Неклассические уравнения математической физики
2007. С. 307–314

УДК 517.9

О НЕКОТОРЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

В. Е. Федоров

В работе с использованием методов теории вырожденных полугрупп операторов показано локальное существование и единственность решения задачи Коши для нестационарных полулинейных уравнений соболевского типа двух классов. Абстрактные результаты проиллюстрированы на примерах систем уравнений типа уравнений фазового поля.

Рассмотрим задачу Коши
$$u(t_0) = u_0 \tag{1}$$
для уравнения соболевского типа
$$L\,\dot{u}(t) = Mu(t) + N(t, u(t)), \quad t \in (t_0, T), \tag{2}$$
являющуюся абстрактной формой начально-краевых задач для многих уравнений и систем уравнений в частных производных, моделирующих различные реальные процессы [1–4]. Здесь $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. От нелинейного оператора $N : J \times U \to \mathcal{F}$, заданного на множестве $J \times U \subset \mathbb{R} \times \mathfrak{U}$, потребуются некоторые свойства гладкости и дополнительные свойства, которые будут сформулированы позже.

Условиям существования локальных решений задачи (1), (2), как правило, с оператором $N(t, u) \equiv N(u)$, гладким в смысле Фреше по переменной u, посвящены многочисленные работы Г. А. Свиридюка и его учеников (см., например, [1, 3, 5] и ссылки там же). В них в частности замечено, что в случае $\ker L \neq \{0\}$ задача (1), (2) разрешима лишь при начальных значениях u_0, взятых из некоторого многообразия в $\mathfrak{U}$, так называемого фазового пространства уравнения (2), и большое значение уделено исследованию морфологии этого многообразия.

Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$, то уравнение (2) можно переписать в виде
$$\dot{u}(t) = L^{-1}Mu(t) + L^{-1}N(t, u(t)), \quad t \in (t_0, T). \tag{3}$$
В случае, когда оператор $L^{-1}M$ порождает аналитическую полугруппу операторов, известна теорема о локальном существовании и единственности решения задачи (1), (3) [6]. Цель данной работы — применить некоторые результаты теории вырожденных аналитических полугрупп [7–10] и результаты о локальной разрешимости задачи (1), (3) при исследовании задачи Коши (1), (2) в случае $\ker L \neq \{0\}$. В этом случае уравнение редуцируется к системе двух уравнений относительно двух независимых функций на взаимно дополнительных подпространствах — ядре и образе разрешающей полугруппы исходного уравнения

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для молодых российских ученых — докторов наук МД 4312.2006.1 и гранта РФФИ № 07-01-96030-р_урал_а

($N \equiv 0$). При некоторых предположениях на нелинейный оператор N эта система уравнений принимает достаточно простой вид и поддается анализу.

Полученные абстрактные результаты проиллюстрированы на примерах начально-краевых задач для систем уравнений в частных производных типа уравнений фазового поля.

1. Сильно (L,p)-секториальный оператор и уравнение с секториальным оператором

Этот параграф содержит краткое изложение известных ранее используемых в дальнейших рассмотрениях результатов.

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства. Через $\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ будем обозначать банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}=\mathfrak{U}$, то обозначение сократится до $\mathcal{L}(\mathfrak{U})$. Множество линейных замкнутых операторов с областями определения, плотными в пространстве $\mathfrak{U}$, действующих в $\mathfrak{F}$, будем обозначать $\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Множество операторов $\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{U})$ обозначим через $\mathcal{C}l(\mathfrak{U})$.

Всюду в дальнейшем предполагаем, что операторы $L\in\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M\in\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Обозначим $\rho^L(M)=\{\mu\in\mathbb{C}:(\mu L-M)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$, $R^L_\mu(M)=(\mu L-M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M)=L(\mu L-M)^{-1}$, $R^L_{(\mu,p)}(M)=\prod_{k=0}^p R^L_{\mu_k}(M)$, $L^L_{(\mu,p)}(M)=\prod_{k=0}^p L^L_{\mu_k}(M)$, $\mathbb{R}_+=\{a\in\mathbb{R}:a>0\}$.

Определение 1. Оператор M называется *сильно (L,p)-секториальным*, если
(i) $\exists a\in\mathbb{R}\ \exists\theta\in(\pi/2,\pi)$ $S_{a,\theta}\equiv\{\mu\in\mathbb{C}:|\arg(\mu-a)|<\theta\}\subset\rho^L(M)$;
(ii) $\exists K\in\mathbb{R}_+\ \forall\mu_k\in S_{a,\theta}$, $k=\overline{0,p}$,

$$\max\left\{\|R^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})},\|L^L_{(\mu,p)}(M)\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\right\}\le\frac{K}{\prod\limits_{k=0}^p|\mu_k-a|};$$

(iii) существует плотный в $\mathfrak{F}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{F}}$, такой, что

$$\|M(\lambda L-M)^{-1}L^L_{(\mu,p)}(M)f\|_{\mathfrak{F}}\le\frac{\mathrm{const}(f)}{|\lambda-a|\prod\limits_{k=0}^p|\mu_k-a|}\quad\forall f\in\overset{\circ}{\mathfrak{F}}$$

при любых $\lambda,\mu_0,\mu_1,\dots,\mu_p\in S_{a,\theta}$;
(iv) для всех $\lambda,\mu_0,\mu_1,\dots,\mu_p\in S_{a,\theta}$

$$\|R^L_{(\mu,p)}(M)(\lambda L-M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})}\le\frac{K}{|\lambda-a|\prod\limits_{k=0}^p|\mu_k-a|}.$$

Обозначим через $\mathfrak{U}^0$ ($\mathfrak{F}^0$) ядро $\ker R^L_{(\mu,p)}(M)$ ($\ker L^L_{(\mu,p)}(M)$), а через $\mathfrak{U}^1$ ($\mathfrak{F}^1$) — замыкание линеала $\mathrm{im}R^L_{(\mu,p)}(M)$ ($\mathrm{im}L^L_{(\mu,p)}(M)$) в норме пространства $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{F}$). Через M_k (L_k) будем обозначать сужение оператора M (L) на $\mathrm{dom}M_k=\mathfrak{U}^k\cap\mathrm{dom}M$ ($\mathfrak{U}^k$), $k=0,1$.

Теорема 1 (см. [8]). *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален. Тогда*
(i) $\mathfrak{U}=\mathfrak{U}^0\oplus\mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}^0\oplus\mathfrak{F}^1$;
(ii) $L_k\in\mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $M_k\in\mathcal{C}l(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $k=0,1$;
(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$ *и* $L_1^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$;

(iv) *оператор* $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ *нильпотентен степени не больше* p;

(v) *существует непрерывная в нуле аналитическая полугруппа* $\{U(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}) : |\arg t| < \theta - \pi/2\}$ *уравнения* $L\dot{u} = Mu$;

(vi) *инфинитезимальным генератором аналитической полугруппы* $\{U_1(t) = U(t)\Big|_{\mathfrak{U}^1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1) : |\arg t| < \theta - \pi/2\}$ *является оператор* $L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^1)$.

Замечание 1. Проектор вдоль $\mathfrak{U}^0$ на $\mathfrak{U}^1$ (вдоль $\mathfrak{F}^0$ на $\mathfrak{F}^1$) обозначим через P (Q). При доказательстве утверждения (ii) используется тот факт, что в условиях теоремы 1 выполняются равенства $QL = LP$, $QMu = MPu$ для $u \in \mathrm{dom}M$.

Замечание 2. В силу утверждения (vi) теоремы 1 и теоремы Иосиды [6] оператор $A \equiv L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^1)$ секториален, т. е.

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \exists \theta \in (\pi/2, \pi) \quad S_{a,\theta} \equiv \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \theta\} \subset \rho(A);$$

$$\exists K \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \mu \in S_{a,\theta} \quad \|(\mu I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)} \leq \frac{K}{|\mu - a|}.$$

Возьмем $b > a$, тогда оператор $A_1 \equiv A - bI$ секториален с сектором $S_{a-b,\theta}$, содержащим точку 0. Определим, как в [6], пространство $\mathfrak{U}_\alpha^1 \equiv \mathrm{dom}A_1^\alpha \subset \mathfrak{U}^1$ с нормой $\|u\|_\alpha = \|A_1^\alpha u\|_{\mathfrak{U}^1}$, где $\alpha \geq 0$.

Предположим, что оператор B отображает открытое множество $U \subset \mathbb{R} \times \mathfrak{U}_\alpha^1$ при некотором $\alpha \in [0, 1)$ в пространство $\mathfrak{U}^1$ и является локально гельдеровым по t и локально липшицевым по u на U. Другими словами, для любой точки $(t_1, u_1) \in U$ существует такая ее окрестность $W \subset U$, что для всех $(t, u), (s, v) \in W$

$$\|B(t, u) - B(s, v)\|_{\mathfrak{U}^1} \leq C(|t - s|^\theta + \|u - v\|_\alpha)$$

при некоторых $C, \theta \in \mathbb{R}_+$.

Определение 2. *Решением* задачи Коши (1) для уравнения

$$\dot{u}(t) = Au(t) + B(t, u(t)) \tag{4}$$

на интервале (t_0, T) называется такая функция $u \in C([t_0, T); \mathfrak{U}^1)$, удовлетворяющая условию (1), что при всех $t \in (t_0, T)$ выполняется: $(t, u(t)) \in U$, $u(t) \in \mathrm{dom}A$, существует производная $\dot{u}(t)$, отображение $t \to B(t, u(t))$ локально гельдерово,

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\|B(t, u(t))\|_{\mathfrak{U}^1}}{(t - s)^\alpha} ds \to 0 \quad \text{при} \quad t \to t_0+,$$

и на (t_0, T) удовлетворяется дифференциальное уравнение (4).

Теорема 2 (см. [6]). *Пусть оператор* A *секториален, отображение* $B : U \to \mathfrak{U}^1$ *локально гельдерово по* t *и локально липшицево по* u *на открытом множестве* $U \subset \mathbb{R} \times \mathfrak{U}_\alpha^1$, $\alpha \in [0, 1)$. *Тогда для любой точки* $(t_0, u_0) \in U$ *существует такое* $T = T(t_0, u_0) > t_0$, *что задача* (1), (4) *имеет единственное решение на интервале* (t_0, T).

2. Локальная разрешимость уравнений соболевского типа

Определение 3. Пусть оператор $N : U \to \mathfrak{F}$ задан на множестве $U \subset \mathbb{R} \times \mathfrak{U}$. *Решением* задачи (1), (2) на интервале (t_0, T) назовем такую функцию

$u \in C([t_0, T); \mathfrak{U})$, удовлетворяющую условию (1), что при всех $t \in (t_0, T)$ выполняется: $(t, u(t)) \in U$, $u(t) \in \mathrm{dom}M$, существует производная $\dot{u}(t)$, отображение $t \to N(t, u(t))$ локально гельдерово,

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\|N(t, u(t))\|_{\mathfrak{F}}}{(t-s)^{\alpha}} ds \to 0 \quad \text{при} \quad t \to t_0+,$$

и на (t_0, T) удовлетворяется дифференциальное уравнение (2).

Теорема 3. *Пусть оператор M сильно (L, p)-секториален, оператор $N : U \to \mathfrak{F}$ задан на множестве $U \subset \mathbb{R} \times \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1_{\alpha}$, $\alpha \in [0, 1)$, и является локально гельдеровым по t и локально липшицевым по u на открытом в пространстве $\mathbb{R} \times \mathfrak{U}^1_{\alpha}$ множестве $V = U \cap \mathbb{R} \times \mathfrak{U}^1_{\alpha}$, при этом $\mathrm{im}N \subset \mathfrak{F}^1$. Тогда для любой точки $(t_0, u_0) \in V$ существует такое $T = T(t_0, u_0) > t_0$, что задача (1), (2) имеет единственное решение на (t_0, T).*

Доказательство. Подействуем на обе части уравнения (2) оператором $L_1^{-1}Q$ и в силу замечания 1 получим уравнение

$$\dot{v} = L_1^{-1}M_1 v + L_1^{-1}QN(t, v + w), \tag{5}$$

где $Pu(t) = v(t)$, $(I - P)u(t) = w(t)$, $u(t) = v(t) + w(t)$. Если же на уравнение (2) подействовать оператором $M_0^{-1}(I - Q)$, то получим

$$H\,\dot{w} = w + M_0^{-1}(I - Q)N(t, v + w). \tag{6}$$

Таким образом, задача (1), (2) редуцирована к задаче Коши $v(t_0) = Pu_0$, $w(t_0) = (I - P)u_0$ для системы уравнений (5), (6).

Если $\mathrm{im}N \subset \mathfrak{F}^1$, то $(I - Q)N = 0$. В этом случае уравнение (6) принимает вид $H\dot{w}(t) = w(t)$ и, следовательно, имеет единственное решение $w \equiv 0$ в силу нильпотентности оператора H (см. [8, 9]). При этом для него задача Коши $w(t_0) = (I - P)u_0$ имеет решение только в случае $u_0 \in \mathfrak{U}^1_{\alpha}$, т. е. при $(t_0, u_0) \in V$. Тогда уравнение (5) имеет вид

$$\dot{v} = L_1^{-1}M_1 v + L_1^{-1}QN(t, v), \tag{7}$$

где операторы $A = L_1^{-1}M_1$, $B(t, v) = L_1^{-1}QN(t, v)$ удовлетворяют условиям теоремы 2 в силу замечания 2 и линейности и ограниченности оператора $L_1^{-1}Q$. При этом $(t, v(t)) \in V \subset U$ для всех $t \in (t_0, T)$. Заметим, что поскольку отображение $t \to L_1^{-1}QN(t, v(t))$ удовлетворяет условиям определения 2 на решениях v задачи Коши для уравнения (7), то на решениях $u = v + w = v$ задачи (1), (2) отображение $t \to N(t, v(t) + w(t)) = LL_1^{-1}QN(t, v(t))$ удовлетворяет условиям определения 3 решения, поскольку отличается от него лишь действием линейного ограниченного оператора L, не зависящего от t. Кроме того, для всех $t \in (t_0, T)$ выполняется $u(t) = v(t) \in \mathrm{dom}L_1^{-1}M_1 = \mathrm{dom}M_1 \subset \mathrm{dom}M$.

В следующей теореме речь пойдет о случае, когда оператор $N \equiv N(t, v)$ не зависит от переменной w.

Теорема 4. *Пусть оператор M сильно $(L, 0)$-секториален, оператор $N : U \to \mathfrak{F}$ является непрерывно дифференцируемым в смысле Фреше по (t, u) на открытом множестве $U \subset \mathbb{R} \times \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1_{\alpha}$, $\alpha \in [0, 1)$. Кроме того, предположим, что для любых $(t, u) \in U$, $w \in \mathfrak{U}^0$ выполняется $(t, u + w) \in U$, $N(t, u) = N(t, u + w)$. Тогда для любой точки $(t_0, u_0) \in U$, такой, что*

$$(I - P)u_0 = -M_0^{-1}(I - Q)N(t_0, Pu_0), \tag{8}$$

существует такое $T = T(t_0, u_0) > t_0$, *что задача* (1), (2) *имеет единственное решение на* (t_0, T).

Доказательство. Поскольку $-(I-P)u \in \mathfrak{U}^0$, то для любой точки $(t,u) \in U$ выполняется $(t, Pu) = (t, u-(I-P)u) \in U$. Поэтому $N(t,u) \equiv N(t, Pu)$, кроме того $(t_0, Pu_0) \in U$. Действуя, как при доказательстве предыдущей теоремы, получим систему, состоящую из уравнения (7) и уравнения

$$0 = w + M_0^{-1}(I-Q)N(t,v), \tag{9}$$

поскольку в силу утверждения (iv) теоремы 1 при $p = 0$ выполняется $H = 0$. Из непрерывной дифференцируемости в смысле Фреше оператора N следует выполнение условий теоремы 2 для оператора $L_1^{-1}QN(t,v)$, а отсюда в свою очередь следует существование решения уравнения (7). Через него выражается решение $w(t) = -M_0^{-1}(I-Q)N(t,v(t))$ уравнения (9), которое является решением задачи Коши $w(0) = (I-P)u_0$ в случае выполнения условия (8). Надо заметить, что для всех $t \in (t_0, T)$ в силу теоремы 2 $(t, v(t)) \in U$, а поэтому в силу условий данной теоремы $(t, v(t) + w(t)) \in U$. При этом очевидно, что $w(t) \in \mathrm{dom} M$ для всех $t \in (t_0, T)$, а дифференцируемость функции w следует из дифференцируемости v и условий теоремы на гладкость оператора N по (t,u).

Замечание 3. Рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве теоремы 4, можно провести в случае $p \in \mathbb{N}$, но для получения результата необходимо доказать дифференцируемость по t порядка $p+1$ функции v, в том числе в точке $t = t_0$.

Замечание 4. В работах Г. А. Свиридюка и его учеников (см., например, [1, 5]) рассматривались уравнения соболевского типа с линейной частью того же класса, что и в данной работе, в случае, когда N не зависит от t, либо когда слагаемое, зависящее от t, не зависит от фазовой переменной [3]. Авторами отмечено, что задача Коши для таких уравнений разрешима лишь при начальных значениях u_0 из некоторого множества, замыкание которого в норме исходного пространства называется фазовым пространством. В упомянутых работах рассмотрены случаи различных, подчас достаточно сложных по морфологии фазовых пространств уравнений соболевского типа. Заметим, что в рассмотренном нами нестационарном случае в теореме 3 фазовое пространство уравнения не зависит от выбора начального момента t_0 и по сути совпадает с $\mathfrak{U}^1$. В условиях же теоремы 4 выбор начального значения для задачи Коши зависит от t_0, поэтому в обычном смысле фазовое пространство у уравнения вообще не определено. В линейном случае такая ситуация встречается, например, в работе [11].

Замечание 5. Если вместо задачи Коши рассмотреть естественным образом возникающую для уравнений соболевского типа обобщенную задачу Шоуолтера [12] $Pu(t_0) = u_0$ (см., также [13]), то можно получить результаты, аналогичные теоремам 3 и 4. Отличие будет состоять только в том, что теорема 4 будет справедлива для любой точки $(t_0, u_0) \in U \cap \mathbb{R} \times \mathfrak{U}^1_\alpha$ и, соответственно, в ней будет отсутствовать условие согласования (8).

3. Примеры систем уравнений в частных производных

Пусть $a, b, \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$, $a < b$. Рассмотрим задачу

$$u(x, t_0) = u_0(x), \quad x \in (a,b), \tag{10}$$

$$-u_x(a,t)+\lambda u(a,t)=u_x(b,t)+\lambda u(b,t)$$
$$=-v_x(a,t)+\lambda v(a,t)=v_x(b,t)+\lambda v(b,t)=0,\quad t\in(t_0,T),\quad (11)$$

$$u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)-v_{xx}(x,t)+f(t,x,u(x,t),v(x,t)),\quad (x,t)\in(a,b)\times(t_0,T),\ (12)$$

$$v_{xx}(x,t)+\beta v(x,t)+\alpha u(x,t)=0,\quad (x,t)\in(a,b)\times(t_0,T).\qquad (13)$$

Искомыми в задаче являются функции $u(x,t)$, $v(x,t)$.

Замечание 6. Система (12), (13) при $f\equiv 0$ является, с точностью до линейной замены, линеаризацией в нуле системы уравнений фазового поля, описывающей в рамках мезоскопической теории фазовые переходы первого рода [14, 15].

Положим $\mathfrak{U}=\mathfrak{F}=(L_2(a,b))^2$,

$$L=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad M=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}&-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\\ \alpha&\beta+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\end{pmatrix},\quad N(t,u,v)=\begin{pmatrix}f(t,\cdot,u(\cdot),v(\cdot))\\0\end{pmatrix},$$

$H^2_{\frac{\partial}{\partial n}+\lambda}(a,b)=\{w\in H^2(a,b):\big(\frac{\partial}{\partial n}+\lambda\big)w(a)=\big(\frac{\partial}{\partial n}+\lambda\big)w(b)=0\}$, $\mathrm{dom}M=(H^2_{\frac{\partial}{\partial n}+\lambda}(\Omega))^2$.

Обозначим $Aw=w_{xx}$, $\mathrm{dom}A=H^2_{\frac{\partial}{\partial n}+\lambda}(a,b)\subset L_2(a,b)$. По секториальному оператору A построим оператор A_1 и пространства $\mathcal{H}_\alpha=D(A_1^\alpha)$, $\alpha\geq 0$.

Ранее [16, 17] было показано, что если $-\beta\notin\sigma(A)$, то оператор M сильно $(L,0)$-секториален. Там же были получены проекторы

$$P=\begin{pmatrix}I&0\\-\alpha(\beta+A)^{-1}&0\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}I&A(\beta+A)^{-1}\\0&0\end{pmatrix}.$$

Отсюда $\mathfrak{U}^0=\ker P=\{0\}\times L_2(a,b)$, $\mathfrak{U}^1=\mathrm{im}P=\{(u,-\alpha(\beta+A)^{-1}u)\in(L_2(a,b))^2: u\in L_2(a,b)\}$ – изоморфно $L_2(a,b)\times\{0\}$, $\mathfrak{F}^1=\mathrm{im}Q=\{(u+A(\beta+A)^{-1}v,0)\in(L_2(a,b))^2:(u,v)\in(L_2(a,b))^2\}=L_2(a,b)\times\{0\}$.

Теорема 5. *Пусть $-\beta\notin\sigma(A)$, функция $f:\mathbb{R}\times[a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ измерима по x, локально гельдерова по t и локально липшицева по u равномерно по x при $v=0$, причем $|f(t,x,u,v)|\leq h(x)g(t,|u|,|v|)$, где $h\in L_2(a,b)$, а функция g непрерывна и является возрастающей по второму и третьему аргументам. Тогда для любой точки $(t_0,u_0)\in\mathbb{R}\times\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha\in(1/2,1)$, существует такое $T=T(t_0,u_0)>t_0$, что задача* (10)–(13) *имеет единственное решение на* (t_0,T).

Доказательство. Проверим выполнение условий теоремы 3. Очевидно, что $u_0\in L_2(a,b)$ задает пару $(u_0,-\alpha(\beta+A)^{-1}u_0)\in\mathfrak{U}^1$. В качестве U возьмем множество $\mathbb{R}\times\mathcal{H}_\alpha\times\mathcal{H}_\alpha=\mathbb{R}\times\mathcal{H}_\alpha^2$, тогда для $(t,u,v)\in U$

$$\|N(t,u,v)\|_{(L_2(a,b))^2}=\|f(t,x,u,v)\|_{L_2(a,b)}$$
$$\leq\|h\|_{L_2(a,b)}g\left(t,\|u\|_{C[a,b]},\|v\|_{C[a,b]}\right)\leq\|h\|_{L_2(a,b)}g\left(t,c\|u\|_{\mathcal{H}_\alpha},c\|v\|_{\mathcal{H}_\alpha}\right)$$

в силу непрерывности вложения $\mathcal{H}_\alpha\subset C[a,b]$ при $\alpha>1/2$. Отсюда и из вида оператора следует, что $\mathrm{im}N\subset\mathfrak{F}^1$.

Далее, для $(t_1,u_1)\in\mathbb{R}\times\mathcal{H}_\alpha$ существует окрестность W компакта $\{(t_1,x,u_1(x)): x\in[a,b]\}$ в $\mathbb{R}\times[a,b]\times\mathbb{R}$ (поскольку u_1 – непрерывная функция) и такие константы $C,\theta\in\mathbb{R}_+$, что для всех $(t,x,u),(s,y,w)\in W$ выполняется

$$|f(t,x,u,0)-f(s,y,w,0)|\leq C\left(|t-s|^\theta+|v-w|\right).$$

Поэтому существует такая окрестность Z точки (t_1, u_1) в $\mathbb{R}\times\mathcal{H}_\alpha$, что для всех $(t,u)\in Z$ выполняется $(t,x,u(x))\in W$ п. вс. на $[a,b]$ и для всех $(t,v),(s,w)\in Z$ имеем

$$\|f(t,\cdot,u(\cdot),0)-f(s,\cdot,w(\cdot),0)\|_{L_2(\Omega)}\le C\left(\sqrt{b-a}|t-s|^\theta+\|v-w\|_{L_2(\Omega)}\right),$$

а значит,

$$\|N(t,u,0)-N(s,w,0)\|_{L_2(\Omega)}\le C_1\left(|t-s|^\theta+\|v-w\|_{\mathcal{H}_\alpha}\right).$$

Рассмотрим теперь систему

$$u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)-v_{xx}(x,t)+f(t,u(x,t)),\quad (x,t)\in(a,b)\times(t_0,T), \tag{14}$$

$$v_{xx}(x,t)+\beta v(x,t)+\alpha u(x,t)+g(t,u(x,t))=0,\quad (x,t)\in(a,b)\times(t_0,T). \tag{15}$$

В данной ситуации

$$N(t,u,v)=\begin{pmatrix} f(t,u)\\ g(t,u)\end{pmatrix}.$$

Теорема 6. *Пусть* $-\beta\notin\sigma(A)$, *функции* $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *непрерывно дифференцируемы по* (t,u). *Тогда для любой точки* $(t_0,u_0)\in\mathbb{R}\times\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha\in(1/2,1)$, *существует такое* $T=T(t_0,u_0)>t_0$, *что задача* (10), (11), (14), (15) *имеет единственное решение на* (t_0,T).

Доказательство. Проверим выполнение условий аналога теоремы 4 для обобщенной задачи Шоуолтера (см. замечание 5). Очевидно, что $u_0\in\mathcal{H}_\alpha$ задает пару $(u_0,-\alpha(\beta+A)^{-1}u_0)\in\mathfrak{U}^1$. Кроме того, функция $u\in\mathcal{H}_\alpha$ непрерывна, поэтому для $t\in\mathbb{R}$, $x\in[a,b]$ выполняется

$$\min_{a\le y\le b}u(y)\le u(x)\le\max_{a\le y\le b}u(y),\qquad \min_{a\le y\le b}f(t,u(y))\le f(t,u(x))\le\max_{a\le y\le b}f(t,u(y)),$$

$$\begin{aligned}\|N(t,u,v)\|_{(L_2(a,b))^2}&=\sqrt{\|f(t,u(\cdot))\|^2_{L_2(a,b)}+\|g(t,u(\cdot))\|^2_{L_2(a,b)}}\\&\le\sqrt{b-a}\sqrt{\|f(t,u(\cdot))\|^2_{C[a,b]}+\|g(t,u(\cdot))\|^2_{C[a,b]}}\end{aligned}$$

в силу непрерывной дифференцируемости функций f,g. Понятно, что $N(t,u,v)=N(t,u,v+w)$ для любого $(0,w)\in\mathfrak{U}^0$. Нетрудно также убедиться, что отображение $N:\mathbb{R}\times\mathcal{H}_\alpha\times L_2(a,b)\to L_2(a,b)$ непрерывно дифференцируемо по (t,u,v).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Свиридюк Г. А.* Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно секториальным оператором // Докл. РАН. 1993. Т. 329, № 3. С. 274–277.
2. *Кожанов А. И.* О краевых задачах для некоторых классов уравнений высокого порядка, не разрешенных относительно старшей производной // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 2. С. 359–376.
3. *Свиридюк Г. А., Сукачева Т. Г.* О разрешимости нестационарной задачи динамики вязкоупругой несжимаемой жидкости // Мат. заметки. 1998. Т. 63, № 3. С. 442–450.
4. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.

5. *Свиридюк Г. А., Казак В. О.* Фазовое пространство одной обобщенной модели Осколкова // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 5. С. 1124–1131.

6. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.

7. *Свиридюк Г. А., Федоров В. Е.* Аналитические полугруппы с ядрами и линейные уравнения типа Соболева // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 5. С. 1130–1145.

8. *Свиридюк Г. А., Федоров В. Е.* О единицах аналитических полугрупп операторов с ядрами // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 3. С. 604–616.

9. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.

10. *Федоров В. Е.* Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 8. С. 131–160.

11. *Сагадеева М. А., Федоров В. Е.* Разрешимость одной нестационарной задачи теории фильтрации // Тр. Воронежской зимней мат. школы. Воронеж: ВГУ, 2006. С. 167–171.

12. *Showalter R. E.* Partial differential equations of Sobolev – Galperin type // Pacific J. Math. 1963. V. 31, № 3. P. 787–793.

13. *Плеханова М. В., Федоров В. Е.* Задача оптимального управления для одного класса вырожденных уравнений // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2004. № 5. С. 37–41.

14. *Плотников П. И., Старовойтов В. Н.* Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел модели фазового поля // Диффер. уравн. 1993. Т. 29, № 3. С. 461–471.

15. *Плотников П. И., Клепачева А. В.* Уравнения фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 3. С. 651–669.

16. *Федоров В. Е., Уразаева А. В.* Обратная задача для одного класса сингулярных линейных операторно-дифференциальных уравнений // Тр. Воронежской зимней мат. школы. Воронеж: ВГУ, 2004. С. 161–172.

17. *Федоров В. Е., Сагадеева М. А.* Ограниченные решения линеаризованной системы уравнений фазового поля // Тр. семинара, посвященного 60-летию проф. В. Н. Врагова. / Под ред. А. И. Кожанова. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2005. С. 275–284.

Федоров Владимир Евгеньевич
Россия, Челябинск, Челябинский государственный университет
kar@csu.ru