*Неклассические уравнения математической физики*
*2007. С. 92–101*

УДК 517.95

# О РАЗРЕШИМОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВТ УРАВНЕНИЯ ТРАНСЗВУКОВОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

**С. Н. Глазатов**

Рассмотрена задача о существовании и единственности периодического по выделенной пространственной переменной решения нестационарного ВТ уравнения трансзвуковой газовой динамики.

В работе [1] для описания плоских нестационарных течений газа в околозвуковом диапазоне скоростей с учетом вязкости и теплопроводности выведено уравнение

$$\Phi_{xt} - \mu\Phi_{xxx} + \Phi_x\Phi_{xx} - \Phi_{yy} = f(x, y, t), \tag{1}$$

где $\mu > 0$ — константа. Авторы назвали (1) ВТ уравнением. Функция $f(x, y, t)$ играет роль внешних массовых сил, производные $\Phi_x$ и $\Phi_y$ — компоненты вектора скорости газового потока в соответствующих направлениях, $\Phi(x, y, t)$ — потенциал поля скоростей.

Здесь возникает вопрос о постановке и разрешимости задачи Коши и начально-краевых задач для уравнения (1) в различных областях. Автору известна лишь монография [2, гл. 4, пп. 2, 3], где приведена постановка и доказана корректность начально-краевой задачи для (1).

В настоящей работе доказана теорема существования и единственности решения новой совершенно иной начально-краевой задачи для уравнения (1).

Рассмотрим уравнение (1) в области $Q = G \times (0, T)$, где $G = (0, 2\pi) \times (0, 1)$; $x \in (0, 2\pi)$, $y \in (0, 1)$, $0 < T < +\infty$.

Начально-краевая задача. Найти в области $Q$ решение уравнения (1), удовлетворяющее начально-краевым условиям

$$\Phi\big|_{t=0} = \varphi(x, y), \tag{2}$$

$$D_x^j\Phi\big|_{x=0} = D_x^j\Phi\big|_{x=2\pi}, \quad j = 0, 1, 2, \tag{3}$$

$$\Phi_y\big|_{y=0} = \Phi_y\big|_{y=1} = 0. \tag{4}$$

Условия (4) — это условия непротекания. Что же касается (3), то, в отличие от [2], здесь не задаются нулевые значения $\Phi$ и $\Phi_x$ на соответствующих участках границы, а требуется определенный режим течения газа. Это принципиальное отличие, которое и придает задаче новизну. Такой режим при всех $t \in (0, T)$ является собственно трансзвуковым в области $G$, поскольку ясно, что $\iint\limits_G \Phi_x dxdy = 0$. Следовательно, в невырожденном случае $\Phi_x$ меняет знак, а это и обеспечивает трансзвуковой характер течения.

Введем анизотропные пространства С. Л. Соболева $H(Q)$ и $V(G)$. Для обозначения производных высокого порядка по переменным $x$ и $y$ используются символы $D_x^{s_1}$, $D_y^{s_2}$, где $s_i$ — порядок производной по соответствующей переменной. При определении функциональных пространств будем указывать лишь производные наивысшего порядка. Существование производных меньшего порядка в области $Q$ доказывается элементарно, а эквивалентность соответствующих норм является следствием теоремы 11.2 из [3, гл. 3, п. 11].

Обозначим

$$\|f\|_{H(Q)} = \|f\|_{L^2(Q)} + \|f_x\|_{L^2(0,T;W_2^2(G))},$$

$$\|\varphi\|_{V(G)} = \|\varphi\|_{L^2(G)} + \|D_x^3\varphi\|_{W_2^2(G)} + \|D_x D_y^3\varphi\|_{L^2(G)}.$$

Введем условия согласования (в дальнейшем условия (A)): $D_x^l f\big|_{x=0} = D_x^l f\big|_{x=2\pi}$, $l = 0,1,2$; $D_x^s\varphi\big|_{x=0} = D_x^s\varphi\big|_{x=2\pi}$, $s = 0,1,2,3,4$; $f_y\big|_{y=0} = f_y\big|_{y=1} = 0$, $\varphi_y\big|_{y=0} = \varphi_y\big|_{y=1} = 0$.

Далее, введем усиленное необходимое условие (B): $\int\limits_0^{2\pi} f(x,y,t)dx = 0$ для п. в. $(y,t) \in (0,1)\times(0,T)$.

Необходимым условием разрешимости задачи (1)–(4) является условие $\iint\limits_G f(x,y,t)dxdy = 0$ для п. в. $t \in (0,T)$, но для наших целей требуется значительно более жесткое условие.

Наконец, укажем пространство $W(Q)$, в котором удалось найти решение $\Phi(x,y,t)$ задачи (1)–(4). Это пространство функций с нормой

$$\|\Phi\|_{W(Q)} = \|\Phi\|_{L^2(0,T;W_2^4(G))} + \|\Phi_{xt}\|_{L^2(0,T;W_2^2(G))} + \|D_x^4\Phi\|_{L^2(0,T;W_2^2(G))}.$$

Учитывая сделанное выше замечание, отметим, что существование младших производных искомого решения $\Phi(x,y,t)$ задачи (1)–(4) будет доказано еще и в ходе построения этого решения.

Положим $\mu = 1$.

**Теорема.** *Пусть* $f(x,y,t) \in H(Q), \varphi(x,y) \in V(G)$ *и* $\int\limits_0^{2\pi}\varphi(x,y)dx = 0$ *для п. в.* $y \in (0,1)$. *Пусть выполнены условия (A) и (B). Тогда найдется положительное число* $\alpha(T)$ *такое, что если* $(\|f\|_{H(Q)} + \|\varphi\|_{V(G)}) < \alpha(T)$, *то существует решение* $\Phi(x,y,t) \in W(Q)$ *начально-краевой задачи (1)–(4), удовлетворяющее условию* $\int\limits_0^{2\pi}\Phi(x,y,t)dx = 0$ *для п. в.* $(y,t) \in (0,1)\times(0,T)$.

*Решение из* $W(Q)$ *задачи (1)–(4), удовлетворяющее указанному условию, единственно.*

Доказательство. Рассмотрим в области $Q$ линейное уравнение

$$Lu \equiv u_{xt} - u_{xxx} - u_{yy} = f(x,y,t). \tag{5}$$

Решение (5) должно удовлетворять начально-краевым условиям (2)–(4).

Будем искать решение задачи (5), (2)–(4) методом дискретизации по переменной $t$, одновременно аппроксимируя его гладкими функциями.

Функции $f(x,y,t)$ и $\varphi(x,y)$ можно представить в виде сходящихся соответственно в $H(Q)$ и $V(G)$ функциональных рядов, частичными суммами которых являются

$$f_m(x,y,t) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{s=0}^{m} f_{ks}(t)\sin kx\,\omega_s(y) + \sum_{k=0}^{m}\sum_{s=0}^{m}\widetilde{f}_{ks}(t)\cos kx\,\omega_s(y)$$

и

$$\varphi_m(x,y)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=0}^{m}\varphi_{ks}\sin kx\,\omega_s(y)+\sum_{k=0}^{m}\sum_{s=0}^{m}\widetilde{\varphi}_{ks}\cos kx\,\omega_s(y),$$

где $\{\omega_s(y)\}_{s=0}^{\infty}$ — ортонормированные в $L^2(0,1)$ собственные функции задачи Штурма – Лиувилля $-\omega_{syy}=\lambda_s^2\omega_s$, $\omega_{sy}(0)=\omega_{sy}(1)=0$. Нетрудно видеть, что $\omega_0(y)\equiv 1$, $\omega_s(y)=\sqrt{2}\cos\pi sy$, $s=1,2,\ldots$.

Пусть $N\in\mathbb{N}$ — достаточно большое число. Обозначим $\tau=N^{-1}T$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\ell(u_m^n,u_m^{n-1})\equiv\tau^{-1}(u_{mx}^n-u_{mx}^{n-1})-u_{mxxx}^n-u_{myy}^n=f_m^n(x,y)\tag{6}$$

с условием

$$u_m^0(x,y)=\varphi_m(x,y),\tag{7}$$

где $f_m^n(x,y)=\tau^{-1}\int\limits_{(n-1)\tau}^{n\tau}f_m(x,y,\sigma)d\sigma$, $n=1,2,\ldots,N$.

Докажем разрешимость системы (6), (7) с краевыми условиями (3), (4) и то, что при любом $n=1,2,\ldots,N$ выполнено равенство $\int\limits_0^{2\pi}u_m^n(x,y)dx=0$ для всех $y\in(0,1)$.

Для $u_m^n$ имеется уравнение

$$\ell_0u_m^n\equiv\tau^{-1}u_{mx}^n-u_{mxxx}^n-u_{myy}^n=g_m^n,\tag{8}$$

где $g_m^n=f_m^n+\tau^{-1}u_{mx}^{n-1}$.

При фиксированном $m$ решения $u_m^n(x,y)$ ищутся в виде

$$u_m^n(x,y)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=0}^{m}u_{ks}^n\sin kx\,\omega_s(y)+\sum_{k=0}^{m}\sum_{s=0}^{m}\widetilde{u}_{ks}^n\cos kx\,\omega_s(y).$$

По аналогии с предыдущим, для каждой функции $g_m^n(x,y)$ введем ее коэффициенты разложения по системе базисных функций, а именно: $g_{ks}^n$ $(k=1,\ldots,m;$ $s=0,1,\ldots,m)$ и $\widetilde{g}_{ks}^n$ $(k=0,1,\ldots,m;\ s=0,1,\ldots,m)$. Эти коэффициенты последовательно по $n$ определяются в ходе итерационного процесса. Выполняя дифференцирование в уравнении (8) и приравнивая коэффициенты при базисных функциях, получаем для определения $u_{ks}^n$ и $\widetilde{u}_{ks}^n$ алгебраическую систему уравнений, которая также решается в ходе итерационного процесса. Если $k\neq 0$, то $u_{ks}^n$ и $\widetilde{u}_{ks}^n$ находятся элементарным образом. Если $k=0$, то получаются уравнения вида $\lambda_s^2\widetilde{u}_{0s}^n=\widetilde{g}_{0s}^n$. Для любого $n=1,2,\ldots,N$ имеем $\widetilde{g}_{0s}^n=0$, $s=0,\ldots,m$. Это проверяется несложным прямым вычислением, если, помня о способе построения $f_m^n$, учитывать условие (B), эквивалентное тому, что $\widetilde{f}_{0s}(t)=0$ для п. в. $t\in(0,T)$; $s=0,1,2,\ldots$. В определении $\widetilde{u}_{00}^n$ для любого $n$ имеется произвол, и мы полагаем $\widetilde{u}_{00}^n=0$ для любого $n=1,2,\ldots,N$.

Таким образом, разрешимость уравнения (8), а тем самым системы (6), (7) доказана. Очевидно, что все $u_m^n$ $(n=1,2,\ldots,N)$ удовлетворяют условиям (3), (4). Кроме того, для любого $n=1,2,\ldots,N$ выполнено равенство $\int\limits_0^{2\pi}u_m^n(x,y)dx=0$ для всех $y\in(0,1)$, поскольку оно эквивалентно тому, что $\widetilde{u}_{0s}^n=0$ при всех $s=0,\ldots,m$; $n=1,2,\ldots,N$.

Теперь определим для каждого достаточно большого натурального $N$ функцию $u_m^N(x,y,t)$ следующим образом: $u_m^N(x,y,t)=u_m^n(x,y)$ при $t\in[n\tau,(n+1)\tau)$, где $n=0,1,\ldots,N$. Определим функцию $f_m^N(x,y,t)=f_m^n(x,y)$ при $t\in[(n-1)\tau,n\tau)$, где $n = 1, 2, \ldots, N$. Учитывая свойства $u^0_m(x,y) = \varphi_m(x,y)$, легко убедиться в том, что $\eta^N_m(y,t) \equiv \int\limits_0^{2\pi} u^N_m(x,y,t)dx = 0$ для всех $(y,t) \in (0,1) \times (0,T)$.

Получим равномерные по $N$ и $m$ оценки семейства $\{u^N_m\}_{N,m\in\mathbb{N}}$.

Оценки производных по $x$ получаются достаточно просто. Рассмотрим два равенства: сначала

$$\sum_{n=1}^{N}(\ell_0 u^n_m, \exp(-\lambda(n-1)\tau)u^n_{mx})_{L^2(G)} = \sum_{n=1}^{N}(f^n_m + \tau^{-1}u^{n-1}_{mx}, \exp(-\lambda(n-1)\tau)u^n_{mx})_{L^2(G)},$$

где $\lambda > 0$ — произвольная константа, а затем

$$-\sum_{n=1}^{N}(\ell_0 u^n_m, D^3_x u^n_m)_{L^2(G)} = -\sum_{n=1}^{N}(f^n_m + \tau^{-1}u^{n-1}_{mx}, D^3_x u^n_m)_{L^2(G)}.$$

Стандартные приемы, которые использовались в [4, 5], приводят к равномерным по $m$, $N$ оценкам

$$\|D^s_x u^N_m\|_{L^2(Q)} \leqslant C_1(\|f^N_m\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}), \quad s = 1, 2, 3. \tag{9}$$

Здесь и в дальнейшем равномерность оценки по $N$ и $m$ означает то, что константы, входящие в нее, не зависят от $N$ и $m$.

Теперь оценим $u^N_{myy}$. Обратимся к уравнению (8) и рассмотрим для каждого $p = 0, 1, \ldots, m$ равенство

$$(\ell_0 u^n_m, \omega_p)_{L^2(0,1)} = (g^n_m, \omega_p)_{L^2(0,1)}.$$

В силу ортонормированности семейства $\{\omega_s\}_{s=0}^{\infty}$ из этого равенства получаем

$$\tau^{-1}(u^n_{mpx} - u^{n-1}_{mpx}) - u^n_{mpxxx} + \lambda^2_p u^n_{mp} = f^n_{mp}, \tag{10}$$

где $u^n_{mp}(x) = \int\limits_0^1 u^n_m(x,y)\omega_p(y)dy$, $n = 0, 1, \ldots, N$, $f^n_{mp}(x) = \int\limits_0^1 f^n_m(x,y)\omega_p(y)dy$, $n = 1, \ldots, N$.

Ранее было показано, что $\int\limits_0^{2\pi} u^n_m(x,y)dx = 0$ для всех $y \in (0,1)$. Значит $\int\limits_0^{2\pi} u^n_{mp}(x)dx = 0$, и по теореме о среднем существует $x_p \in (0, 2\pi)$ такое, что $u^n_{mp}(x_p) = 0$. Ясно, что $x_p$ также зависит от $n$ и $m$. Умножим левую и правую части (10) на $\lambda^2_p u^n_{mpx}$ и проинтегрируем по $x$ от $x_p$ до $2\pi$. Проинтегрируем, где нужно, по частям, а затем просуммируем итоговые выражения в левой и правой частях сначала по $p$ от 0 до $m$, а потом по $n$ от 1 до $N$ и применим, где нужно, неравенство Коши. После этого умножим обе части полученного неравенства на $\tau$. Применяя теорему о следах, и, где необходимо, «$\varepsilon$-неравенство» Юнга с подходящими коэффициентами, получаем

$$\|u^N_{myy}(2\pi, y, t)\|_{L^2((0,1)\times(0,T))} \leqslant C(\varepsilon)(\|f^N_{mx}\|_{L^2(Q)} + \|f^N_m\|_{L^2(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)} + \|D^4_x u^N_m\|_{L^2(Q)}) + 2\sqrt{\varepsilon}\|u^N_{myy}\|_{L^2(Q)}. \tag{11}$$

Теперь рассмотрим равенство

$$-\tau\sum_{n=1}^{N}(\ell_0 u_m^n, \exp(-\lambda(n-1)\tau)\exp(-\alpha x)u_{myyx}^n)_{L^2(G)}$$
$$= -\tau\sum_{n=1}^{N}(f_m^n+\tau^{-1}u_{mx}^{n-1}, \exp(-\lambda(n-1)\tau)\exp(-\alpha x)u_{myyx}^n)_{L^2(G)},$$

где $\lambda>0$, $\alpha>0$ — произвольные числа. Проинтегрируем по частям по $y$ первое слагаемое в левой части и второе в правой части и по $x$ остальные слагаемые в обеих частях рассматриваемого равенства, используем, где нужно, неравенство Коши и, где нужно, «$\varepsilon_1$-неравенство» Юнга с $\varepsilon_1=\frac{\alpha}{8}$, также используем оценки (9), (11). В итоге получаем оценку

$$\|u_{mxy}^N\|_{L^2(Q)}+\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\|u_{myy}^N\|_{L^2(Q)}$$
$$\leqslant C_2(\|f_m^N\|_{H(Q)}+\|\varphi_m\|_{V(G)}+\|D_x^4u_m^N\|_{L^2(Q)}+\|u_{myy}^N(2\pi,y,t)\|_{L^2((0,1)\times(0,T))})$$
$$\leqslant C_3(\|f_m^N\|_{H(Q)}+\|\varphi_m\|_{V(G)}+\|D_x^4u_m^N\|_{L^2(Q)})+2\sqrt{\varepsilon}C_4\|u_{myy}^N\|_{L^2(Q)}.$$

Выбрав $\sqrt{\varepsilon}<\frac{C_4^{-1}\sqrt{\alpha}}{8}$, получим равномерную по $N$ и $m$ оценку

$$\|u_{myy}^N\|_{L^2(Q)}\leqslant C_5(\|f_m^N\|_{H(Q)}+\|\varphi_m\|_{V(G)})+C_6\|D_x^4u_m^N\|_{L^2(Q)}. \tag{12}$$

Если рассмотреть равенство

$$-\sum_{n=1}^{N}(\ell_0 u_{mx}^n, D_x^4u_m^n)_{L^2(G)}=-\sum_{n=1}^{N}(f_{mx}^n+\tau^{-1}u_{mxx}^{n-1}, D_x^4u_m^n)_{L^2(G)},$$

то, используя интегрирование по частям и уже известные приемы, приходим к оценке

$$\|D_x^4u_m^N\|_{L^2(Q)}\leqslant C_7(\|f_m^N\|_{H(Q)}+\|\varphi_m\|_{V(G)}). \tag{13}$$

В терминах функций $f_m^N$ и $u_m^N$ уравнение (8) можно записать следующим образом

$$\ell_1u_m^N\equiv\tau^{-1}(u_{mx}^N(\cdot,t)-u_{mx}^N(\cdot,t-\tau))-u_{mxxx}^N(\cdot,t)-u_{myy}^N(\cdot,t)=f_m^N(\cdot,t), \tag{14}$$

где $u_m^N(\cdot,\bar t)=\varphi_m(\cdot)$ при $\bar t<0$.

Обозначим через $v_m^N$ выражение $\tau^{-1}(u_m^N(\cdot,t)-u_m^N(\cdot,t-\tau))$.

Учитывая оценки (9), (12), (13) и уравнение (14), приходим к равномерным по $N$ и $m$ оценкам

$$\|u_{myy}^N\|_{L^2(Q)}\leqslant C_7(\|f_m^N\|_{H(Q)}+\|\varphi_m\|_{V(G)}), \tag{15}$$
$$\|u_{mxy}^N\|_{L^2(Q)}\leqslant C_8(\|f_m^N\|_{H(Q)}+\|\varphi_m\|_{V(G)}), \tag{16}$$
$$\|v_{mx}^N\|_{L^2(Q)}\leqslant C_9(\|f_m^N\|_{H(Q)}+\|\varphi_m\|_{V(G)}). \tag{17}$$

Используя (4) и (15), можно получить оценку

$$\|u_{my}^N\|_{L^2(Q)}\leqslant C_{10}(\|f_m^N\|_{H(Q)}+\|\varphi_m\|_{V(G)}). \tag{18}$$

Теперь отметим, что для любой функции $z(x,y,t)\in L^2(Q)$ такой, что $z_x\in L^2(Q)$ и $\int\limits_0^{2\pi}z(x,y,t)dx=0$ для п. в. $(y,t)\in(0,1)\times(0,T)$, имеет место легко проверяемое неравенство

$$\|z\|_{L^2(Q)}\leqslant M\|z_x\|_{L^2(Q)},$$

где постоянная $M$ не зависит от функции $z$.

Используя это неравенство, (17) и (9), можно вывести равномерные по $N$ и $m$ оценки

$$\|v_m^N\|_{L^2(Q)} \leqslant C_{11}(\|f_m^N\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}), \tag{19}$$

$$\|u_m^N\|_{L^2(Q)} \leqslant C_{12}(\|f_m^N\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}). \tag{20}$$

Далее мы не будем подробно описывать процедуру получения оценок старших производных. Просто берутся нужные производные левой и правой частей (14), а поскольку коэффициенты (14) постоянны, то замена соответствующей производной на новую функцию дает возможность повторения примененных ранее приемов.

Рассматривая уравнения $\ell_1 u_{mx}^N = f_{mx}^N$, $\ell_1 u_{mxx}^N = f_{mxx}^N$, $\ell_1 u_{mxxx}^N = f_{mxxx}^N$ и используя в вычислениях (6), повторением проведенных ранее рассуждений получаем равномерные по $N$ и $m$ оценки

$$\|D_x^s u_m^N\|_{L^2(Q)} \leqslant C_{13}(\|f_m^N\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}), \quad s = 4, 5, 6, \tag{21}$$

$$\|D_x^j D_y^2 u_m^N\|_{L^2(Q)} \leqslant C_{14}(\|f_m^N\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}), \quad j = 1, 2, \tag{22}$$

$$\|D_x^l v_m^N\|_{L^2(Q)} \leqslant C_{15}(\|f_m^N\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}), \quad l = 2, 3. \tag{23}$$

Заметим, что, рассматривая уравнение $\ell_1 u_{mxxx}^N = f_{mxxx}^N$, мы должны ограничиться только вычислениями, связанными с равенством

$$-\sum_{n=1}^{N}(\ell_0 u_{mxxx}^n, D_x^6 u_m^n)_{L^2(G)} = -\sum_{n=1}^{N}(f_{mxxx}^n + \tau^{-1} u_{mxxx}^{n-1}, D_x^6 u_m^n)_{L^2(G)},$$

но не повторять все другие вычисления.

Отметим два следующих факта. При получении оценок в дальнейшем используется то, что $D_y^3\omega_s(0) = D_y^3\omega_s(1) = 0$, $s = 0, 1, \dots$. Также нетрудно показать, что семейство функций $\{\omega_{syy}\}_{s=0}^{\infty}$ ортогонально в $L^2(0,1)$.

Рассмотрим теперь два уравнения $\ell_1 u_{myy}^N = f_{myy}^N$ и $\ell_1 u_{mxyy}^N = f_{mxyy}^N$. Уже известными приемами получаем новые оценки, равномерные по $N$ и $m$,

$$\|D_x^s D_y^2 u_m^N\|_{L^2(Q)} \leqslant C_{16}(\|f_m^N\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}), \quad s = 3, 4, \tag{24}$$

$$\|D_x D_y^3 u_m^N\|_{L^2(Q)} \leqslant C_{17}(\|f_m^N\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}), \tag{25}$$

$$\|D_y^4 u_m^N\|_{L^2(Q)} \leqslant C_{18}(\|f_m^N\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}), \tag{26}$$

$$\|D_x^j D_y^2 v_m^N\|_{L^2(Q)} \leqslant C_{19}(\|f_m^N\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}), \quad j = 0, 1. \tag{27}$$

Отличие в получении (26) по схеме получения (15) состоит в том, что на самом первом шаге здесь удобнее рассмотреть равенства

$$-(\ell_0 u_{myy}^n, \omega_p)_{L^2(0,1)} = -(g_{myy}^n, \omega_p)_{L^2(0,1)}, \quad p = 0, 1, \dots, m.$$

В результате, для каждого $p$ приходим к равенству (10), обе части которого умножены на $\lambda_p^2$. Умножаем обе эти части скалярно в $L^2(x_p, 2\pi)$ на $\lambda_p^4 u_{mpx}^n$. Далее упомянутая схема проводится с очевидными изменениями.

Напомним, что и здесь, рассматривая уравнение $\ell_1 u_{mxyy}^N = f_{mxyy}^N$, нужно ограничиться лишь вычислениями, связанными с равенством

$$-\sum_{n=1}^{N}(\ell_0 u_{mxyy}^n, D_x^4 D_y^2 u_m^n)_{L^2(G)} = -\sum_{n=1}^{N}(f_{mxyy}^n + \tau^{-1} u_{mxxyy}^{n-1}, D_x^4 D_y^2 u_m^n)_{L^2(G)}.$$

Теперь рассмотрим уравнения $\ell_1 u^N_{mxy} = f^N_{mxy}$ и $\ell_1 u^N_{mxxy} = f^N_{mxxy}$.

Используя оценки (22), (24)–(27), условия (4) и условия $D^3_y u^n_m\big|_{y=0} = D^3_y u^n_m\big|_{y=1} = 0$, принимая во внимание оба рассматриваемые уравнения, приходим к оценкам

$$\|D^s_x D_y u^N_m\|_{L^2(Q)} \leqslant C_{20}(\|f^N_m\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}), \quad s = 2,3,4,5, \tag{28}$$

$$\|D^3_y u^N_m\|_{L^2(Q)} \leqslant C_{21}(\|f^N_m\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}), \tag{29}$$

$$\|D^j_x D_y v^N_m\|_{L^2(Q)} \leqslant C_{22}(\|f^N_m\|_{H(Q)} + \|\varphi_m\|_{V(G)}), \quad j = 0,1,2. \tag{30}$$

Для получения (28) при $s = 5$ нужно провести вычисления, связанные с равенством

$$-\sum_{n=1}^{N}(\ell_0 u^n_{mxxy}, D^5_x D_y u^n_m)_{L^2(G)} = -\sum_{n=1}^{N}(f^n_{mxxy} + \tau^{-1}u^{n-1}_{mxxxy}, D^5_x D_y u^n_m)_{L^2(G)}.$$

Для получения (30) при $j = 2$ следует воспользоваться первым из рассматриваемых уравнений и оценками (25) и (28) при $s = 4$.

Теперь совершим предельный переход в равенстве (14) при фиксированном $m$ и $N \to \infty$. Из построения $f^N_m$ ясно, что $f^N_m \xrightarrow[N\to\infty]{} f_m$ в $H(Q)$, а значит, правые части в формулах (9), (15)–(30) ограничены величинами, не зависящими от $N$. Поэтому, в силу априорных оценок и свойства разностных отношений существуют функция $u_m \in W(Q)$ и подпоследовательность $\{N_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ такие, что $u^{N_k}_m \xrightarrow[k\to\infty]{} u_m$ слабо в $L^2(Q)$, $D^{s_1}_x D^{s_2}_y u^{N_k}_m \xrightarrow[k\to\infty]{} D^{s_1}_x D^{s_2}_y u_m$ слабо в $L^2(Q)$ и $D^{s_3}_x D^{s_4}_y v^{N_k}_m \xrightarrow[k\to\infty]{} D^{s_3}_x D^{s_4}_y u_{mt}$ слабо в $L^2(Q)$. Здесь $D^{s_1}_x D^{s_2}_y u^{N_k}_m$ и $D^{s_3}_x D^{s_4}_y v^{N_k}_m$ — производные, фигурирующие в (9), (15)–(30).

Следовательно, в равенстве (14) можно перейти к пределу при $k \to \infty$ на подпоследовательности $N_k$ и получить равенство

$$u_{mxt} - u_{mxxx} - u_{myy} = f_m. \tag{31}$$

При этом для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем $\int\limits_0^{2\pi} u_m(x,y,t)dx = 0$ для п. в. $(y,t) \in (0,1)\times(0,T)$. В самом деле, обозначим этот интеграл через $\eta_m(y,t)$ и рассмотрим произвольную функцию $\xi(y,t) \in L^2((0,1)\times(0,T))$. Используя уже сделанный вывод, имеем, что $(\eta^{N_k}_m, \xi)_{L^2((0,1)\times(0,T))}$ сходятся к $(\eta_m, \xi)_{L^2((0,1)\times(0,T))}$ при $k \to \infty$, но, как мы видели, $\eta^{N_k}_m(y,t) = 0$ для всех $(y,t) \in (0,1)\times(0,T)$ при любом $k \in \mathbb{N}$, а отсюда в силу произвольности $\xi$ и следует доказываемое утверждение.

Все полученные априорные оценки остаются справедливыми и для семейства $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ с теми же константами, но правые части оценок зависят только от $m$. В оценках (17), (19), (23), (27), (30) вместо разностных отношений фигурируют производные $u_{mt}$ по переменным $x$ и $y$.

Поскольку $f_m \to f$ при $m \to \infty$ в $H(Q)$ и $\varphi_m \to \varphi$ при $m \to \infty$ в $V(G)$, то повторяя уже приведенные аргументы, выводим, что существуют функция $u(x,y,t) \in W(Q)$ и подпоследовательность $\{m_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ такие, что $u_{m_l} \xrightarrow[l\to\infty]{} u$ слабо в $W(Q)$. После этого осталось перейти к пределу на подпоследовательности $\{m_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ в равенстве (31).

Из способа построения приближенных решений и априорных оценок следует, что полученное решение $u(x,y,t) \in W(Q)$ уравнения (5) удовлетворяет краевым условиям и начальным данным. Используя уже сделанный вывод и теорему компактности, можно утверждать, что $\eta_{m_l}$ сходятся к $\int\limits_0^{2\pi} u(x,y,t)dx$ при $l \to \infty$ в

$L^2((0,1)\times(0,T))$ сильно и, поэтому, сходятся п. в. в $(0,1)\times(0,T)$ (на новой подпоследовательности), но, как мы видели, $\eta_{m_l}(y,t)=0$ для п. в. $(y,t)\in(0,1)\times(0,T)$ при любом $l\in\mathbb{N}$, а отсюда следует, что полученное решение $u(x,y,t)$ удовлетворяет условию $\int\limits_0^{2\pi} u(x,y,t)dx=0$ для п. в. $(y,t)\in(0,1)\times(0,T)$.

Докажем единственность решения из $W(Q)$ начально-краевой задачи (5), (2)–(4), удовлетворяющего указанному условию.

Рассмотрим равенство $(Lu,\exp(-\lambda t)u_x)_{L^2(Q)}=0$. Начальные данные здесь нулевые, а $\lambda>0$ — произвольная константа. Интегрируя по частям, используя краевые условия (3), (4) и условие $\int\limits_0^{2\pi} u(x,y,t)dx=0$ для п. в. $(y,t)\in(0,1)\times(0,T)$, получаем, что $u\equiv 0$ п. в. в $Q$.

Кроме того, для полученного решения справедлива оценка

$$\|u\|_{W(Q)}\leqslant \widetilde{C}(\|f\|_{H(Q)}+\|\varphi\|_{V(G)}), \tag{32}$$

где $\widetilde{C}$ не зависит от $u$, $f$ и $\varphi$.

Теперь выберем функцию $v(x,y,t)\in W(Q)$ специальным образом. Сначала отметим, что если $v\in W(Q)$, то $v_xv_{xx}\in H(Q)$ и справедлива оценка

$$\|v_xv_{xx}\|_{H(Q)}\leqslant C_{23}\|v\|^2_{W(Q)}, \tag{33}$$

где $C_{23}$ зависит от $T$ и не зависит от $v$. При доказательстве этого утверждения ключевую роль играют неравенство Гёльдера, теорема 3.1 из [6, гл. 1, п. 3.1], теорема 9.8 из [6, гл. 1, п. 9.4] и теорема вложения $W_2^1(Q)$ в $L^4(Q)$, справедливая для функций $v(x,y,t)$, определенных в области $Q\subset\mathbb{R}^3$.

Функция $v_xv_{xx}$ должна удовлетворять условиям (A) и (B). Например, в качестве $v(x,y,t)$ можно взять единственное решение задачи (5), (2)–(4), полученное ранее. Недостающие условия согласования следуют из априорной оценки (21) и из способа построения упомянутого решения. Все остальные условия согласования и условие (B), очевидно, выполняются.

Теперь рассмотрим уравнение

$$L\widetilde{u}=f-v_xv_{xx}\equiv h(x,y,t) \tag{34}$$

и начально-краевые условия (2)–(4).

Функция $v$ уже выбрана ранее, и в силу сказанного выше $h(x,y,t)\in H(Q)$ и удовлетворяет условиям (A) и (B). Задача (34), (2)–(4) имеет решение $\widetilde{u}(x,y,t)\in W(Q)$ такое, что $\int\limits_0^{2\pi}\widetilde{u}(x,y,t)dx=0$ для п. в. $(y,t)\in(0,1)\times(0,T)$, и такое решение единственно.

Таким образом, определено отображение $S:W(Q)\to W(Q)$, которое ставит в соответствие функции $v(x,y,t)\in W(Q)$ с перечисленными выше свойствами единственное решение $\widetilde{u}(x,y,t)\in W(Q)$ задачи (34), (2)–(4) такое, что $\int\limits_0^{2\pi}\widetilde{u}(x,y,t)dx=0$ для п. в. $(y,t)\in(0,1)\times(0,T)$.

Обозначим $\widetilde{B}_\rho=\{z\in W(Q):\|z\|_{W(Q)}\leqslant\rho,\int\limits_0^{2\pi} z(x,y,t)dx=0$ для п. в. $(y,t)\in(0,1)\times(0,T)\}$. Также обозначим через $\Omega$ область определения отображения $S$.

Покажем, что существует $\rho>0$ такое, что $S$ переводит множество $\widetilde{B}_\rho\cap\Omega$ в себя и является сжимающим.

Воспользуемся оценками (32) и (33). Справедливо неравенство

$$\|\widetilde{u}\|_{W(Q)}\leqslant\widetilde{C}(\|h\|_{H(Q)}+\|\varphi\|_{V(G)})\leqslant\widetilde{C}(\|f\|_{H(Q)}+\|\varphi\|_{V(G)})+C_{24}\|v\|^2_{W(Q)}.$$

Пусть $v \in \widetilde{B}_\rho \cap \Omega$, где $\rho > 0$ выберем позже. Для доказательства нужного факта добьемся выполнения неравенства

$$\widetilde{C}(\|f\|_{H(Q)} + \|\varphi\|_{V(G)}) + C_{24}\rho^2 \leqslant \rho. \tag{35}$$

Рассмотрим трехчлен $P(\rho) \equiv \rho^2 - (C_{24})^{-1}\rho + C_{25}(\|f\|_{H(Q)} + \|\varphi\|_{V(G)})$. Очевидно, что для существования $\rho > 0$, при котором выполнено (35), необходимо и достаточно, чтобы дискриминант $P(\rho)$ был положительным. Это эквивалентно выполнению неравенства

$$(\|f\|_{H(Q)} + \|\varphi\|_{V(G)}) < \frac{1}{4}C_{24}^{-2}C_{25}^{-1} \equiv \alpha_1.$$

Тогда $P(\rho)$ имеет два положительных корня $\rho_-$ и $\rho_+$ ($\rho_- < \rho_+$). В качестве $\rho$ возьмем $\rho_-$.

То, что $Sv \in \Omega$ следует из того, что единственное решение $\widetilde{u}(x, y, t) \in \widetilde{B}_{\rho_-}$ задачи (34), (2)–(4) в силу способа его построения обладает дополнительными свойствами, которые обеспечивают нужные условия согласования.

Теперь покажем, что отображение $S$ является сжимающим.

Пусть $v_i \in \widetilde{B}_{\rho_-} \cap \Omega$, $\widetilde{u}_i = Sv_i$, $i = 1, 2$, $z = \widetilde{u}_1 - \widetilde{u}_2$, $\overline{v} = v_1 - v_2$. Рассмотрим равенство

$$Lz = -v_{1x}v_{1xx} + v_{2x}v_{2xx}.$$

Прибавляя величину $v_{1x}v_{2xx}$ к правой части этого равенства и вычитая ее же, имеем

$$Lz = -(v_{1x}\overline{v}_{xx} + \overline{v}_x v_{2xx}).$$

Воспользовавшись (32), получаем неравенство

$$\|z\|_{W(Q)} \leqslant \widetilde{C}(\|v_{1x}\overline{v}_{xx}\|_{H(Q)} + \|\overline{v}_x v_{2xx}\|_{H(Q)}).$$

Оценивая каждое слагаемое в правой части с помощью оценки, аналогичной (33), учитывая то, что $\|v_i\|_{W(Q)} \leqslant \rho_-$, $i = 1, 2$, приходим к неравенству

$$\|z\|_{W(Q)} \leqslant C_{26}\rho_- \|\overline{v}\|_{W(Q)}.$$

Из формулы для корней трехчлена $P(\rho)$ вытекает существование $\alpha_2 > 0$ такого, что если $(\|f\|_{H(Q)} + \|\varphi\|_{V(G)}) < \alpha_2$, то $\rho_-$ настолько мало, что $C_{26}\rho_- < 1$, а, значит, отображение $S$ является сжимающим.

В качестве $\alpha$ можно взять $\min(\alpha_1, \alpha_2)$.

Поскольку $\widetilde{B}_{\rho_-} \cap \Omega$ — полное метрическое пространство, то отображение $S$ имеет единственную неподвижную точку — функцию $\Phi(x, y, t) \in W(Q)$, которая и является решением исходной задачи (1)–(4). В силу способа построения решения удовлетворяются начально-краевые условия (2)–(4) и условие $\int\limits_0^{2\pi} \Phi(x, y, t)dx = 0$ для п. в. $(y, t) \in (0, 1) \times (0, T)$.

Можно искать решение задачи (1)–(4), используя итерационный процесс

$$L\Phi^p = f - \Phi_x^{p-1}\Phi_{xx}^{p-1}, \quad \Phi^0(x, y, t) \equiv 0$$

и условия (2)–(4).

Докажем единственность решения из $W(Q)$ задачи (1)–(4), обладающего свойством $\int\limits_0^{2\pi} \Phi(x, y, t)dx = 0$ для п. в. $(y, t) \in (0, 1) \times (0, T)$.

Пусть $\Phi_1$ и $\Phi_2$ — два таких решения. Существует $R > 0$ такое, что $\Phi_i \in \widetilde{B}_R$, $i = 1, 2$. Сначала очевидным образом получаем, что

$$Lw = -\Phi_{1x}\Phi_{1xx} + \Phi_{2x}\Phi_{2xx},$$

где $w = \Phi_1 - \Phi_2$. Прибавляя величину $\Phi_{1x}\Phi_{2xx}$ к правой части этого равенства и вычитая ее же, рассмотрим равенство

$$(Lw, \exp(-\lambda t)w_x)_{L^2(Q)} = (-(\Phi_{1x}w_{xx} + w_x\Phi_{2xx}), \exp(-\lambda t)w_x)_{L^2(Q)}, \tag{36}$$

где $\lambda > 0$ выберем позже. После простого преобразования получим в правой части выражение $\iiint\limits_Q (\frac{1}{2}\Phi_{1xx} - \Phi_{2xx}) \exp(-\lambda t) w_x^2 dxdydt$. В силу двух упомянутых теорем из [6] имеем оценку $\|\Phi_{ixx}\|_{C(\overline{Q})} \leqslant C_{27}\|\Phi_i\|_{W(Q)} \leqslant C_{27}R$, $i = 1, 2$. Интегрируя по частям в левой части (36) и учитывая упомянутую оценку, приходим к неравенству

$$\lambda\|w_x \exp(-\frac{\lambda t}{2})\|^2_{L^2(Q)} \leqslant C_{28}R\|w_x \exp(-\frac{\lambda t}{2})\|^2_{L^2(Q)}.$$

Выбирая нужным образом $\lambda$ и вспоминая свойство решения, получаем, что $w \equiv 0$ п. в. в $Q$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Рыжов О. С., Шефтер Г. М.* О влиянии вязкости и теплопроводности на структуру сжимаемых течений // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, № 6. С. 996–1007.
2. *Ларькин Н. А.* Гладкие решения уравнений трансзвуковой газодинамики. Новосибирск: Наука, 1991.
3. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
4. *Глазатов С. Н.* Задача с данными на характеристике для линеаризованного уравнения трансзвуковой газовой динамики // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 5. С. 1019–1029.
5. *Глазатов С. Н.* Неклассические краевые задачи для уравнений смешанного типа и приложения к трансзвуковой газовой динамике // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2002. С. 59–68.
6. *Лионс Ж.- Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. Т. 1. М.: Мир, 1971.



*Глазатов Сергей Николаевич*
*Россия, Новосибирск, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН*
glaz@math.nsc.ru