Неклассические уравнения
математической физики
2007. С. 298–306

УДК 517.958

СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ С ДВУМЯ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЗАХАРОВА – КУЗНЕЦОВА

А. В. Фаминский, Е. С. Байкова

В работе устанавливается теорема о существовании глобального по времени слабого решения смешанной задачи с двумя краевыми условиями для обобщенного уравнения Захарова – Кузнецова.

В работе рассматриваются вопросы нелокальной разрешимости смешанной задачи для обобщенного уравнения Захарова – Кузнецова

$$u_t - u_{xxx} - u_{xyy} + (g(u))_x = f(t,x,y) \tag{1}$$

в области $\Pi_T^+ = (0,T) \times \mathbb{R}_+^2$, где $T > 0$ — произвольно, $\mathbb{R}_+^2 = \{(x,y) : x > 0\}$, с начальным условием

$$u\big|_{t=0} = u_0(x,y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, \tag{2}$$

и двумя краевыми условиями

$$u\big|_{x=0} = u_1(t,y), \qquad (t,y) \in S_T = (0,T) \times \mathbb{R}, \tag{3}$$

$$u_x\big|_{x=0} = u_2(t,y), \qquad (t,y) \in S_T. \tag{4}$$

Предполагается, что функция g имеет не более чем квадратичный порядок роста по $u \to \pm\infty$. Случаю самого уравнения Захарова – Кузнецова соответствует $g(u) \equiv \pm u^2/2$.

Альтернативной формой записи обобщенного уравнения Захарова – Кузнецова является уравнение

$$u_t + u_{xxx} + u_{xyy} + (g(u))_x = f. \tag{5}$$

Очевидно, что замена $x \to -x$ (а также $g \to -g$) переводит уравнение (1) в уравнение (5), а область Π_T^+ в область $\Pi_T^- = (0,T) \times \mathbb{R}_-^2$ ($\mathbb{R}_-^2 = \{(x,y) : x < 0\}$).

Уравнение Захарова – Кузнецова является одним из вариантов многомерного обобщения знаменитого уравнения Кортевега – де Фриза

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = f$$

и описывает распространение нелинейных волн в двумерной среде с дисперсией (см. [1]). Волны движутся в направлении оси $0x$ и испытывают деформации в поперечном направлении.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06–01–00253)

Постановка смешанной задачи для уравнения (5) в области Π_T^+ требует только одного краевого условия, например, (3). Различие в постановках задач для уравнений (1) и (5) обусловлено различными свойствами линейных операторов $\partial_t \pm (\partial_x^3 + \partial_x\partial_y^2)$. Впервые вопросы корректности смешанных задач для линейных аналогов уравнений (1) и (5) (и даже более общих многомерных эволюционных линейных уравнений нечетного порядка) были исследованы в работах [2, 3].

Нелокальная разрешимость и корректность задачи Коши для уравнения Захарова – Кузнецова в различных функциональных пространствах ранее была изучена в [4–6] (в первых 2–х статьях рассматривались более общие многомерные эволюционные квазилинейные уравнения нечетного порядка). Аналогичные результаты для смешанной задачи в области Π_T^+ с одним краевым условием (3) для уравнения (5) были получены в [7, 8]. Задача же (1)–(4) ранее не изучалась.

В настоящей работе установлено существование слабых нелокальных решений задачи (1)–(4). Этот результат аналогичен полученному ранее результату для смешанной задачи с двумя краевыми условиями для обобщенного уравнения Кортевега – де Фриза, полученному в [9]. Методика исследования настоящей работы также частично аналогична работе [9]. Полученные результаты являются новыми и для самого уравнения Захарова – Кузнецова.

Положим $L_p = L_p(\mathbb{R}^2)$, $H^k = H^k(\mathbb{R}^2) = W_2^k(\mathbb{R}^2)$, $L_{p,+} = L_p(\mathbb{R}^2_+)$, $H^k_+ = H^k(\mathbb{R}^2_+)$.

Для описания свойств граничной функции u_1 будем использовать анизотропные пространства Соболева дробного порядка

$$H^{s_1,s_2} = H^{s_1,s_2}_{t,y}(\mathbb{R}^2) = \bigl\{\mu(t,y) : (1+|\lambda|^{s_1}+|\eta|^{s_2})\widehat{\mu}(\lambda,\eta) \in L_2\bigr\},$$

где символом $\widehat{\mu} = \mathcal{F}[\mu]$ обозначено преобразование Фурье функции μ:

$$\widehat{\mu}(\lambda,\eta) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\lambda t+\eta y)}\mu(t,y)\,dtdy, \qquad \mu \in L_1;$$

символ $\mathcal{F}^{-1}[\mu]$ используется для обратного преобразования Фурье.

Для области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ через $H^{s_1,s_2}(\Omega)$ обозначим пространство сужений на Ω функций из H^{s_1,s_2} с естественной нормой.

Символом $C_{b,+} = C_b(\overline{\mathbb{R}}^2_+)$ обозначим пространство непрерывных ограниченных в $\overline{\mathbb{R}}^2_+$ функций.

Если $\mathcal{X}$ — банахово пространство, I — некоторый интервал вещественной оси, то символ $L_p(I;\mathcal{X})$ используется в общепринятом смысле для обозначения измеримых по Бохнеру суммируемых со степенью p (существенно ограниченных при $p = +\infty$) отображений I в $\mathcal{X}$. Через $C_b(\overline{I};\mathcal{X})$ будем обозначать пространство непрерывных ограниченных отображений $\overline{I}$ в $\mathcal{X}$ (если I — ограниченный интервал, то символ “b” будем опускать). Символом $C_w(\overline{I};\mathcal{X})$ обозначим пространство слабо непрерывных отображений $\overline{I}$ в $\mathcal{X}$. Заметим, что если I ограничен, то $C_w(\overline{I};\mathcal{X}) \subset L_\infty(I;\mathcal{X})$ (см. [10]). Положим для отображений I в $\mathcal{X}$

$$W_p^k(I;\mathcal{X}) = \{f : f^{(j)} \in L_p(I;\mathcal{X}), \quad j = 0,\dots,k\}.$$

Положим

$$\lambda^+(f;T) = \sup_{m\ge 0}\int_0^T\int_m^{m+1}\int_{\mathbb{R}} f^2(t,x,y)\,dydxdt.$$

Через $\sigma(x)$ обозначим некоторую функцию из $C^\infty(\mathbb{R})$ такую, что $\sigma(x) = 0$ при $x \le 0$, $\sigma(x) = 1$ при $x \ge 1$, $\sigma'(x) > 0$ при $x \in (0,1)$, $\sigma(x) + \sigma(1-x) \equiv 1$.

Символом f^h будем обозначать среднюю функцию для функции f с параметром усреднения h.

Дадим определение слабого (обобщенного) решения рассматриваемой задачи.

Определение 1. Функция $u(t,x,y) \in L_\infty(0,T;L_{2,+})$ называется *слабым решением задачи* (1)–(4), если для любой функции $\phi(t,x,y)$ такой, что

$$\phi \in L_2(0,T;H^3_+), \quad \phi_t \in L_2(0,T;L_{2,+}), \quad \phi\big|_{t=T}=0, \quad \phi\big|_{x=0}=0,$$

справедливо равенство

$$\iiint_{\Pi_T^+} \big[u(\phi_t-\phi_{xxx}-\phi_{xyy})+g(u)\phi_x+f\phi\big]\,dtdxdy \\ +\iint_{\mathbb{R}^2_+} u_0\phi\big|_{t=0}dxdy+\iint_{S_T}\big(u_2\phi_x\big|_{x=0}-u_1\phi_{xx}\big|_{x=0}\big)\,dtdy=0. \quad (6)$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть $u_0 \in L_{2,+}$, $u_1 \in H^{s/3,s}(S_T)$ для некоторого $s>3/2$, $u_2 \in L_2(S_T)$, $f \in L_1(0,T;L_{2,+})$. Предположим также, что функция $g \in C^1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию:*

$$\exists c_0>0 \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad |g'(u)| \le c_0(|u|+1), \qquad g(0)=0.$$

Тогда существует слабое решение задачи (1)–(4) $u(t,x,y)$ такое, что

$$u \in C_w([0,T];L_{2,+}), \qquad \lambda^+(u_x;T)+\lambda^+(u_y;T)<\infty.$$

В основе нелокальной теории разрешимости задачи Коши для уравнения Захарова – Кузнецова лежит закон сохранения в пространстве L_2. Если $u(t,x,y)$ — достаточно гладкое и убывающее вместе с производными на бесконечности решение уравнения (1) (или (5)) при $f\equiv 0$, то

$$\iint_{\mathbb{R}^2} u^2\,dxdy = \text{const}.$$

Аналогично в случае рассматриваемой смешанной задачи, если умножить уравнение (1) на $2u(t,x,y)$ и проинтегрировать по $\mathbb{R}^2_+$, то нетрудно получить равенство

$$\frac{d}{dt}\iint_{\mathbb{R}^2_+} u^2\,dxdy+\int_{\mathbb{R}}\Big(2u_1u_{xx}\big|_{x=0}-u_2^2-u_{1y}^2-\int_0^{u_1} g'(\vartheta)\vartheta\,d\vartheta\Big)\,dy=2\iint_{\mathbb{R}^2_+} fu\,dxdy. \quad (7)$$

Ясно, что при $u_1\equiv 0$ из равенства (7) легко следует априорная оценка решения в $L_{2,+}$. В случае же неоднородного краевого условия (3) получению подобной оценки препятствует наличие члена $u_1u_{xx}|_{x=0}$. Тогда естественно перейти к новой функции $U(t,x,y)\equiv u(t,x,y)-\psi(t,x,y)$, где вспомогательную функцию ψ выбрать так, чтобы $\psi|_{x=0}=u_1$. Функция U удовлетворяет однородному краевому условию (3), но при этом более сложному уравнению с переменными коэффициентами, зависящими от ψ. Разумеется, подобный подход предполагает, что свойства функции u_1 должны обеспечить возможность ее продолжения в область Π_T^+ так, чтобы из соответствующего аналога равенства (7) можно было получить оценку решения u в пространстве $L_{2,+}$.

В настоящей работе для построения функции ψ используется специальное решение линеаризованного уравнения Захарова – Кузнецова

$$v_t-v_{xxx}-v_{xyy}=0 \quad (8)$$

типа “граничного потенциала”. Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$r^3 - r\eta^2 - i\lambda = 0, \qquad (\lambda,\eta)\in\mathbb{R}^2. \tag{9}$$

Тогда при $(\lambda,\eta)\neq(0,0)$ существует единственный корень $r_0(\lambda,\eta)$ такой, что $\Re r_0 < 0$. Положим для функции $\mu\in L_2$ при $x\geq 0$

$$J(t,x,y;\mu) = \mathcal{F}^{-1}_{t,y}\big[e^{r_0(\lambda,\eta)x}\widehat{\mu}(\lambda,\eta)\big](t,y). \tag{10}$$

Лемма 1. 1) *Для произвольной функции $\mu\in L_2$ функция J бесконечно дифференцируема и удовлетворяет уравнению* (8) *при $x>0$, $(t,y)\in\mathbb{R}^2$;*

2) *если $\mu\in H^{(s+1)/3,s+1}$ для некоторого $s\geq 0$, то*

$$\|J\|_{C_b(\mathbb{R}^t;H^s_+)} + \sum_{k=0}^{[s+1]} \|\partial_x^k J\|_{C_b(\overline{\mathbb{R}}^x_+;H^{(s-k+1)/3,s-k+1})} \leq c(s)\|\mu\|_{H^{(s+1)/3,s+1}}, \tag{11}$$

причем $J(\cdot,0+0,\cdot)\equiv\mu$;

3) *если $\mu\in H^{(2s+1)/6,s+1/2}$ для некоторого $s\geq 0$, то*

$$\|J_x\|_{L_2(\mathbb{R}^t;H^s_+)} \leq c(s)\|\mu\|_{H^{(2s+1)/6,s+1/2}}, \tag{12}$$

в частности, при $s>3/2$

$$\|J_x\|_{L_2(\mathbb{R}^t;C_{b,+})} \leq c(s)\|\mu\|_{H^{s/3,s}}. \tag{13}$$

Доказательство. Для корня $r_0(\lambda,\eta)$ уравнения (9), очевидно, справедливы свойства

$$\Re r_0 \leq -\widetilde{c}\left(|\lambda|^{1/3}+|\eta|\right), \qquad |r_0|\leq \widetilde{c}_1\left(|\lambda|^{1/3}+|\eta|\right) \tag{14}$$

для некоторых констант $\widetilde{c}>0$ и $\widetilde{c}_1>0$, откуда вытекает свойство 1).

Далее, воспользуемся следующим неравенством, установленным в [11]: если некоторая непрерывная функция $\gamma(\vartheta)$ удовлетворяет неравенству $\Re\gamma(\vartheta)\leq -\varepsilon|\vartheta|$ для некоторого $\varepsilon>0$ и любых $\vartheta\in\mathbb{R}$, то

$$\Big\|\int_{\mathbb{R}} e^{\gamma(\vartheta)x} f(\vartheta)\,d\vartheta\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^x_+)} \leq c(\varepsilon)\|f\|_{L_2}.$$

Поэтому, сделав замену $\lambda=\vartheta^3$ выводим, используя свойства (14), что равномерно по $t\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\|\partial_x^k\partial_y^m J\|_{L^{x,y}_{2,+}} &\leq c\|\eta^m r_0^k(\vartheta^3,\eta)\vartheta^2\widehat{\mu}(\vartheta^3,\eta)\|_{L_2^{\vartheta,\eta}} \\ &\leq c_1\big\|\eta^m(|\lambda|^{k/3}+|\eta|^k)\lambda^{1/3}\widehat{\mu}(\lambda,\eta)\big\|_{L_2^{\lambda,\eta}} \leq c_2\|\mu\|_{H^{(k+m+1)/3,k+m+1}},\end{aligned}$$

откуда, применяя интерполяцию, получаем требуемую оценку для первого слагаемого из левой части (11).

Кроме того непосредственно в силу определения пространств H^{s_1,s_2} и свойств (14) находим, что равномерно по $x\geq 0$ при $k\leq s+1$

$$\begin{aligned}\|\partial_x^k J(\cdot,x,\cdot;\mu)\|_{H^{(s-k+1)/3,s-k+1}} &\leq \big\|(1+|\lambda|^{1/3}+|\eta|)^{s-k+1} r_0^k(\lambda,\eta)\widehat{\mu}(\lambda,\eta)\big\|_{L_2^{\lambda,\eta}} \\ &\leq c\|\mu\|_{H^{(s+1)/3,s+1}}.\end{aligned}$$

Оценка (12) следует из неравенства

$$\|\partial_x^{k+1}\partial_y^m J\|_{L_2(\mathbb{R}^t\times\mathbb{R}^2_+)} \leq c\big\|\eta^m|r_0(\lambda,\eta)|^{k+1/2}\widehat{\mu}(\lambda,\eta)\big\|_{L_2} \leq c_1\|\mu\|_{H^{(k+m)/3+1/6,k+m+1/2}}$$

и интерполяции, а оценка (13) вытекает из (12) в силу известной теоремы вложения. Лемма доказана.

Замечание 1. Положим

$$\widetilde{\mu}(t,y) \equiv \mu(-t,y), \qquad \widetilde{J}(t,x,y;\mu) \equiv J(-t,x,y;\widetilde{\mu}). \tag{15}$$

Тогда нетрудно видеть, что функция $\widetilde{J}$ при $x>0$ удовлетворяет уравнению

$$v_t + v_{xxx} + v_{xyy} = 0 \tag{16}$$

и $\widetilde{J}(\cdot,0+0,\cdot) \equiv \mu$, то есть функцию $\widetilde{J}$ можно назвать "граничным потенциалом" для уравнения (16). Эта функция была введена и исследована в статьях [7, 8]. Свойства функции J, установленные в лемме 1, аналогичны свойствам функции $\widetilde{J}$, установленным в этих работах. При этом для функции $\widetilde{J}$ изначально было получено другое представление, а именно,

$$\widetilde{J}(t,x,y;\mu) \equiv \int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}} (3\partial_x^2 + \partial_y^2) G(t-\tau,x,y-z)\mu(\tau,z)\,dzd\tau,$$

где

$$G(t,x,y) \equiv \mathcal{F}^{-1}_{x,y}\big[e^{it(\xi^3+\xi\eta^2)}\big](x,y).$$

Тогда в силу равенства (15) получаем следующее представление для функции J:

$$J(t,x,y;\mu) \equiv \int_{t}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} (3\partial_x^2 + \partial_y^2) G(\tau-t,x,y-z)\mu(\tau,z)\,dzd\tau.$$

Прежде чем рассматривать задачу (1)–(4), изучим в Π_T^+ следующую регуляризованную задачу:

$$U_t - U_{xxx} - U_{xyy} - 3\delta U_{xx} - \delta U_{yy} + \big(g(U+\psi(t,x,y))\big)_x = F(t,x,y), \tag{17}$$

$$U\big|_{t=0} = U_0(x,y), \quad U\big|_{x=0} = 0, \quad U_x\big|_{x=0} = U_2(t,y), \tag{18}$$

где $\delta \ge 0$. Слабое решение этой задачи понимается аналогично Определению 1.

Лемма 2. *Пусть $\delta > 0$, $U_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2_+)$, $U_2 \in W_2^1(0,T;L_2(\mathbb{R}))$, $U_2(0,y) \equiv 0$, $\psi \in W_2^1(0,T;H^1_+)$, $F \in W_2^1(0,T;L_{2,+})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$, $g(0) = 0$ и $|g'(u)| \le c$ для некоторой константы $c > 0$ и любого $u \in \mathbb{R}$. Тогда существует слабое решение $U(t,x,y)$ задачи (17), (18) из пространства $W^1_\infty(0,T;L_{2,+}) \cap W_2^1(0,T;H^1_+)$.*

Доказательство. Решение рассматриваемой задачи будем строить методом Галеркина. Пусть $\{\varphi_j(x,y), j = 1,2,\dots\}$ — линейно независимая полная система функций в пространстве $\{\varphi \in H^3_+ : \varphi|_{x=0} = 0\}$, причем если $U_0 \not\equiv 0$, то $\varphi_1 \equiv U_0$. Приближенное решение v_m задачи (17), (18) будем искать в виде линейной комбинации

$$v_m(t,x,y) = \sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t)\varphi_j(x,y),$$

исходя из условий

$$\iint_{\mathbb{R}^2_+} \Big[v_{mt}\varphi_l + v_m(\varphi_{lxxx} + \varphi_{lxyy} - 3\delta v_m\varphi_{lxx} - \delta v_m\varphi_{lyy}) - g(v_m+\psi)\varphi_{lx} - F\varphi_l\Big]\,dxdy$$
$$- \int_{\mathbb{R}} U_2\varphi_{lx}\big|_{x=0}\,dy = 0 \tag{19}$$

для $t \in [0,T]$, $l = 1,2,\dots,m$;

$$v_m(0,x,y) = U_0(x,y). \tag{20}$$

Очевидно, что локально по времени такие функции v_m существуют. Докажем для них оценки, равномерные по m. Умножив (19) на $2c_{ml}(t)$ и просуммировав по l, получим, что

$$\frac{d}{dt}\iint_{\mathbb{R}^2_+} v_m^2\,dxdy + \int_{\mathbb{R}} v_{mx}^2\big|_{x=0}\,dy + 2\delta\iint_{\mathbb{R}^2_+}(3v_{mx}^2 + v_{my}^2)\,dxdy$$
$$- 2\iint_{\mathbb{R}^2_+} g(v_m+\psi)v_{mx}\,dxdy = 2\iint_{\mathbb{R}^2_+} Fv_m\,dxdy + 2\int_{\mathbb{R}} U_2 v_{mx}\big|_{x=0}\,dy, \tag{21}$$

откуда, поскольку функция g имеет не более чем линейный рост, выводим, что равномерно по m

$$\|v_m\|_{L_\infty(0,T;L_{2,+})} + \|v_m\|_{L_2(0,T;H^1_+)} \le c. \tag{22}$$

Заметим, что из неравенства (22) вытекает существование функций v_m на всем отрезке времени $[0,T]$.

Далее, положив в (19) $t=0$, умножив его на $c'_{ml}(0)$ и просуммировав по l, находим с учетом условия (20), что

$$\iint_{\mathbb{R}^2_+} v_{mt}^2\big|_{t=0}\,dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2_+}\Big[F\big|_{t=0} + U_{0xxx} + U_{0xyy} + 3\delta U_{0xx} + \delta U_{0yy}$$
$$- g'\big(U_0 + \psi\big|_{t=0}\big)\big(U_{0x} + \psi_x\big|_{t=0}\big)\Big] v_{mt}\big|_{t=0}\,dxdy,$$

откуда следует, что

$$\|v_{mt}\big|_{t=0}\|_{L_{2,+}} \le c. \tag{23}$$

Наконец, продифференцировав равенство (19) по t, умножив на $2c'_{ml}(t)$ и просуммировав по l, получим аналогично (21), что

$$\frac{d}{dt}\iint_{\mathbb{R}^2_+} v_{mt}^2\,dxdy + \int_{\mathbb{R}} v_{mtx}^2\big|_{x=0}\,dy + 2\delta\iint_{\mathbb{R}^2_+}(3v_{mtx}^2 + v_{mty}^2)\,dxdy$$
$$- 2\iint_{\mathbb{R}^2_+} g'(v_m+\psi)(v_{mt}+\psi_t)v_{mtx}\,dxdy = 2\iint_{\mathbb{R}^2_+} F_t v_{mt}\,dx + 2\int_{\mathbb{R}} U_{2t} v_{mtx}\big|_{x=0}\,dy,$$

откуда с учетом (23) аналогично (22) выводим, что

$$\|v_{mt}\|_{L_\infty(0,T;L_{2,+})} + \|v_{mt}\|_{L_2(0,T;H^1_+)} \le c. \tag{24}$$

Оценки (22) и (24) позволяют построить искомое решение задачи (17), (18) предельным переходом по $m \to +\infty$ (более подробно полностью аналогичные рассуждения проведены в [9]). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь линейный вариант задачи (17), (18).

Лемма 3. *Пусть* $\delta > 0$, $U_0 \in L_{2,+}$, $U_2 \in L_2(S_T)$, $F \in L_1(0,T;L_{2,+})$, $g \equiv 0$. *Тогда существует единственное слабое решение* $U(t,x,y)$ *задачи* (17), (18) *из пространства* $C([0,T];L_{2,+}) \cap L_2(0,T;H^1_+)$ *и для любой функции* $\rho(x) \in C^3(\overline{\mathbb{R}}_+)$ *такой, что* $|\rho^{(j)}(x)| \le c \quad \forall x \ge 0, j = 0,\dots,3$, *и любого* $t \in [0,T]$

$$\iint_{\mathbb{R}^2_+} U^2(t,x,y)\rho(x)\,dxdy - \iint_{\mathbb{R}^2_+} U_0^2\rho\,dxdy - \int_0^t\iint_{\mathbb{R}^2_+}(3U_x^2 + U_y^2)\rho'\,dxdyd\tau$$

$$+\int_0^t\iint_{\mathbb{R}^2_+} U^2\rho'''\,dxdyd\tau-\rho(0)\int_0^t\int_{\mathbb{R}} U_2^2\,dyd\tau+2\delta\int_0^t\iint_{\mathbb{R}^2_+}(3U_x^2+U_y^2)\rho\,dxdyd\tau$$
$$-3\delta\int_0^t\iint_{\mathbb{R}^2_+} U^2\rho'\,dxdyd\tau=2\int_0^t\iint_{\mathbb{R}^2_+} FU\rho\,dxdyd\tau. \quad (25)$$

Доказательство. Единственность решения задачи (17), (18) при $g\equiv 0$ в пространстве $L_\infty(0,T;L_{2,+})$ вытекает по принципу Хольмгрена из разрешимости в пространстве $L_2(0,T;H^3_+)\cap W^1_2(0,T;L_{2,+})$ сопряженной задачи, а именно, смешанной задачи в Π_T^+ для уравнения

$$v_t+v_{xxx}+v_{xyy}=f(t,x,y)\in C_0^\infty(\Pi_T^+)$$

с нулевыми граничными условиями

$$v\big|_{t=0}=0,\qquad v\big|_{x=0}=0,$$

которая установлена в [1].

Существование решения задачи (17), (18) при $g\equiv 0$ в пространстве $L_2(0,T;H^3_+)\cap W^1_2(0,T;L_{2,+})$ при гладких входных данных, например, при $U_0\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2_+)$, $U_2\in C_0^\infty(S_T)$, $F\in C_0^\infty(\Pi_T^+)$, также следует из результатов [1]. Равенство (25) для подобных решений доказывается умножением (17) на $2U(t,x,y)\rho(x)$ и последующим интегрированием. Тогда искомое слабое решение получается замыканием на основе соответствующей равномерной оценки гладких решений в пространстве $C([0,T];L_{2,+})\cap L_2(0,T;H^1_+)$, которая, очевидно, следует из (25) при $\rho\equiv 1$. Лемма доказана.

Установим теперь основную априорную оценку.

Лемма 4. *Пусть $\delta>0$ и выполнены условия теоремы 1. Пусть дополнительно $|g'(u)|\le c^*$ для некоторой константы $c^*>0$ и любого $u\in\mathbb{R}$. Предположим, что $U(t,x,y)\in C([0,T];L_{2,+})\cap L_2(0,T;H^1_+)$ — слабое решение задачи (17), (18) для*

$$\psi(t,x,y)\equiv J(t,x,y;u_1)e^{-\delta x}, \quad (26)$$

$$U_0\equiv u_0-\psi\big|_{t=0},\quad U_2\equiv u_2-\psi_x\big|_{x=0},\quad F\equiv f-(\psi_t-\psi_{xxx}-\psi_{xyy}-3\delta\psi_{xx}-\delta\psi_{yy}). \quad (27)$$

Тогда равномерно по δ и c^*

$$\|U\|_{C([0,T];L_{2,+})}+\lambda^+(U_x;T)+\lambda^+(U_y;T)$$
$$\le c(c_0,T,s,\|u_0\|_{L_{2,+}},\|u_1\|_{H^{s/3,s}(S_T)},\|u_2\|_{L_2(S_T)},\|f\|_{L_1(0,T;L_{2,+})}). \quad (28)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\psi_t-\psi_{xxx}-\psi_{xyy}-3\delta\psi_{xx}-\delta\psi_{yy}=3\delta^2J_xe^{-\delta x}-2\delta^3Je^{-\delta x}.$$

Тогда в силу оценок (11) и (12) при $s=0$

$$\psi\in C([0,T];L_{2,+}),\quad \psi_x\in C_b(\overline{\mathbb{R}}^x_+;L_2(S_T))\cap L_2(\Pi_T^+),$$

$$U_0\in L_{2,+},\quad U_2\in L_2(S_T),\quad F\in L_1(0,T;L_{2,+})$$

с соответствующими оценками норм через величины, от которых зависит константа в правой части (28). Кроме того, $g'(U+\psi)(U_x+\psi_x)\in L_2(\Pi_T^+)$ (но здесь, разумеется, норма зависит от константы c^*). Запишем для функции U равенство

(25), в котором вместо F надо подставить $F-g'(U+\psi)(U_x+\psi_x)$. Нетрудно видеть, что

$$\iint_{\mathbb{R}^2_+} g'(U+\psi)(U_x+\psi_x)U\rho\,dxdy$$
$$= -\iint_{\mathbb{R}^2_+}\int_0^U g'(\theta+\psi)\theta\,d\theta\rho'\,dxdy + \iint_{\mathbb{R}^2_+}\psi_x\int_0^U g'(\theta+\psi)\,d\theta\rho\,dxdy. \quad (29)$$

Полагая в (25) и (29) $\rho(x)\equiv 1$ выводим, используя оценку (13), что

$$\|U\|_{C([0,T];L_{2,+})} \le c, \quad (30)$$

где константа c не зависит от δ и c^*.

Еще раз воспользуемся равенством (25), на этот раз для

$$\rho(x) = \rho_m(x) \equiv 1 + \sigma\left(\frac{2(m-x)+3}{4}\right)$$

для любого целого $m \ge 0$ (тогда $-\rho_m'(x) \ge \mathrm{const} > 0$ при $x\in[m,m+1]$). С учетом уже полученной оценки (30) находим, что

$$\Bigl|\iint_{\mathbb{R}^2_+}\int_0^U g'(\theta+\psi)\theta\,d\theta\rho'\,dxdy\Bigr| \le c_0\iint_{\mathbb{R}^2_+}(|U|+|\psi|+1)U^2\rho'\,dxdy$$
$$\le c\Bigl(\iint_{\mathbb{R}^2_+}U^4(\rho')^2\,dxdy\Bigr)^{1/2}\Bigl(\iint_{\mathbb{R}^2_+}(U^2+\psi^2)\,dxdy\Bigr)^{1/2} + c\iint_{\mathbb{R}^2_+}U^2\,dxdy$$
$$\le c_1\Bigl(\iint_{\mathbb{R}^2_+}(U_x^2+U_y^2)\rho'\,dxdy\Bigr)^{1/2} + c_1,$$

и тогда из (25) следует, что равномерно по δ и c^*

$$\lambda^+(U_x;T) + \lambda^+(U_y;T) \le c.$$

Лемма доказана.

Вернемся к исходной задаче.

Доказательство теоремы 1. Слабое решение будем строить как предел решений соответствующих регуляризованных задач. Для любого $h\in(0,1]$ положим

$$u_{1h}(t,y)\equiv u_1^h(t,y), \quad \psi_h(t,x,y)\equiv J(t,x,y;u_{1h})e^{-hx},$$
$$U_{0h}(x,y)\equiv\bigl(u_0^h(x,y)-\psi_h(0,x,y)\bigr)\sigma(x/h-1)\sigma(1/h-x^2-y^2),$$
$$U_{2h}(t,y)\equiv\bigl(u_2^h(t,y)-\psi_{hx}(t,0,y)\bigr)\sigma(t/h),$$
$$F_h(t,x,y)\equiv f^h(t,x,y)-(\psi_{ht}-\psi_{hxxx}-\psi_{hxyy}-3h\psi_{hxx}-h\psi_{hyy})(t,x,y),$$
$$g_h(u)\equiv\int_0^u\Bigl[g'(v)\sigma(2-h|v|)+g'\bigl(2\operatorname{sign}v/h\bigr)\sigma(h|v|-1)\Bigr]\,dv$$

и рассмотрим семейство смешанных задач в Π_T^+

$$U_{ht}-U_{hxxx}-U_{hxyy}-3hU_{hxx}-hU_{hyy}+\bigl(g_h(U_h+\psi_h)\bigr)_x = F_h, \quad (31)$$

$$U_h\big|_{t=0}=U_{0h}, \quad U_h\big|_{x=0}=0, \quad U_{hx}\big|_{x=0}=U_{2h}. \quad (32)$$

В силу леммы 2 существует решение задачи (31), (32) $U_h \in W^1_\infty(0,T;L_{2,+}) \cap W^1_2(0,T;H^1_+)$. Кроме того, функции u_{1h}, ψ_h, U_{0h}, U_{2h}, F_h, g_h соответствующим образом аппроксимируют функции u_1, $J(\cdot,\cdot,\cdot;u_1)$, U_0, U_2, f, g, где функции U_0, U_2 определены по формулам (26), (27) при $\delta = 0$. Тогда согласно (28) для функций U_h справедлива равномерная по h оценка

$$\|U_h\|_{C([0,T];L_{2,+})} + \lambda^+(U_{hx};T) + \lambda^+(U_{hy};T) \le c. \tag{33}$$

В силу самого уравнения (31) получаем также, что при $0 \le t_1 < t_2 \le T$

$$\|U_h(t_2,\cdot,\cdot) - U_h(t_1,\cdot,\cdot)\|_{H_+^{-3}} \le \omega(t_2 - t_1), \tag{34}$$

где $\omega(t) \to 0$ при $t \to +0$ и ω не зависит от h.

Оценки (33), (34) стандартным методом (см., например, [9]) позволяют сделать предельный переход при $h \to 0$ и построить решение U задачи (17), (18) при $\delta = 0$, $\psi \equiv J(\cdot,\cdot,\cdot;u_1)$, а затем и искомое решение задачи (1)–(4) по формуле

$$u(t,x,y) \equiv U(t,x,y) + \psi(t,x,y).$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Вопросы единственности слабых решений задачи (1)–(4) пока остаются открытыми (в отличие от аналогичной задачи для уравнения Кортевега – де Фриза, см. [9]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Захаров В. Е., Кузнецов Е. А.* О трехмерных солитонах // Журн. экспер. теорет. физ. 1974. Т. 66, № 2. С. 594–597.
2. *Волевич Л. Г., Гиндикин С. Г.* Смешанная задача для $(2b+1)$-гиперболических уравнений // Труды ММО. 1981. Т. 43. С. 197–259.
3. *Волевич Л. Г., Гиндикин С. Г.* Метод энергетических оценок в смешанной задаче // Усп. мат. наук. 1980. Т. 35., № 5. С. 53–120.
4. *Saut J. C.* Sur quelques généralizations de l'equation de Korteweg – de Vries // J. Math. Pures Appl. 1979. V. 58, N 1. P. 21–61.
5. *Фаминский А. В.* Задача Коши для квазилинейных уравнений нечетного порядка // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 9. С. 1183–1210.
6. *Фаминский А. В.* Задача Коши для уравнения Захарова – Кузнецова // Диффер. уравн. 1995. Т. 31, № 6. С. 1070–1081.
7. *Faminskii A. V.* On the mixed problem for quasilinear equations of the third order // J. Math. Sci. 2002. V. 110, N 2. P. 2476–2507.
8. *Фаминский А. В.* О нелокальной корректности смешанной задачи для уравнения Захарова – Кузнецова // Современная математика и ее прилож. 2006. Т. 38. С. 135–148.
9. *Фаминский А. В.* О смешанной задаче в полуполосе с двумя краевыми условиями для обобщенного уравнения Кортевега – де Фриза // Вестн. Рос. ун-та дружбы народов. Сер. мат. 2001. Т. 8, № 2. С. 114–127.
10. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
11. *Bona J. L., Sun S., Zhang B.-Y.* A non-homogeneous boundary-value problem for the Korteweg – de Vries equation in a quarter-plane // Trans. Amer. Math. Soc. 2002. V. 354, N 2. P. 427–490.

Фаминский Андрей Вадимович
Россия, Москва, Российский университет дружбы народов
andrei_faminskii@mail.ru

Байкова Евгения Сергеевна
Россия, Москва, Российский университет дружбы народов
baykova82@inbox.ru