Неклассические уравнения математической физики 2007. С. 283–297

УДК 517.983.51

О ПРИЛОЖЕНИЯХ ТЕОРИИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ ВЫРОЖДЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

М. В. Фалалеев

В работе методами теории обобщенных функций в банаховых пространствах исследованы на разрешимость в классе распределений с ограниченным слева носителем различные неклассические начально-краевые задачи математической физики и на этой основе получены достаточные условия существования у них непрерывных решений.

Данная заметка, как видно из названия, посвящена исследованию начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных (прикладного характера) методами теории обобщенных функций в банаховых пространствах [2, 3]. Рассматриваемые ниже задачи допускают редукцию к задаче Коши для дифференциального уравнения в банаховых пространствах с необратимым оператором при старшей (по времени) производной, про которые известно, что они разрешимы в классе непрерывных (по времени) функций только при выполнении определенных соотношений между начальными условиями и правыми частями уравнения (входными данными задачи). нарушение таких соотношений естественным образом приводит к необходимости постановки рассматриваемых проблем в классе обобщенных функций, поскольку для разрешимости в пространстве распределений условия согласования входных данных задачи уже не требуются. Эффективным инструментом для восстановления обобщенного решения оказалась конструкция фундаментальной оператор-функции [2–4]. С ее помощью удается в замкнутом виде выписать обобщенное решение, доказать его единственность в соответствующих достаточно широких классах распределений, исследовать связь между обобщенными и классическими (непрерывными) решениями, если последние существуют. В последующих пунктах заметки при различных условиях на операторные коэффициенты уравнения проиллюстрирована реализация описанных выше возможностей на примерах нескольких начально-краевых задач.

1. Обобщенные функции в банаховых пространствах

В этом пункте приведены определения и сведения из теории обобщенных функций в банаховых пространствах, которые в последующем изложении являются основным исследовательским аппаратом [2–4].

Пусть E — банахово пространство, E^* — сопряженное банахово пространство. Отнесем к *множеству основных функций* $K(E^*)$ все финитные функции класса

$C^\infty(R)$ со значениями в E^*. Обозначать эти функции будем через $s(t)$. *Носителем* supp $s(t)$ основной функции $s(t)$ называется замыкание в R^1 множества тех точек t, для которых $s(t) \neq 0$. Основное множество $K(E^*)$ является векторным пространством, которое наделяется структурой топологического посредством введения в нем сходимости следующим образом

Определение. Последовательность функций $s_k(t) \in K(E^*)$ *сходится* к функ ции $s(t) \in K(E^*)$, если

а) $\exists R > 0$ что supp $s_k(t) \subset [-R; R]$ при всех номерах k;

б) $\forall n \in N$ $\parallel s_k^{(n)}(t) - s^{(n)}(t) \parallel \rightrightarrows 0$ равномерно на R^1 (фактически на $[-R; R]$) при $k \to \infty$.

Заметим, что операции дифференцирования $\frac{d}{dt}$ и умножения на числовую функцию $a(t) \in C^\infty(R)$ непрерывны из $K(E^*)$ в $K(E^*)$.

Обобщенной функцией (распределением) со значениями в банаховом пространстве E называется всякий линейный непрерывный функционал на основном пространстве $K(E^*)$, множество всех таких функционалов обозначается $K'(E)$ и оно обладает структурой векторного пространства. Значение обобщенной функции $f \in K'(E)$ на основной функции $s(t) \in K(E^*)$ обозначают $(f, s(t))$. Всякая локально интегрируемая функция $f(t)$ со значениями в E порождает *регулярную обобщенную функцию* по правилу

$$(f(t), s(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f(t), s(t) \rangle dt,$$

причем две различные локально интегрируемые функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ по выписанному правилу порождают различные обобщенные функции. Все остальные распределения называются *сингулярными обобщенными функциями.* Сходимость в $K'(E)$ определяется как слабая [2–4] и относительно нее $K'(E)$ является полным пространством. Операции умножения на числовую функцию $a(t) \in C^\infty(R)$ и дифференцирования определяются на $K'(E)$ естественным образом [5].

Пусть теперь E_1, E_2 — банаховы пространства, $\mathcal{K}(t) \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ сильно непре рывная оператор-функция класса $C^\infty(R)$, причем $\mathcal{K}^*(t) \in \mathcal{L}(E_2^*, E_1^*)$ существует при почти всех $t \in R$, $f(t) \in D'$ — классическая обобщенная функция [5], тогда выражение вида $\mathcal{K}(t)f(t)$ называется *обобщенной оператор-функцией.* Если $u(t) \in K'(E_1)$, то *сверткой* обобщенной оператор-функции $\mathcal{K}(t)f(t)$ и обобщенной функции $u(t) \in K'(E_1)$ называется новый функционал $\mathcal{K}(t)f(t) * u(t) \in K'(E_2)$ (если он существует) определяемый равенством

$$\Big(\mathcal{K}(t)f(t) * u(t), s(t)\Big) = \Big(f(t), \big(u(\tau), \mathcal{K}^*(t)s(t+\tau)\big)\Big) \quad \forall s(t) \in K(E_2^*).$$

В этих терминах задачу Коши

$$B\dot{u}(t) = Au(t) + \int_0^t k(t-s)u(s)ds + f(t), \quad u(0) = u_0 \tag{1}$$

можно переписать в виде

$$\Big(B\delta'(t) - A\delta(t) - k(t)\theta(t)\Big) * \tilde{u}(t) = f(t)\theta(t) + Bu_0\delta(t), \tag{2}$$

здесь $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, $\theta(t)$ — функция Хевисайда [5]. Условия на операторные коэффициенты $A, B, k(t) : E_1 \to E_2$, при которых рассматривается

эта задача, будут выписаны ниже. Поскольку далее везде B — необратим, то обобщенные оператор-функции вида $\big(B\delta'(t) - A\delta(t) - k(t)\theta(t)\big)$ будем называть вырожденными интегро-дифференциальными операторами.

Фундаментальной оператор-функцией вырожденного интегро-дифференциального оператора $\big(B\delta'(t) - A\delta(t) - k(t)\theta(t)\big)$ на классе обобщенных функций с ограниченным слева носителем [5] называется обобщенная оператор-функция $\mathcal{E}(t)$ такая, что справедливы следующие два равенства

$$\big(B\delta'(t) - A\delta(t) - k(t)\theta(t)\big) * \mathcal{E}(t) * u(t) = u(t) \quad \forall u(t) \in K'_+(E_2),$$

$$\mathcal{E}(t) * \big(B\delta'(t) - A\delta(t) - k(t)\theta(t)\big) * v(t) = v(t) \quad \forall v(t) \in K'_+(E_1).$$

Если известна фундаментальная оператор-функция $\mathcal{E}(t)$, то свертка

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}(t) * (f(t)\theta(t) + Bu_0\delta(t)) \tag{3}$$

является единственным решением уравнения (2) в классе $K'_+(E_1)$. Таким образом, для восстановления обобщенного решения задачи Коши (1) достаточно построить фундаментальную оператор-функцию. Условия, при которых сингулярная составляющая обобщенного решения (3) обращается в ноль, а остающаяся при этом регулярная составляющая удовлетворяет начальным условиям и являются условиями существования классического решения (и совпадения обобщенного решения с непрерывным).

2. Дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшей производной

В [2, 3] приведены и доказаны следующие утверждения

Теорема 1. *Если A, B — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, $D(B) \subset D(A)$, $\overline{D(A)} = \overline{D(B)} = E_1$, B — фредгольмов, $\overline{R(B)} = R(B)$, B имеет полный A-жорданов набор $\{\varphi_i^{(j)},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,p_i}\}$ (см. [1, с. 424–426]), тогда вырожденный дифференциальный оператор первого порядка $(B\delta^{'}(t) - A\delta(t))$ на классе обобщенных функций с ограниченным слева носителем имеет фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_1(t) = \Gamma e^{A\Gamma t}\left[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right]\theta(t)$$
$$- \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\delta^{(k)}(t)\right],$$

а вырожденный дифференциальный оператор второго порядка $(B\delta''(t) - A\delta(t))$ на том же классе имеет фундаментальную оператор-функцию вида

$$\mathcal{E}_2(t) = \Gamma\frac{\sinh(\sqrt{A\Gamma}t)}{\sqrt{A\Gamma}}\left[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right]\theta(t)$$
$$- \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\delta^{(2k)}(t)\right].$$

где $\{\psi_i^{(j)},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,p_i}\}$, *$A^*$-жорданов набор оператора B^*,*

$$\Gamma = \left(B+\sum_{i=1}^{n}\langle\cdot, A^*\psi_i^{(p_i)}\rangle A\varphi_i^{(p_i)}\right)^{-1}$$

оператор Шмидта (*см.* [1, *с.* 340]).

Пример 1. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(n\pi)^2u\right)=b\frac{\partial u}{\partial x}+f(t,x),\quad t\ge 0,\quad 0\le x\le 1,$$

$$u\Big|_{t=0}=\alpha(x),\quad \alpha(0)=\alpha(1)=0,$$

$$u\Big|_{x=0}=u\Big|_{x=1}=0,$$

описывающую процессы влагопереноса. Эта задача редуцируется к задаче Коши (1) если выбрать

$$E_1\equiv\Big\{y(x):\ u(x)\in L_2[0,1],\ y(0)=y(1)=0\Big\}\equiv\overset{\circ}{L}{}^2\,[0,1],\quad E_2\equiv L_2[0,1],$$

$$B=B^*=\frac{d^2}{dx^2}+(n\pi)^2,\ A=b\frac{d}{dx},\ A^*=-b\frac{d}{dx},\ D(B)\equiv\overset{\circ}{H}{}^2\,[0,1],\ D(A)\equiv H^1[0,1].$$

Оператор B фредгольмов, $\dim N(B)=\dim N(B^*)=1$,

$$\varphi^{(1)}=\sin n\pi x,\ \psi^{(1)}=\frac{8}{b^2}\sin n\pi x,\ \varphi^{(2)}=\frac{b}{2}x\sin n\pi x\ \psi^{(2)}=-\frac{4}{b}x\sin n\pi x,\ p=2.$$

Восстанавливаем оператор Шмидта

$$\Gamma=\left(\frac{d^2}{dx^2}+(n\pi)^2+2b^2(\sin n\pi x+n\pi x\cos n\pi x)\int_0^1(\sin n\pi y+n\pi y\cos n\pi y)\cdot dy\right)^{-1}$$

$$=\frac{1}{n\pi}\int_0^x\sin n\pi(x-y)\cdot dy+\int_0^1K(x,y)\cdot dy,$$

здесь

$$K(x,y)=\left[\left(\frac{8}{b^2}-y^2-x^2-\frac{1}{2(n\pi)^2}\right)\sin n\pi x+\frac{x\cos n\pi x}{n\pi}\right]\sin n\pi y$$
$$+\frac{1}{n\pi}(y-1)\sin n\pi x\cdot\cos n\pi y,$$

и произведение

$$A\Gamma=b\int_0^x\cos n\pi(x-y)\cdot dy+b\int_0^1\frac{\partial K(x,y)}{\partial x}\cdot dy.$$

По теореме 1 восстанавливаем фундаментальную оператор-функцию

$$\mathcal{E}(t)=\left[\Gamma e^{A\Gamma t}-\frac{4}{b}\sin n\pi x\int_0^1L(t,x,y)\sin n\pi y\cdot dy\right]\theta(t)$$

$$-\frac{4}{b}\sin n\pi x\int_0^1(x-y)\sin n\pi y\cdot dy\,\delta(t)-\frac{8}{b^2}\sin n\pi x\int_0^1\sin n\pi y\cdot dy\,\delta'(t),$$

здесь

$$L(t,x,y)=\left(\frac{2}{b}-\frac{b}{2}xy\right)\cosh t+(x-y)\sinh t.$$

Если $\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}$ непрерывна по совокупности переменных t и x, то обобщенное решение в развернутом виде запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}u(t,x)=\Bigg[\alpha(x)&+\int_0^t \Gamma e^{A\Gamma(t-\tau)}(b\alpha'(x)+f(\tau,x))d\tau\\ &-\frac{4}{b}\sin n\pi x\int_0^t\int_0^1 L(t-\tau,x,y)\sin n\pi y(b\alpha'(y)+f(\tau,y))dyd\tau\\ &-\frac{4}{b}x\sin n\pi x\int_0^1 \sin n\pi y(b\alpha'(y)+f(t,y))dy\\ &+\frac{4}{b}\sin n\pi x\int_0^1\left(by\alpha'(y)+yf(t,y)-\frac{2}{b}\frac{\partial f(t,y)}{\partial t}\right)dy\Bigg]\theta(t)\\ &-\frac{8}{b^2}\sin n\pi x\int_0^1 \sin n\pi y(b\alpha'(y)+f(0,y))dy\,\delta(t).\end{aligned}$$

Построенное обобщенное решение совпадает с классическим (непрерывным) если

$$\int_0^1 (b\alpha'(y)+f(0,y))\sin n\pi y\,dy=0,$$

$$\int_0^1\left(b\alpha'(y)+f(0,y)-\frac{2}{b}\frac{\partial f(0,y)}{\partial t}\right)\sin n\pi y\,dy=0.$$

Отметим, что операторную экспоненту $e^{A\Gamma t}$ можно восстановить по известной формуле

$$e^{A\Gamma t}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}(\mu I-A\Gamma)^{-1}e^{\mu t}d\mu,$$

где C_R - окружность на комплексной плоскости с центром в нуле и радиусом $R>\| A\Gamma \|$.

Пример 2. Рассмотрим линеаризованную систему уравнений Буссинеска

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[b+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]u(t,x)=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f(t,x),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[b+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]w(t,x)=d\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+g(t,x),\quad t\geq 0,\ x\in[0,1]$$

с начальными

$$u\Big|_{t=0}=u_0(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=u_1(x),\quad 0\leq x\leq 1,$$

$$w\Big|_{t=0} = w_0(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = w_1(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

и краевыми условиями

$$u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=1} = w\Big|_{x=0} = w\Big|_{x=1} = 0, \quad t \ge 0,$$

причем начальные функции $u_0(x), u_1(x), w_0(x), w_1(x)$ удовлетворяют этим же граничным условиям, $a, b, c, d \in R$, $f(t,x)$, $g(t,x)$ непрерывны по совокупности переменных.

Системы такого вида встречаются при описании колебательных процессов в молекулах ДНК см. [6] и библиографию там же. Если $b \ne (n\pi)^2$, $n \in N$, то задача однозначно разрешима в классе непрерывных функций, поэтому интерес представляет случай $b = (n\pi)^2$ при некотором $n \in N$.

Пусть, как и в предыдущем примере,

$$E_1 \equiv \overset{\circ}{L}{}^2[0,1], \quad E_2 \equiv L_2[0,1], \quad D(B) \equiv D(A_1) \equiv D(A_2) \equiv \overset{\circ}{H}{}^2[0,1],$$

$$B = B^* = \frac{d^2}{dx^2} + (n\pi)^2, \quad A_1 = A_1^* = a\frac{d^2}{dx^2}, \quad A_2 = A_2^* = d\frac{d^2}{dx^2}.$$

Оператор B фредгольмов, $\dim N(B) = \dim N(B^*) = 1$,

$$\varphi^{(1)} = \sin n\pi x, \quad \psi^{(1)} = -\frac{2}{d(n\pi)^2}\sin n\pi x, \quad p = 1,$$

$$\Gamma = \left(\frac{d^2}{dx^2} + (n\pi)^2 - 2d(n\pi)^2 \sin n\pi x \int_0^1 \sin n\pi y \cdot dy\right)^{-1}$$
$$= \frac{1}{n\pi}\int_0^x \sin n\pi(x-y)\cdot dy + b(x)\mathcal{B}\cdot + a(x)\mathcal{A}\cdot,$$

здесь

$$a(x) = \frac{\sin n\pi x}{n\pi}, \quad b(x) = \frac{1}{n\pi}\left(x\cos n\pi x - \frac{4+d}{2dn\pi}\sin n\pi x\right),$$

$$\mathcal{B}\cdot = \int_0^1 \sin n\pi y \cdot dy, \quad \mathcal{A}\cdot = \int_0^1 (y-1)\cos n\pi y \cdot dy,$$

далее получаем

$$A_2\Gamma = dI - dn\pi \int_0^x \sin n\pi(x-y)\cdot dy + db''(x)\mathcal{B}\cdot + da''(x)\mathcal{A}\cdot .$$

В соответствии с теоремой 1 восстанавливается фундаментальная оператор-функция

$$\mathcal{E}_2(t) = \left[\Gamma\frac{\sinh\sqrt{A_2\Gamma}t}{\sqrt{A_2\Gamma}} + \frac{2}{d(n\pi)^2}\sinh t \cdot \sin n\pi x \int_0^1 \sin n\pi y \cdot dy\right]\theta(t)$$
$$+ \frac{2}{d(n\pi)^2}\sin n\pi x \int_0^1 \sin n\pi y \cdot dy\,\delta(t).$$

Обобщенное решение второго уравнения системы имеет вид

$$w(t,x) = \Bigg[w_0(x)+tw_1(x)+\int\limits_0^t \Gamma\frac{\sinh\sqrt{A_2\Gamma}(t-\tau)}{\sqrt{A_2\Gamma}}\Big(dw_0''(x)+d\tau w_1''(x)+g(\tau,x)\Big)d\tau$$

$$+\,2\sin n\pi x\int\limits_0^1 \sinh(t-\tau)\int\limits_0^1 \sin n\pi y\Big(\frac{g(\tau,y)}{d(n\pi)^2}-w_0(y)-\tau w_1(y)\Big)dyd\tau$$

$$+\,2\sin n\pi x\int\limits_0^1 \sin n\pi y\Big(\frac{g(t,y)}{d(n\pi)^2}-w_0(y)-tw_1(y)\Big)dy\Bigg]\theta(t).$$

Построенное обобщенное решение второго уравнения рассматриваемой системы совпадает с классическим (непрерывным) если выполняются условия

$$\int\limits_0^1 \sin n\pi y\Big(\frac{g(0,y)}{d(n\pi)^2}-w_0(y)\Big)dy=0,$$

$$\int\limits_0^1 \sin n\pi y\Big(\frac{1}{d(n\pi)^2}\frac{\partial g(0,y)}{\partial t}-w_1(y)\Big)dy=0.$$

Соответственно обобщенным решением первого уравнения системы является функция

$$u(t,x) = (u_0(x)+tu_1(x))\theta(t)+\tilde{\mathcal{E}}_2(t) \overset{t}{*} \Big(au_0''(x)+atu_1''(x)+f(t,x)+c\frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2}\Big)\theta(t),$$

здесь представление для фундаментальной оператор-функции $\tilde{\mathcal{E}}_2(t)$ получается из формулы для $\mathcal{E}_2(t)$ простой заменой параметра d на a. С классическим (непрерывным) это решение совпадает, если

$$\int\limits_0^1 \sin n\pi y\Big(\frac{1}{a(n\pi)^2}f(0,y)-\frac{c}{a}w_0(y)-u_0(y)\Big)dy=0,$$

$$\int\limits_0^1 \sin n\pi y\Big(\frac{1}{a(n\pi)^2}\frac{\partial f(0,y)}{\partial t}-\frac{c}{a}w_1(y)-u_1(y)\Big)dy=0.$$

Гиперболический операторный синус $\frac{\sinh\sqrt{A_2\Gamma}t}{\sqrt{A_2\Gamma}}$ можно восстановить по формуле

$$\frac{\sinh\sqrt{A_2\Gamma}t}{\sqrt{A_2\Gamma}} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_R}(\mu^2 I - A_2\Gamma)^{-1}e^{-\mu t}d\mu,$$

здесь

$$(\mu^2 I - A_2\Gamma)^{-1} = \frac{1}{\mu^2-d}\Bigg[I+\frac{d\omega}{\mu^2}\int\limits_0^x \sinh\omega(x-y)\cdot dy$$

$$-\frac{d\omega}{\mu^2}\sinh\omega x\int\limits_0^1 \frac{\sinh(1-y)}{\sinh\omega}\cdot dy\Bigg]+\frac{2}{\mu^2-1}\sin n\pi x\int\limits_0^1 \sin n\pi y\cdot dy,$$

где

$$\omega = \frac{\mu n\pi}{\sqrt{d-\mu^2}},$$

C_R — окружность комплексной плоскости с центром в нуле и радиусом $R > \| A_2\Gamma \|$.

Пример 3. Рассмотрим линеаризованную задачу

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + bv\right) = av + f(t,x), \quad t \geq 0,\ 0 \leq x \leq 1,$$

$$v\Big|_{t=0} = \alpha(x), \quad \alpha(0) = \alpha(1) = 0,$$

$$v\Big|_{x=0} = v\Big|_{x=1} = 0,$$

возникающую в теории выпучивания металлических балок в условиях ползучести, здесь $\alpha(x)$ начальный прогиб балки, $f(t,x)$ внешняя нагрузка см. [13, 14].

Пусть

$$E_1 \equiv \overset{\circ}{L}{}^2\,[0,1], \quad E_2 \equiv L_2[0,1], \quad D(B) \equiv \overset{\circ}{H}{}^2\,[0,1], \quad D(A) \equiv E_1,$$

$$B = B^* = \frac{d^2}{dx^2} + b, \quad A = A^* = aI.$$

При $b = (n\pi)^2$ оператор B фредгольмов, как и выше

$$\varphi^{(1)} = \sin n\pi x, \quad \psi^{(1)} = \frac{2}{a}\sin n\pi x, \quad p = 1.$$

Восстанавливаем оператор Шмидта

$$\Gamma = \left(\frac{d^2}{dx^2} + (n\pi)^2 + 2a\sin n\pi x\int\limits_0^1 \sin n\pi y \cdot dy\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int\limits_0^x \sin n\pi(x-y)\cdot dy + b_1(x)\mathcal{B}\cdot + a(x)\mathcal{A}\cdot,$$

здесь

$$a(x) = \frac{\sin n\pi x}{n\pi}, \quad b_1(x) = \frac{1}{n\pi}\left(x\cos n\pi x - \frac{4(n\pi)^2 - a}{2an\pi}\sin n\pi x\right),$$

$$\mathcal{B}\cdot = \int\limits_0^1 \sin n\pi y \cdot dy, \quad \mathcal{A}\cdot = \int\limits_0^1 (y-1)\cos n\pi y \cdot dy,$$

соответственно

$$A\Gamma = \frac{a}{n\pi}\int\limits_0^x \sin n\pi(x-y)\cdot dy + a\,b_1(x)\mathcal{B}\cdot + a\,a(x)\mathcal{A}\cdot.$$

Отсюда согласно теореме 1 восстанавливаем фундаментальную оператор-функцию

$$\mathcal{E}(t) = \left[\Gamma e^{A\Gamma t} - 2e^t \sin n\pi x\int\limits_0^1 \sin n\pi y\cdot dy\right]\theta(t) - \frac{2}{a}\sin n\pi x\int\limits_0^1 \sin n\pi y \cdot dy\,\delta(t)$$

и обобщенное решение

$$\tilde{v}(t,x) = \alpha(x)\theta(t) + \mathcal{E}(t) \overset{t}{*} (a\,\alpha(x) + f(t,x))\theta(t),$$

которое не содержит сингулярной составляющей и совпадает с непрерывным (классическим) при удовлетворении начальному условию, т. е. если

$$\int_0^1 (a\,\alpha(x) + f(0,x)) \sin n\pi x dx = 0.$$

3. Фундаментальные оператор-функции и теория полугрупп операторов с ядрами

Пусть $E_1,\ E_2$ — банаховы пространства, $B \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ — необратим, A — замкнутый линейный из E_1 в E_2, B-*резольвентным множеством* [7, 8] оператора A называется множество $\rho^B(A) \equiv \{\mu \in C\ :\ (\mu B - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)\}$, при этом сам оператор A называется *спектрально ограниченным* относительно оператора B (или короче (B,σ)-ограниченным), если $\exists a > 0$ такое, что $\{\mu \in C\ :|\ \mu\ |> a\} \subset \rho^B(A)$, т. е. вне круга радиуса a оператор $(\mu B - A)$ непрерывно обратим. Пусть $\Gamma \equiv \{\mu \in C\ :|\ \mu\ |= r > a\}$, тогда пара операторов [7, 8]

$$P = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} (\mu B - A)^{-1} B d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} B(\mu B - A)^{-1} d\mu$$

являются проекторами в E_1 и E_2 соответственно, порождают разложения пространств E_1 и E_2 в прямые суммы $E_1 = E_1^0 \oplus E_1^1 = kerP \oplus imP$, $\quad E_2 = E_2^0 \oplus E_2^1 = kerQ \oplus imQ$. Действия операторов B и A расщепляются, причем $A_0\ :\ E_1^0 \to E_2^0$, $B_1\ :\ E_1^1 \to E_2^1$ непрерывно обратимы, $A_1\ :\ E_1^1 \to E_2^1$ ограничен, $QB = BP$, $QA = AP$ [7, 8].

В работе [9] доказана следующая

Теорема 2. *Если оператор A спектрально ограничен относительно B, то дифференциальный оператор $(B\delta^{(M)}(t) - A\delta(t))$ имеет на классе обобщенных функций с ограниченным слева носителем фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_M(t) = \mathcal{U}_M(t) B_1^{-1} Q\theta(t) - \sum_{q=0}^{\infty} (A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I - Q)\delta^{(qM)}(t),$$

здесь

$$\mathcal{U}_M(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} (\mu^M B - A)^{-1} B e^{\mu t} d\mu$$

[7, 8].

Если дополнительно предположить, что ∞ — несущественно особая точка [7, 8] $(\mu B - A)^{-1}$ (т.е. $\exists p \in \{0\} \cup N$ такое, что $(A_0^{-1}B_0)^p \neq 0$, но $(A_0^{-1}B_0)^{p+1} \equiv 0$), тогда

$$\mathcal{E}_M(t) = \mathcal{U}_M(t) B_1^{-1} Q\theta(t) - \sum_{q=0}^{p} (A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I - Q)\delta^{(q)}(t).$$

Пример 4. Уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u + f(x)$$

описывает процессы фильтрации жидкостей в средах с пустотами и трещинами [10], здесь $x \in \Omega \subset R^m$, Ω — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Рассмотрим для этого уравнения задачу Коши – Дирихле в цилиндре $\Omega \times R_+$

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \Omega$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} \equiv 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times R_+.$$

Данную задачу редуцируем к уравнениям в банаховых пространствах по схеме работ [7, 8], а именно, пусть

$$E_1 \equiv \overset{\circ}{H}{}^{k+2}(\Omega) \equiv \Big\{ y \in W_2^{k+2} : \; y(x) = 0, \, x \in \partial\Omega \Big\}, \quad E_2 \equiv W_2^k \equiv H^k$$

здесь $W_p^k \equiv W_p^k(\Omega)$ — пространство Соболева $1 < p < \infty$,

$$B = \lambda - \Delta, \quad A = \alpha\Delta, \quad \lambda \in \sigma(\Delta).$$

При таком выборе пространств E_1 и E_2, как показано в [7, 8], оператор A спектрально ограничен относительно B, причем ∞ — устранимая особая точка, т. е. $A_0^{-1}B_0 \equiv 0$ и в обозначениях теоремы 2 фундаментальная оператор-функция имеет вид

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{k=1}^{\infty\prime} \frac{1}{\lambda - \lambda_k} e^{\frac{\alpha\lambda_k}{\lambda - \lambda_k}t} (\cdot, \varphi_k)\varphi_k \theta(t) - \frac{1}{\alpha\lambda} \sum_{\lambda = \lambda_k} (\cdot, \varphi_k)\varphi_k \delta(t),$$

здесь $\{\varphi_k\}$ и $\{\lambda_k\}$ — множества ортонормированных собственных функций и соответствующих им собственных значений однородной задачи Дирихле

$$\Delta u = \lambda u, \quad u\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

в области Ω, занумерованные по убыванию собственных значений с учетом кратности. Штрих в знаке суммы означает отсутствие слагаемых, для которых $\lambda_k = \lambda$.

Тогда обобщенное решение восстанавливается по формуле

$$\tilde{u}(t,x) = \mathcal{E}(t) \overset{t}{*} \Big(Bu_0(x)\delta(t) + f(x)\theta(t) \Big)$$

$$= \left(-\frac{1}{\alpha\lambda} \sum_{\lambda=\lambda_k} (f, \varphi_k)\varphi_k + \sum_{k=1}^{\infty\prime} e^{\frac{\alpha\lambda_k}{\lambda - \lambda_k}t} (u_0, \varphi_k)\varphi_k + \sum_{k=1}^{\infty\prime} \frac{1}{\alpha\lambda_k} \left(e^{\frac{\alpha\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}t} - 1 \right) (f, \varphi_k)\varphi_k \right) \theta(t),$$

т. е. оно не содержит сингулярной составляющей. Условия, при которых оставшаяся регулярная составляющая решения удовлетворяет начальному условию и будут условиями разрешимости в классе непрерывных функций задачи Коши-Дирихле для уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной. Восстановим эти условия:

$$u_0(x) = \tilde{u}|_{t=0} = u_0 - \frac{1}{\alpha\lambda} \sum_{\lambda=\lambda_k} ((f, \varphi_k) + \alpha\lambda(u_0, \varphi_k))\varphi_k,$$

т. е. при выборе начальных условий $u_0(x)$ и $f(x)$ такими, чтобы

$$(f + \alpha\lambda u_0, \varphi_k) = 0 \quad \forall \varphi_k : \; \lambda = \lambda_k$$

рассматриваемая задача однозначно разрешима в классе непрерывных функций и искомое решение совпадет с $\tilde{u}(t,x)$.

Пример 5. Для уравнения, моделирующего (в одномерном случае) продольные колебания в тонком упругом стержне с учетом поперечной инерции [11],

$$(\lambda-\Delta)v_{tt}=\alpha^2\Delta v+f(x),\quad \lambda,\alpha\neq 0,$$

где $x\in\Omega\subset R^m$, Ω — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, рассмотрим задачу Коши-Дирихле в цилиндре $\Omega\times R_+$

$$v\Big|_{t=0}=v_0(x),\quad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}=v_1(x)\quad x\in\Omega$$

$$v\Big|_{\partial\Omega}\equiv 0\quad (x,t)\in\partial\Omega\times R_+.$$

Выберем пространства E_1 и E_2 так же, как и в предыдущем примере и положим

$$B=\lambda-\Delta,\quad A=\alpha^2\Delta,\quad \lambda\in\sigma(\Delta).$$

В этом случае оператор A спектрально ограничен относително B, т. е. $A_0^{-1}B_0\equiv 0$ и в обозначениях теоремы 2 искомая фундаментальная оператор-функция имеет вид (ниже $\{\varphi_k\}$ и $\{\lambda_k\}$ те же, что и в примере 3)

$$\mathcal{E}_2(t)=\frac{1}{\alpha}\Bigg[\sum_{\lambda_k<\lambda}\frac{1}{\lambda-\lambda_k}\sqrt{\frac{\lambda_k-\lambda}{\lambda_k}}\sin\Bigg(\alpha\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}}t\Bigg)(\cdot,\varphi_k)\varphi_k$$

$$+\sum_{\lambda_k>\lambda}\frac{1}{\lambda-\lambda_k}\sqrt{\frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda_k}}\sinh\Bigg(\alpha\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}}t\Bigg)(\cdot,\varphi_k)\varphi_k\Bigg]\theta(t)-\frac{1}{\alpha^2\lambda}\sum_{\lambda_k=\lambda}(\cdot,\varphi_k)\varphi_k\delta(t).$$

Теперь восстанавливаем обобщенное решение

$$\tilde{v}(t,x)=\mathcal{E}_2(t)\overset{t}{*}\Big[Bv_0(x)\delta'(t)+Bv_1(x)\delta(t)+f(x)\theta(t)\Big]=\Bigg[-\frac{1}{\alpha^2\lambda}\sum_{\lambda_k=\lambda}(f,\varphi_k)\varphi_k$$

$$+\sum_{\lambda_k<\lambda}\cos\Bigg(\alpha\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}}t\Bigg)(v_0,\varphi_k)\varphi_k+\sum_{\lambda_k>\lambda}\cosh\Bigg(\alpha\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}}t\Bigg)(v_0,\varphi_k)\varphi_k$$

$$+\frac{1}{\alpha}\Bigg(\sum_{\lambda_k<\lambda}\sqrt{\frac{\lambda_k-\lambda}{\lambda_k}}\sin\Bigg(\alpha\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}}t\Bigg)(v_1,\varphi_k)\varphi_k$$

$$+\sum_{\lambda_k>\lambda}\sqrt{\frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda_k}}\sinh\Bigg(\alpha\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}}t\Bigg)(v_1,\varphi_k)\varphi_k\Bigg)$$

$$+\frac{1}{\alpha^2}\Bigg(\sum_{\lambda_k<\lambda}\frac{1}{\lambda_k}\Bigg\{\cos\Bigg(\alpha\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_k-\lambda}}t\Bigg)-1\Bigg\}(f,\varphi_k)\varphi_k$$

$$+\sum_{\lambda_k>\lambda}\frac{1}{\lambda_k}\Bigg\{\cosh\Bigg(\alpha\sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda-\lambda_k}}t\Bigg)-1\Bigg\}(f,\varphi_k)\varphi_k\Bigg)\Bigg]\theta(t).$$

Построенное обобщенное решение не содержит сингулярной составляющей и совпадает с классическим (непрерывным) если $\tilde{v}(t,x)$ будет удовлетворять начальным условиям:

$$\tilde{v}(0,x)=v_0-\frac{1}{\alpha^2\lambda}\sum_{\lambda_k=\lambda}(f+\alpha^2\lambda v_0,\varphi_k)\varphi_k=v_0,$$

при

$$(f+\alpha^2\lambda v_0,\varphi_k)=0 \quad \forall\varphi_k: \;\; \lambda=\lambda_k;$$

$$\tilde{v}'(0,x)=\sum_{k=1}^{\infty\prime}(v_1,\varphi_k)\varphi_k=v_1-\sum_{\lambda_k=\lambda}(v_1,\varphi_k)\varphi_k=v_1,$$

при

$$(v_1,\varphi_k)=0 \quad \forall\varphi_k: \;\; \lambda=\lambda_k.$$

Таким образом, построенное обобщенное решение $\tilde{v}(t,x)$ является классическим (непрерывным), если выполнены условия:

$$(f+\alpha^2\lambda v_0,\varphi_k)=0, \quad (v_1,\varphi_k)=0\,\forall\varphi_k: \;\; \lambda=\lambda_k.$$

4. Интегро-дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при производной

Пусть выполнено условие

(C) $B,A,k(t)$ — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, $\overline{D(A)\bigcap D(k)}=\overline{D(B)}=E_1, D(k)$ — не зависит от $t, D(B)\subset D(A)\bigcap D(k), \overline{R(B)}=R(B), k(t)$ — сильно непрерывна на $D(k),\ k(t)\in C^\infty(t\geq 0),\ B$ — фредгольмов.

Введем обозначения

$$g(t)=\int_0^t k(t-s)\Gamma e^{A\Gamma s}ds,$$

$\mathcal{R}_1(t)$ — резольвента ядра $g(t)$,

$$\mathcal{M}(t)=\mathcal{R}_1(t)+A\Gamma e^{A\Gamma t}+\int_0^t A\Gamma e^{A\Gamma(t-s)}\mathcal{R}_1(s)ds,$$

$$\mathcal{K}(t)=A+\int_0^t k(s)ds.$$

Теорема 3 (см. [2]). *Если операторы $B,A,k(t)$ удовлетворяют условию* (C), *оператор B имеет полный обобщенный жорданов набор относительно оператор-функции $\mathcal{K}(t)$, то интегро-дифференциальный оператор $(B\delta'(t)-A\delta(t)-k(t)\theta(t))$ имеет на классе обобщенных функций с ограниченным слева носителем фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}(t)=\Gamma e^{A\Gamma t}\theta(t)*\Big(I\delta(t)+\mathcal{R}_1(t)\theta(t)\Big)*\Big(I\delta(t)+\mathcal{N}_1(t)\theta(t)\Big)$$
$$*\left\{(I-\mathcal{Q})\delta(t)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\phi_i^{(j)}\rangle z_i\delta^{(p_i+1-j)}(t)\right\},$$

где $\mathcal{N}_1(t)$ — резольвента ядра

$$\sum_{i=1}^{n}(-\mathcal{Q}_i\mathcal{M}^{(p_i)}(t))\theta(t),$$

здесь $\{\phi_i^{(j)}\}$ полный обобщенный жорданов набор оператора B^* относительно

$$\mathcal{K}^*(t)=A^*+\int_0^t k^*(s)ds,$$

$\{z_i\}$ — *биортогональная система элементов к* $\{\psi_i\} \in N(B^*)$, $\mathcal{Q}_i = \langle \bullet, \phi_i \rangle z_i$, $i = \overline{1,n}$ *и* $\mathcal{Q} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{Q}_i$ *проекторы.*

Пример 6. Рассмотрим начально-краевую задачу теории вискоэластики для интегро-дифференциального уравнения вида

$$(\gamma u_t - \Delta u_t) - \Delta u - \int_0^t g(t-\tau)\Delta u d\tau = f(t,\bar{x}), \quad t > 0,\ \bar{x} \in \Omega,$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$u\Big|_{t=0} = u_0(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Omega.$$

Пусть

$$\gamma \in \sigma(\Delta), \quad E_1 \equiv \overset{\circ}{L}{}^2(\Omega), \quad E_2 \equiv L_2(\Omega),$$

$$B = B^* = \gamma - \Delta, \quad A = A^* = \Delta, \quad k(t) = k^*(t) = g(t)\Delta,$$

$$D(B) = D(A) = D(k) = \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega).$$

Как в предыдущих примерах, пусть $\varphi_i(\bar{x})$, $i = 1,\dots,n$ — базис пространства нулей однородной задачи

$$B\varphi \equiv \gamma\varphi - \Delta\varphi = 0, \quad \varphi\Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

тогда оператор B имеет полный обобщенный жорданов набор относительно оператор-функции

$$K(t) = A + \int_0^t k(\tau)d\tau, \quad \text{где } A = \Delta,\ k(t) = g(t)\Delta,$$

причем длины всех цепочек равны 1, поэтому в обозначениях теоремы 3 интегро-дифференциальный оператор $((\gamma - \Delta)\delta'(t) - \Delta\delta(t) - g(t)\Delta\theta(t))$ имеет фундаментальную оператор-функцию вида

$$\mathcal{E}(t) = \Gamma e^{A\Gamma t}\theta(t) * \Big(I\delta(t) + \mathcal{R}_1(t)\theta(t)\Big) \\ * \Big(I\delta(t) + \mathcal{N}_1(t)\theta(t)\Big) * \Big\{(I - Q)\delta(t) - Q\delta'(t)\Big\},$$

с помощью которой выписывается обобщенное решение

$$\tilde{u}(t,\bar{x}) = \mathcal{E}(t) * \Big(Bu_0\delta(t) + f(t)\theta(t)\Big) \\ = \Gamma e^{A\Gamma t}\theta(t) * \Big(I\delta(t) + \mathcal{R}_1(t)\theta(t)\Big) * \Big(I\delta(t) + \mathcal{N}_1(t)\theta(t)\Big) \\ * \Big[(Bu_0 - Qf(0))\delta(t) + (f(t) - Q(f(t) + f'(t)))\theta(t)\Big].$$

Это решение, как показывает простой анализ выписанной формулы, не содержит сингулярной составляющей и совпадает с непрерывным (классическим) решением, если выполнены условия

$$\Gamma Q(Au_0 + f(0)) = 0$$

или

$$\langle \gamma u_0(\bar{x}) + f(0,\bar{x}), \varphi_i(\bar{x})\rangle = \int\limits_{\Omega} (\gamma u_0(\bar{x}) + f(0,\bar{x}))\varphi_i(\bar{x})d\bar{x} = 0$$

при $i = 1, \dots, n$.

По такой же схеме можно исследовать на разрешимость более сложные задачи вида

$$(\gamma u_{tt} - \Delta u_{tt}) - \beta\Delta u_t - \Delta u + \int\limits_0^t g(t-\tau)\Delta u d\tau = f(t,\bar{x}), \quad t > 0,\ \bar{x} \in \Omega,$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$u\Big|_{t=0} = u_0(\bar{x}), \quad u_t\Big|_{t=0} = u_1(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Omega.$$

встречающиеся при изучении [12] вискоэластичных процессов. Частным случаем таких задач является уравнение

$$(\gamma u_{tt} - \Delta u_{tt}) + \Delta^2 u - \int\limits_0^t g(t-\tau)\Delta^2 u d\tau = 0, \quad t > 0,\ \bar{x} \in \Omega,$$

описывающее колебательные процессы вискоэластичной пластины с памятью см. [12] и библиографию там же.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
2. *Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A. and Falaleev M.* Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.
3. *Фалалеев М. В.* Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1167–1182.
4. *Фалалеев М. В., Гражданцева Е. Ю.* Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных и дифференциально-разностных операторов с нетеровым оператором в главной части в банаховых пространствах // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 6. С. 1393–1406.
5. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
6. *Chen G., Zhang H.* Initial boundary value problem for a system of generalized IMBq equations // Math. Meth. Appl. Sci. 2004. V. 27. P. 497–518.
7. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.
8. *Свиридюк Г. А.* К общей теории полугрупп операторов // Усп. мат. наук. 1994. Т. 49, № 4. С. 47–74.
9. *Фалалеев М. В., Гражданцева Е. Ю.* Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в условиях спектральной ограниченности // Диффер. уравн. 2006. Т. 42, № 6. С. 769–774.
10. *Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации в трещинноватых средах // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, № 5. С. 58–73.
11. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
12. *Cavalcanti M. M., Cavalcanti V., Domingos N., Ferreira J.* Existence and uniform decay for a non-linear viscoelastic equation with strong damping // Math. Meth. Appl. Sci. 2001. V. 24. P. 1043–1053.

13. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Мир, 1967.

14. *Odgvist F. H., Hult T.* Kriechfestigkeit metallisther werkstoffe. Berlin: Springer-Verlag, Gottingen-Heidelberg, Abschn. 4, 1962.

Фалалеев Михаил Валентинович
Россия, Иркутск, Иркутский государственный университет
mihail@ic.isu.ru