Неклассические уравнения
математической физики
2007. С. 78–84

УДК 517.946

ОБ АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА ОДНОГО КЛАССА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ СИСТЕМ

М. Г. Гадоев

В работе методами возмущения сингулярным потенциалом и техники параметрикса, исследованы спектральные свойства одного класса несамосопряженных эллиптических систем вырождающихся дифференциальных операторов второго порядка.

В данной работе исследуются некоторые спектральные свойства одного класса несамосопряженных эллиптических систем второго порядка. Приведена оценка резольвенты оператора A. Получена асимптотическая формула для функции распределения собственных значений оператора A. Некоторые результаты данной работы частично были анонсированы в [1].

Пусть $\Omega \subset R^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ (определение см., например, в [2, с. 346]). В гильбертовом пространстве $H_l = L_2(\Omega)^l = L_2(\Omega) \times \dots \times L_2(\Omega)$ (l раз) (в случае $l = 1$ положим $H_l = H$) рассматривается дифференциальный оператор

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho^{2\theta}(x) a_{ij}(x) q(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

с граничными условиями типа Дирихле. Относительно параметра вырождения θ предполагаем, что $0 \le \theta \le 1$. Функция $\rho(x)$ означает регуляризованное расстояние до границы области: $\rho(x) \in C^\infty(\Omega)$, $\rho(x) \le \operatorname{dist}\{x, \partial\Omega\} \le M\rho(x)$, $|\rho'(x)| \le M$. О существовании для любой области $\Omega \subset R^n$ функции $\rho(x)$ с указанными свойствами см., например, [3, гл. 3, § 1.3].

Сформулируем условия для коэффициентов $q(x)$, $a_{ij}(x)$ $(i, j = \overline{1,n})$. Предположим, что

$$a_{ij}(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad q(x) \in C^2(\overline{\Omega}; \operatorname{End}\mathbb{C}^l),$$
$$a_{ij}(x) = \overline{a_{ji}(x)}, \quad (x \in \Omega,\ i, j = \overline{1,n}).$$

Кроме того, предположим выполнение условия эллиптичности

$$c|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\overline{\xi_j}, \quad c > 0\ (x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{C}^n).$$

Собственные значения матрицы $q(x)$ $(x \in \overline{\Omega})$ расположены на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ \equiv (0; +\infty)$ и вне угла

$$\Phi = \{z \in \mathbb{C} : \ |\arg z| \le \varphi\}, \quad \varphi \in (0, \pi]$$

(функция $\arg z$ принимает значения из $(-\pi, \pi]$).

В настоящей статье, как отмечено выше, найдена асимптотика серии собственных значений оператора A, расположенных в угле Φ, в случае слабого вырождения и в предположении, что матрица $q(x)$ при $x \in \partial\Omega$ имеет лишь простые собственные значения. Ранее аналогичные исследования проводились [4] в предположении, что матрица $q(x)$ имеет простые собственные значения для всех $x \in \overline{\Omega} = \partial\Omega \cup \Omega$.

1. Формулировка основных результатов

В этом параграфе сформулируем основные результаты работы.

Введем пространство $W^1_{2,\theta}(\Omega)$ функций $y(x)(x \in \Omega)$ с конечной нормой

$$||y, W^1_{2,\theta}(\Omega)|| = \left(\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\theta}(x)|y'_{x_i}(x)|^2 dx + \int\limits_{\Omega} |y(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В дальнейшем предположим, что матрица $q(x)$ при $x \in \partial\Omega$ имеет простые собственные значения.

Пусть $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\theta}(\Omega)$ — замыкание линейного многообразия $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $W^1_{2,\theta}(\Omega)$. За область определения оператора A примем класс вектор-функций $u(x) \in H_l$ с компонентами класса $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\theta}(\Omega) \cap W^2_{2,loc}(\Omega)$ таких, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} (\rho^{2\theta} a_{ij} q u'_{x_i})'_{x_j} \in H_l.$$

Перенумеруем собственные значения $\mu_1, \ldots, \mu_l$ матрицы $q(x)$ так, что $\mu_j(x) \in C(\overline{\Omega})$ $(j = \overline{1,l})$ и

$$\mu_j(x) \in R_+, \ \text{ т. е. } \ \arg\,\mu_j(x) \equiv 0, \ \ (j = \overline{1,\nu}), \quad \mu_j(x) \overline{\in} \Phi \ \ (j = \nu+1, \ldots, l).$$

Используя результаты работы [5], легко заметить, что справедлива следующая

Лемма. *При $\theta < 1$ оператор A имеет дискретный спектр. Порядок резольвенты оператора A вычисляется по формуле*

$$P = \max\left\{ \frac{n}{2}, \frac{n-1}{2(1-\theta)} \right\}.$$

Из этой формулы видно, что максимальное значение θ, при котором $p = \frac{n}{2}$, равно $\frac{1}{n}$.

Мы будем исследовать асимптотику спектра оператора A в предположении, что $0 \leq \theta < \frac{1}{n}$, что соответствует случаю слабого вырождения.

При $\frac{n}{2} = 1, 2, \ldots$ мы дополнительно предположим, что собственные значения матрицы $q(x)$ $(x \in \overline{\Omega})$ лежат на конечном числе лучей с началами в нуле, т. е. существуют различные числа $\psi_{\nu+1}, \ldots, \psi_l \in (\varphi, \pi] \cup (-\pi, -\varphi)$ такие, что $\arg\,\mu_j(x) = \psi_j$ $(j = \overline{\nu+1,l},\ x \in \overline{\Omega})$.

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ последовательность собственных значений оператора A из угла Φ, упорядоченных в порядке неубывания их модулей.

Положим

$$N(t) = \text{card}\,\{j : |\lambda_j| \leq t\}, \quad t > 0.$$

При выполнении перечисленных условий имеет место следующая

Теорема. *Для любого замкнутого сектора* $S \subset \Phi \setminus R_+$ *с вершиной в нуле для достаточно больших по модулю* $\lambda \in S$ *оператор* $A - \lambda E$ *непрерыно обратим и верна оценка*

$$||(A-\lambda E)^{-1}|| \leq M_S|\lambda|^{-1} \quad (\lambda \in S,\ |\lambda| \geq M'_S).$$

Имеет место асимтотическая формула

$$N(t) \sim (2\pi)^{-n} v_n t^{\frac{n}{2}} \int\limits_{\Omega} \rho^{-n\theta}(x)\mu(x)(\det(a(x)))^{-1/2}\, dx, \tag{1}$$

где v_n *— объем единичного шара в* R^n,

$$\mu(x) = \sum_{i=1}^{\nu} \mu_i^{-\frac{n}{2}}(x), \quad a(x) = (a_{ij}(x))_{k,j=1}^{n}.$$

При этом

$$\lim_{j\to+\infty} \arg\, \lambda_j = 0.$$

2. Доказательство теоремы

В этом пункте приведем краткое доказательство теоремы

Область Ω представим в виде

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{m} \operatorname{supp} \varphi_i,$$

где $\varphi_i(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ — неотрицательные функции, $\varphi_0(x) \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\sum_{i=0}^{m} \varphi_i^2(x) \equiv 1 \quad (x \in \overline{\Omega}).$$

Матрица $q(x)$ по непрерывности будет иметь простые собственные значения там же и в некоторой окрестности $\partial\Omega$. Так как $\mu_j(x) \in C(\overline{\Omega})$, $i = 1, \ldots, l$, то функции $\varphi_k(x), k = 0, 1, \ldots, m$ можно выбрать так, что

$$|\arg\{\mu_k(x_1)\mu_k^{-1}(x_2)\}| < \frac{\pi}{16} \quad \forall x_1, x_2 \in \operatorname{supp} \varphi_k, \quad k = \overline{0, m}.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $\varphi < \frac{\pi}{16}$.

Матрица $q(x)$ в области

$$G = \bigcup_{k=0}^{m} G_k, \quad G_k = \{x + y|\ x \in \operatorname{supp} \varphi_k,\ x + y \in \Omega,\ |y| < \delta\},$$

при достаточно малом $\delta > 0$ представима в виде

$$q(x) = U(x)\Lambda(x)U^{-1}(x), \quad \Lambda(x) = \operatorname{diag}\{\mu_1(x), \ldots, \mu_l(x)\},$$

$$U(x), U^{-1}(x) \in C^2(\overline{G}; \operatorname{End} \mathbb{C}^l).$$

Для $j=\nu+1,\ldots,l$, $k=1,\ldots,m$ построим функцию $\widetilde{\mu}_{jk}(x)\in C^2(\overline{\Omega})$, совпадающую с $\mu_j(x)$ на множестве $\operatorname{supp}\varphi_k$ и удовлетворяющую условиям

$$|\arg\{\widetilde{\mu}_{jk}(x_1)\widetilde{\mu}_{jk}^{-1}(x_2)\}|\le\frac{\pi}{8},\quad x_1,x_2\in\overline{\Omega},\tag{2}$$

$$\widetilde{\mu}_{jk}(x)\overline{\in}\ \overline{\Phi}\quad\forall x\in\overline{\Omega}.$$

Для $j=1,\ldots,\nu,\quad k=1,\ldots,m$ положим $\widetilde{\mu}_{jk}(x)=\mu_j(x)$.

Введем в рассмотрении в пространстве $L_2(\Omega)$ дифференциальный оператор

$$(P_{jk}y)(x)=-\sum_{i,r=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\rho^{2\theta}(x)a_{ir}(x)\widetilde{\mu}_{jk}(x)\frac{\partial y(x)}{\partial x_i}\right)$$

с областью определения

$$D(P_{jk})=\left\{y\in\overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,\theta}(\Omega)\cap W^2_{2,loc}(\Omega):\sum_{i,r=1}^{n}(\rho^{2\theta}a_{ir}\widetilde{\mu}_{jk}y'_{x_i})'_{x_r}\in L_2(\Omega)\right\}.$$

Пусть выполнено условие (2). Тогда для любых $j\in\{\nu+1,\ldots,l\}$, $k\in\{1,\ldots,m\}$ найдется число $z_{ik}\in\mathbb{C}$, $|z_{jk}|=1$, такое, что

$$c\le\operatorname{Re}\{z_{jk}\mu_{jk}(x)\},\quad c|\lambda|\le-\operatorname{Re}\{z_{jk}\lambda\},\quad c>0.\tag{3}$$

для всех $x\in\overline{\Omega}$, $\lambda\in\overline{\Phi}$.

На основании этих неравенств устанавливается существование непрерывного оператора $(P_{jk}-\lambda E)^{-1},\quad\lambda\in\overline{\Phi}$.

Обозначим

$$I(y)=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\theta}(x)\left|\frac{\partial y(x)}{\partial x_i}\right|^2dx.$$

Так как по условию эллиптичности для $c>0$

$$c\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial y}{\partial x_i}(x)\right|^2\le\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\overline{\frac{\partial y}{\partial x_j}}(x)=<a(x)\nabla_x y(x),\nabla_x y(x)>_{\mathbb{C}^n},$$

то для $y\in D(P_{jk})$ $(j=\overline{\nu+1,l})$ в силу (3) имеем

$$I(y)\le M_1\operatorname{Re}\left\{z_{jk}\sum_{i,r=1}^{n}(\rho^{\theta}a_{ir}\mu_{jk}y'_{x_i},\rho^{\theta}y'_{x_j})\right\}=M_1\operatorname{Re}\{z_{jk}(P_{jk}y,y)\},$$

где символом $(\cdot,\cdot)$ обозначено скалярное произведение в пространстве $H=L_2(\Omega)$. Далее, из (3) для $\lambda\in\overline{\Phi}$ находим

$$I(y)+|\lambda||y|_H^2\le M_2Re((z_{jk}P_{jk}-\lambda z_{jk}E)y,y)\le M_2|y|_H|(P_{jk}-\lambda E)y|_H,$$

$$I(y)\le M_2|y|_H|P_{jk}y|_H.\tag{4}$$

Полагая в (4) $y=(P_{jk}-\lambda E)^{-1}f$, $f\in H$, получим

$$|\lambda||(P_{jk}-\lambda E)^{-1}f|\le M_2|(Pjk-\lambda E)(P_{jk}-\lambda E)^{-1}f|_H.$$

Следовательно

$$|(P_{jk}-\lambda E)^{-1}f|\le M|\lambda|^{-1}|f|_H$$

или
$$||(P_{jk}-\lambda E)^{-1}|| \le M|\lambda|^{-1}$$
и
$$||P_{jk}(P_{jk}-\lambda E)^{-1}|| \le M_3, \tag{5}$$

Полагая во втором неравенстве (4) $y=(P_{jk}-\lambda E)^{-1}f$, $f\in H$, получим

$$\left|\rho^\theta \frac{\partial}{\partial x_i}(P_{jk}-\lambda E)^{-1}f\right|_H^2 \le M|f|_H|(P_{jk}-\lambda E)^{-1})f|_H \\ \le M'|\lambda|^{-1}|f|_H^2, \quad i=\overline{1,n}. \tag{6}$$

Действительно, имеем

$$\left|\rho^\theta \frac{\partial}{\partial x_i}(P_{jk}-\lambda E)^{-1})f\right|_H^2 = \int\limits_\Omega \rho^{2\theta}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}(P_{jk}-\lambda E)^{-1}f\right|^2 dx \\ \le \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega \rho^{2\theta}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}(P_{jk}-\lambda E)^{-1}f\right|^2 dx = I((P_{jk}-\lambda E)^{-1}f).$$

Теперь с учетом (4), (5)

$$\left|\rho^\theta \frac{\partial}{\partial x_i}(P_{jk}-\lambda E)^{-1}f\right|_H^2 \le I((P_{jk}-\lambda E)^{-1}f) \\ \le M_2|(P_{jk}-\lambda E)^{-1}f||P_{jk}(P_{jk}-\lambda E)^{-1}f| \\ \le M_4|(P_{jk}-\lambda E)^{-1}f||f| \le M_4|(P_{jk}-\lambda E)^{-1}||f|_H^2.$$

Отсюда непосредственно следует (6).

Неравенство (6) запишем в виде

$$\left|\rho^\theta \frac{\partial}{\partial x_i}(P_{jk}-\lambda E)^{-1}f\right|_H \le M'|\lambda|^{-1/2}|f|_H,$$

т. е.
$$\left\|\rho^\theta \frac{\partial}{\partial x_i}(P_{jk}-\lambda E)^{-1}\right\|_H \le M_5|\lambda|^{-1/2}, \quad i=\overline{1,n}.$$

Отсюда согласно неравенству Харди (см., например, [3]) заключаем, что

$$||\rho^{2\theta-1}(P_{jk}-\lambda E)^{-1}|| \le M_3\sum_{i=1}^n \left\|\rho^\theta \frac{\partial}{\partial x_i}(P_{jk}-\lambda E)^{-1}\right\| \le M_6|\lambda|^{-1/2}. \tag{7}$$

Для достаточно больших по модулю $\lambda\in S$ рассмотрим оператор

$$\Gamma(\lambda)=U(x)B(\lambda)U^{-1}(x)+\Gamma_0(\lambda),$$

здесь $\Gamma_0(\lambda)$ — интегральный оператор в $L_2(\Omega)^l$ с ядром

$$\Gamma_0(\lambda;x,y)=(2\pi)^{-n}\varphi_0(x)\varphi_0(y)\int\limits_{R^n} e^{is(x-y)}P(y;s)ds,$$

где
$$P(y;s)=\left(\sum_{i,j=1}^n \rho^{2\theta}(y)a_{ij}(y)q(y)s_is_j-\lambda I\right)^{-1},$$

$$I = \mathrm{diag}\,\{1, \ldots, 1\} \in \mathrm{End}\,\mathbb{C}^l,$$

а

$$B(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k B_k(\lambda) \varphi_k, \quad B_k(\lambda) = \mathrm{diag}\,\{G_{1k}(\lambda), \ldots, G_{lk}(\lambda)\},$$

$$G_{jk}(\lambda) = (P_{jk} - \lambda E)^{-1}, \quad \lambda \in S, \quad |\lambda| \geq M_S'.$$

Легко можно показать, что

$$(A - \lambda E)\Gamma(\lambda) = E + G(\lambda),$$

где

$$G(\lambda) = \rho^{2\theta-1}(x) q_0(x) B(\lambda) U^{-1} + \rho^{2\theta}(x) \sum_{i=1}^{n} q_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} B(\lambda) U^{-1},$$

$$||G(\lambda)|| \leq \frac{1}{2}, \quad q_i(x) \in C(\overline{\Omega}; \mathrm{End}\,\mathbb{C}^l), \quad i = \overline{0, n}.$$

Применяя (5)–(7), аналогично [4] устанавливаем, что

$$(A - \lambda E)^{-1} = \Gamma(\lambda)(E + Q(\lambda)), \quad \lambda \in S, \quad |\lambda| \geq M_S', \tag{8}$$

где

$$Q(\lambda) = (E + G(\lambda))^{-1} - E, \quad ||Q(\lambda)|| \leq M|\lambda|^{-1/2}, \quad \lambda \in S.$$

Отсюда нетрудно вывести оценку

$$||(A - \lambda E)^{-1}|| \leq M_S |\lambda|^{-1}, \quad \lambda \in S, \quad |\lambda| \geq M_S'.$$

Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Пусть $w > \frac{n}{2}$ — целое число, $w \in (\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1]$. Из (8) получим

$$|\,\mathrm{Tr}\,(A - \lambda E)^{-w} - \mathrm{Tr}\,\Gamma^w(\lambda)| \leq O(1) |(A - \lambda E)^{-w}|_1,$$

где символы Tr, $|\cdot|_1$ обозначают след и ядерную норму оператора соответственно (определение см., например, [6]).

Для вычисления главного члена асимптотики функции $\mathrm{Tr}\,\Gamma^w(\lambda)$, применяется метод возмущения сингулярным потенциалом (ВСП) [7]. Вместо $G_{jk}(\lambda)$ рассматривается оператор $\widetilde{G}_{jk} = (\widetilde{P}_{jk} - \lambda E)^{-1}$, где $\widetilde{P}_{jk} = P_{jk} - d(x)$, $d(x) = e^{i\eta} \rho^{2\theta-2-\varepsilon}(x)$, $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, $\eta = \arg \lambda$. В результате применения метода ВСП и техники параметрикса [8], можно показать, что главный член асимптотики функции $\mathrm{Tr}\,\Gamma^w(\lambda)$ не изменится, если в определении $\Gamma(\lambda)$ заменить $G_{jk}(\lambda)$ на интегральный оператор с ядром

$$G_{jk}^0(\lambda; x, y) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{R^n} e^{is(x-y)} P_1(y, s) ds,$$

где

$$P_1(y, s) = \left(\rho^{2\theta}(y) q(y) \sum_{i,r=1}^{n} a_{ir}(y) s_i s_r - d(x) I - \lambda I \right)^{-1}.$$

Далее доказывается, что при нахождении главного члена асимптотики функции $\mathrm{Tr}\,\Gamma^w(\lambda)$ в приведенной выше формуле можно опустить $d(x)$.

В итоге окончательно имеем

$$\mathrm{Tr}\,(A-\lambda E)^{-w} \sim (2\pi)^{-n} \int\limits_{R^n} \mathrm{Tr}\,(P_1(y,s)+d(x)I)^{-w} ds$$

$$\sim \int\limits_0^\infty \frac{d\varphi(\lambda)}{(t-\lambda)^w}, \quad \lambda\to\infty, \quad \lambda\in S,$$

где $\varphi(t)$ — такая же функция, как в правой части формулы (1).

Доказательство теоремы завершается применением соответствующей подходящей тауберовой теоремы.

Замечание 1. Отметим, что ранее аналогичные вопросы исследовались также в [9, 10] только в случае $n = 1$. В [11] изучены некоторые спектральные свойства одного класса вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов, далеких от самосопряженных, при граничных условиях необязательно совпадающих с граничными условиями Дирихле.

Замечание 2. В этой работе мы рассмотрели случай слабого вырождения $\theta < 1/n$. Случай пограничного вырождения $\theta = 1/n$ и случай сильного вырождения $\theta > 1/n$, когда асимптотические формулы имеют принципиально другой вид, автор предполагает рассмотреть в другой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гадоев М. Г.* Спектральная асимптотика несамосопряженных эллиптических систем второго порядка слабо вырождающихся на границе области // Докл. АН Респ. Таджикистан. 1999. Т. XLII, № 3. С. 54–59.
2. *Морен К.* Методы гильбертова пространства. М.: Мир, 1965.
3. *Егоров И. Е., Пятков С. Г. ,Попов С. В.* Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
4. *Самирипур А., Седдики К.* Распределение собственных значений несамосопряженных эллиптических систем, вырождающихся на границе области // Мат. заметки. 1997. Т. 61, № 3. С. 463–467.
5. *Бойматов К. Х.* О базисности по Абелю системы корневых вектор-функций вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов с сингулярными матричными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 46–57.
6. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.
7. *Бойматов К. Х.* Спектральная асимптотика дифференциальных операторов. I // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. М.: Изд-во МГУ, 1981. Вып. 7. С. 50–100.
8. *Самирипур А., Седдики К.* Распределение собственных значений несамосопряженных эллиптических систем, вырождающихся на границе области // Мат. заметки. 1997. Т. 61, №3. С. 463–467.
9. *Бойматов К. Х., Костюченко А. Г.* Распределение собственных значений несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. 1990. № 3. С. 24–31.
10. *Бойматов К. Х.* Асимптотика спектра несамосопряженных систем дифференциальных операторов второго порядка // Мат. заметки. 1992. Т. 51, № 4. С. 8–16.
11. *Гадоев М. Г.* Асимптотика спектра несамосопряженных вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов второго порядка на отрезке // Сиб. ж. инд. мат. 2006. Т. 9, № 2(26). С. 31–43.

Гадоев Махмадрахим Гафурович
Россия, Мирный, Мирнинский политехнический институт
gadoev@rambler.ru