_1(x) - \frac{1}{2\pi}\frac{\alpha^2}{\beta^2}\int\limits_0^q K_{12}(x,q;\eta)\varphi(\eta)d\eta.$$

Учитывая условия леммы 1 и равенства (22), получаем, что функция $k_1(x,\xi)$ и ее первые производные являются непрерывными, а $F(x)\in C^{(1,h)}[0,p]$.

Приведем доказательство теоремы о существовании решения иетегрального уравнения первого рода (25).

Теорема 2. *Если $F(x)\in C^{(1,h)}[0,p]$, то единственное решение $\psi(x)$ интегрального уравнения* (25) *существует в классе $C_{1/2}^{(0,h)}[0,p]$.*

Доказательство. Предположим, что решение $\psi(x)$ уравнения (25) существует в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера в замкнутом интервале (см., например, [16]), не включающем концов, а вблизи концов представимых в виде

$$\psi(x) = \frac{\psi_*(x)}{\sqrt{x(p-x)}},$$

где $\psi_*(x)$ удовлетворяет условию Гельдера. Тогда представим уравнение (25) в виде

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^p \ln|x-\xi|\psi(\xi)d\xi = F_1(x), \tag{26}$$

здесь

$$F_1(x) = F(x) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^p k_1(x,\xi)\psi(\xi)d\xi,$$

явное решение которого общеизвестно [16, 17] и может быть записано при $p\neq 4$ с помощью резольвенты ядра $-\ln|x-\xi|$, т. е.

$$\psi(x) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{x(p-x)}}\left[\int\limits_0^p \frac{\sqrt{t(p-t)}F_1'(t)dt}{t-x} + \frac{1}{\ln(p/4)}\int\limits_0^p \frac{F_1(t)dt}{\sqrt{t(p-t)}}\right].$$

Согласно [18] при $F(x) \in C^{(1,h)}[0,p]$ функция $\psi(x) \in C^{(0,h)}[0,p]$.

Вводя новую неизвестную функцию $\psi_*(x) = \psi(x)\sqrt{x(p-x)}$, относительно функции $\psi_*(x)$ получаем следуюшее эквивалентное уравнению (25) ([18, 19]) интегральное уравнение

$$\psi_*(x) + \int\limits_0^p \frac{M_1(x,\xi)}{\sqrt{\xi(p-\xi)}}\psi_*(\xi)d\xi + \int\limits_0^q N_1(x,\eta)\varphi(\eta)d\eta = \Phi_3(x), \tag{27}$$

здесь

$$M_1(x,\xi) = \frac{1}{4\pi^2}\left[\frac{1}{\ln(p/4)}\int\limits_0^p \frac{k_1(t,\xi)dt}{\sqrt{t(p-t)}} - \int\limits_0^p \frac{\sqrt{t(p-t)}k'_{1x}(t,\xi)dt}{t-x}\right],$$

$$N_1(x,\eta) = \left(\frac{\alpha}{2\pi\beta}\right)^3\left[\frac{1}{\ln(p/4)}\int\limits_0^p \frac{K_{12}(t,q;\eta)dt}{\sqrt{t(p-t)}} - \int\limits_0^p \frac{\sqrt{t(p-t)}K'_{12x}(t,q;\eta)dt}{t-x}\right],$$

$$\Phi_3(x) = -\frac{1}{\pi^2}\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta^2}\left[\frac{1}{\ln(p/4)}\int\limits_0^p \frac{\Phi_1(t)dt}{\sqrt{t(p-t)}} - \int\limits_0^p \frac{\sqrt{t(p-t)}\Phi'_1(t)dt}{t-x}\right].$$

Теорема доказана

Аналогичным образом, обращаем при $q \neq 4$ главную часть интегрального уравнения (24) и получим эквивалентное интегральное уравнение второго рода в виде

$$\varphi_*(x) + \int\limits_0^q \frac{M_2(y,\eta)}{\sqrt{\eta(q-\eta)}}\varphi_*(\eta)d\eta + \int\limits_0^p N_2(y,\xi)\varphi(\xi)d\xi = \Phi_4(y), \tag{28}$$

где $\varphi_*(y) = \sqrt{y(q-y)}\varphi(y)$,

$$M_2(y,\eta) = \frac{1}{4\pi^2}\left[\frac{1}{\ln(q/4)}\int\limits_0^q \frac{k_2(\tau,\eta)d\tau}{\sqrt{\tau(q-\tau)}} - \int\limits_0^q \frac{\sqrt{\tau(q-\tau)}k'_{2y}(\tau,\eta)d\tau}{\tau-y}\right],$$

$$N_2(y,\xi) = \left(\frac{\beta}{2\pi\alpha}\right)^3\left[\frac{1}{\ln(q/4)}\int\limits_0^q \frac{K_{21}(p,\tau,\eta)d\tau}{\sqrt{\tau(q-\tau)}} - \int\limits_0^q \frac{\sqrt{\tau(q-\tau)}K'_{21y}(p,\tau,\eta)d\tau}{\tau-y}\right],$$

$$\Phi_4(y) = -\frac{1}{\pi^2}\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}\left[\frac{1}{\ln(q/4)}\int\limits_0^q \frac{\Phi_2(\tau)d\tau}{\sqrt{\tau(q-\tau)}} - \int\limits_0^q \frac{\sqrt{\tau(q-\tau)}\Phi'_2(\tau)d\tau}{\tau-y}\right].$$

Как показано в [13], к уравнениям (27)–(28) с ядрами

$$\frac{M_1(x,\xi)}{\sqrt{\xi(p-\xi)}}, \quad \frac{M_2(y,\eta)}{\sqrt{\eta(q-\eta)}}$$

применима альтернатива Фредгольма о разрешимости. Поскольку интегральные уравнения (27), (28) и задача $S_{\alpha\beta}$ эквивалентны, то в силу теоремы единственности следует их разрешимость в классе Гельдера.

После определения функций $\psi(x)$ и $\varphi(y)$ решение уравнения (7), удовлетворяющее однородным граничным условиям (2)–(5), имеет вид

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\int\limits_D \mathcal{P}(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{29}$$

где

$$\mathcal{P}(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\int\limits_{z(x,y)}^{y}\left[G_1\left(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t;\xi,\eta\right)-\mathcal{S}\left(x-\frac{\alpha}{\beta}y+\frac{\alpha}{\beta}t,t;\xi,\eta\right)\right]dt,$$

а функция $\mathcal{S}(x,y;\xi,\eta)$ — вполне определенное ядро [8], зависящее от функции Грина $G_1(x,y;\xi,\eta)$ и ее прозводных под интегралами. Оно является непрерывной функцией вместе с производными любого порядка при $(x,y)\in D$.

Из результатов [8] легко следует, что функция $u(x,y)$, определенная по формуле (29), при любой $g(x,y)\in C^{(1,h)}(\overline{D})$, удовлетворяет уравнению (8) и однородным граничным условиям (2)–(5).

Теперь подберем $g(x,y)$ так, чтобы функция (29) удовлетворяла уравнению (1). Так как функция $g(x,y)\in C^{(1,h)}(\overline{D})$, то производные u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} и $\frac{\partial}{\partial x}(\Delta u)$, $\frac{\partial}{\partial y}(\Delta u)$ существуют и являются непрерывными функциями в D, а

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_{xx}+u_{yy})=2\pi g(x,y).$$

Подставляя (29) в уравнение (1), получаем интегральное уравнение

$$g(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{D}\mathcal{K}(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)d\xi d\eta+f(x,y), \tag{30}$$

здесь

$$\mathcal{K}(x,y;\xi,\eta)=a(x,y)\frac{\partial^2\mathcal{P}(x,y;\xi,\eta)}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2\mathcal{P}(x,y;\xi,\eta)}{\partial xy}+c(x,y)\frac{\partial^2\mathcal{P}(x,y;\xi,\eta)}{\partial y^2}$$
$$+a_1(x,y)\frac{\partial\mathcal{P}(x,y;\xi,\eta)}{\partial x}+b_1(x,y)\frac{\partial\mathcal{P}(x,y;\xi,\eta)}{\partial y}+c_1(x,y)\mathcal{P}(x,y;\xi,\eta).$$

Нетрудно показать, что функция $\mathcal{P}(x,y;\xi,\eta)$ в области D удовлетворяет неравенствам

$$|\mathcal{P}_x(x,y;\xi,\eta)|\le c_1\ln|r|,\quad |\mathcal{P}_{xx}(x,y;\xi,\eta)|\le\frac{c_2}{|r|},$$

где $c_i=const>0$ $(i=1,2)$, $r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2$.

Следовательно, ядро $\mathcal{K}(x,y;\xi,\eta)$ не интегрируется с квадратом, но легко видеть [8], что итерированное ядро

$$\mathcal{K}_2(x,y;\xi,\eta)=\iint\limits_{D}\mathcal{K}(x,y;s,t)\mathcal{K}(s,t;\xi,\eta)\,dsdt$$

интегрируемо с квадратом. Поэтому вместо уравнения (30) рассмотрим интегральное уравнение с итерированным ядром

$$g(x,y)=\iint\limits_{D}\mathcal{K}_2(x,y;\xi,\eta)g(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+f_1(x,y), \tag{31}$$

где

$$f_1(x,y)=f(x,y)+\iint\limits_{D}\mathcal{K}(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta.$$

Так как

$$|\mathcal{K}(x,y;\xi,\eta)|\le\frac{c_3}{|r|},\quad c_3=const>0;$$

то [20]

$$|\mathcal{K}_2(x,y;\xi,\eta)| \le c_4 \ln r + c_5, \quad c_4,\ c_5 = const > 0.$$

Следовательно, для уравнения (31) справедлива теоремы Фредгольма.

Заметим (см., например, [8]), что интегральное уравнение (31) (и задача $S_{\alpha\beta}$) имеет единственное решения при условии

$$\iiiint\limits_{D\times D} \mathcal{K}_2^2(x,y;\xi,\eta) g(\xi,\eta)\, dxdyd\xi d\eta < 1.$$

Решая уравнение (31), находим $g(x,y) \in C^{(1,h)}(\bar{D})$ и, тем самым, и $u(x,y)$.

Легко проверить, что функция $u(x,y)$, определяемая формулой (29), при любой $g(x,y) \in C^{(1,h)}(\bar{D})$ принадлежит классу $C^{(1,h)}(\bar{D}) \bigcap C^3(D)$.

Таким образом, резюмируя изложенное выше, приходим к следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть наряду с условиями теоремы 1 выполнены следующие*

$$\psi_i(x) \in C_{1/2}^{(1,h)}[0,p], \quad \varphi_i(y) \in C_{1/2}^{(1,h)}[0,q], \quad i = 1,2;$$

$$\psi_3(x), \mu_j(x) \in C_{1/2}^{(0,h)}[0,p], \quad \varphi_3(y), \lambda_j(y) \in C_{1/2}^{(0,h)}[0,q], \quad j = 1,2;$$

$$f(x,y) \in C^{(1,h)}(\overline{D}), \quad 0 < h < 1.$$

Тогда решение задачи $S_{\alpha\beta}$ существует.

Это решение представимо в виде (9), где функции $\psi(x)$, $\varphi(y)$ и $g(x,y)$ уже известны. Итак, существования решение задачи $S_{\alpha\beta}$ доказано.

Замечение 3. Разрешимость задачи $S_{\alpha\beta}$ в остальных случаях, за исключением некоторых деталей, исследуется аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1 *Hadamard J.* Proprictes d'une equation lineaire aux derivees partielles du quatrine order // Tonoku Math. J. 1933. V. 37. P. 133–150.

2 *Hadamard J.* Equations aux derivees partielles // L'enseignement mathematique. 1936. V. 35. P. 5–42.

3 *Sjöstrand O.* Sur une equation aux derivees partialles du type composite // Ark. Math. Astr. Fys. 1936. V. 25A, N 21. P. 1–11.

4 *Sjöstrand O.* Sur une equation aux derivees partialles du type composite. Note 2 // Ark. Math. Astr. Fys. 1937. V. 26A, N 1. P. 1–10.

5 *Davis R. B.* A boundary value problem for third-order linear partial differential equations of composite type // Proc. Amer. Math. Soc. 1952. V. 3. P. 751.

6 *Wolfersdorf L.* Sjöstrandsche probleme dritter art für die Gleichungen $\frac{\partial}{\partial x}\Delta u = 0$ // Beitrage Analysis. 1973. V. 5. P. 91–99.

7 *Салахитдинов М. С.* Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: Фан, 1974. 154 с.

8 *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979. 240 с.

9 *Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент: Фан, 1986. 220 с.

10 *Кожанов А. И.* Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. Новосибирск, 1990. 132 с.

11 *Джураев Т. Д., Попелек Я.* О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Диффер. уравн. 1991. Т. 27, № 10. С. 1734–1745.

12 *Габов С. А., Свешников А. Г.* Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990. 344 с.
13 *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
14 *Джураев Т. Д., Зикиров О. С.* Об одном способе решения локальных и нелокальных краевых задач для уравнений составного типа // Узбек. мат. журн. 1993. № 3. С. 45–52.
15 *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.-Л.: ГИТТЛ, 1951. 476 с.
16 *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
17 *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.
18 *Хапаев М. М.* Численное обращение некоторых интегральных операторов // Дифферен. уравн. 1981. Т. 17, № 7. С. 1328–1339.
19 *Гусеинов Э. А., Ильинский А. С.* Интегральные уравнения I рода с логарифмической особенности в ядре и их применение в задачах дифракции на тонких экранах // Ж. вычисл. мат. и мат. физики. 1987. Т. 27, No 7. С. 1050–1057.
20 *Михлин С. Г.* Лекции по теории линейным интегральным уравнениям. М.: ГИФМЛ, 1959. 232 с.

Джураев Тохтамурад Джураевич
Узбекистан, Ташкент, Институт математики и информационных технологий АН Республики Узбекистан
`mathinst@uzsci.net`

Зикиров Обиджан Салижанович
Узбекистан, Ташкент, Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека
`zikirov@yandex.ru`