Неклассические уравнения
математической физики
2007. С. 85–91

УДК 517.956.25

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Дж. К. Гвазава

Для квазилинейного эллиптического уравнения с допустимым параболическим вырождением обсуждается вопрос разрешимости задачи с заданными на полностью неизвестной границе значениями решения и его производной по некасательному направлению. Дано построение общего интеграла рассматриваемого уравнения, на основании которого и проводится исследование.

1. Постановка задачи

На плоскости переменных x, y рассмотрим квазилинейное неравномерно эллиптическое уравнение второго порядка

$$L'(u) \equiv au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = f,$$

где коэффициенты a, b, c и правая часть f непрерывно дифференцируемы для всех x, y и для всех конечных значений неизвестного решения $u(x, y)$ с его производными первого порядка $p = u_x(x, y)$, $q = u_y(x, y)$, от которых они и зависят.

Пусть также заданы на R^1_+ функции α, β, γ и ξ, η, ζ из класса $C^{(1,\kappa)}(R^1_+)$, $0 < \kappa < 1$. При этом предполагаем существование такого наименьшего постоянного числа l, чтобы выполнялось $\eta^{(j)}(0) = \eta^{(j)}(l)$ и $\zeta^{(j)}(0) = \zeta^{(j)}(l)$, $j = 0, 1$. Тогда соотношения $y = \eta(s)$, $u = \zeta(s)$, $0 \leq s \leq l$ на плоскости $x = 0$ пространства переменных x, y, u параметрически будут определять гладкую замкнутую кривую Γ. Ниже всюду для удобства в качестве аргумента s будем брать длину дуги этой кривой. Кривую Γ будем считать жордановой и стандартное условие $(\eta')^2 + (\zeta')^2 > 0$ выполненным. Другая пара соотношений

$$x = \xi(s), \quad y = \eta(s), \quad 0 \leq s \leq s_0 < l,$$

на плоскости x, y определяет разомкнутую дугу Γ_1. Здесь s_0 — некоторое фиксированное неотрицательное число.

Мы рассмотрим вопрос, насколько правомерна постановка следующей краевой задачи: при граничном условии

$$u\big|_{\Gamma_1} = \zeta(s), \quad 0 \leq s \leq s_0, \tag{1}$$

одновременно со своей областью определения D найти регулярное решение уравнения $L'(u) = f$, если дуга Γ_1 является заданной частью границы области D, а на другой — недостающей, неизвестной части Γ_2 границы этой области должны быть выполнены условия

$$u\big|_{\Gamma_2} = \zeta(s), \quad [\alpha(s)p(s) + \beta(s)q(s)]\big|_{\Gamma_2} = \gamma(s), \quad s_0 \leq s \leq l. \tag{2}$$

Не исключены предельные значения для величины s_0. В случае, когда $s_0 = l$, неизвестная часть Γ_2 границы отсутствует. Следовательно, кривая Γ_1 становится полностью заданной границей области, а условие (1) — граничным условием первой краевой задачи. Более интересен другой предельный случай, когда $s_0 = 0$ и граница искомой области целиком свободна. Известна лишь единственная точка $(\xi(0), \eta(0))$ этой границы.

Подобные постановки встречаются при составлении дифференциальных моделей различных прикладных проблем, в том числе задач обтекания со срывом струй в динамике жидкости и газа (см., например, [1–3]). Они составляют класс так называемых задач со свободными границами, в которых твердые стенки соответствуют заданным частям границы области течения. Кривые же, вдоль которых одновременно постоянны и скорость, и функция тока, играют роль свободных частей границы, и их определение есть одна из целей задачи.

Есть еще много других проблем, которые моделируются задачами аналогичного содержания. В качестве примера можно привести задачу определения плоских периодических установившихся волн конечной амплитуды на поверхности однородной жидкости, когда все частицы жидкости имеют достаточно малый ненулевой вихрь. При этом предполагается, что глубина постоянна и может быть как конечной, так и бесконечной. В работе [4] эта проблема редуцирована к задаче со свободной границей для функции тока $\sigma(\tau, \nu)$, где ν обозначает глубину. Краевое условие $(\operatorname{grad}\sigma)^2 + 2g\nu = const$ должно быть выполнено на поверхности жидкости. А эта поверхность, со своей стороны, может быть определена в неявном виде неизвестным уравнением $\sigma(\tau, \nu) = 0$. В его отыскании и заключается исходная задача. Таким образом, получается задача для заданного уравнения с заданным граничным условием на неизвестной границе. С целью преодоления этого затруднения в [4] применено контактное преобразование, при котором функция тока принимается за независимое переменное, а глубина — за искомую функцию. Этим шагом хотя краевое условие задается уже на известной границе, но взамен существенно усложняется уравнение. Главная его часть имеет вид

$$L(u) \equiv [(u_y)^2 + 1]u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (u_x)^2 u_{yy}, \tag{3}$$

правая же часть содержит производную первого порядка $u_x(x, y)$ искомого решения $u(x, y)$ в третьей степени. Судя по дискриминанту $\Delta = -(u_x)^2$, комбинацию L следует относить к классу эллиптических операторов с допустимым параболическим вырождением. Множество точек вырождения оператора (3) не фиксировано и зависит от значений производной $u_x(x, y)$. Вдоль всех функций с производными $u(x, y)$, отличными от нуля, оператор L эллиптичен.

Ниже задачу (1),(2) рассмотрим для уравнения

$$L(u) = f''(u)(u_x)^3, \tag{4}$$

где оператор L определен формулой (3), а $f(u)$ — произвольно заданная на R^1 достаточно гладкая функция, о дополнительных свойствах которой речь пойдет далее. Следует отметить,что при подходящем подборе контактных преобразований уравнение (4) можно свести к какому-либо полулинейному эллиптическому уравнению даже с оператором Лапласа в главной части. Но после таких преобразований дополнительно возникает ряд существенных затруднений, которые ставят исследование задачи (1), (2) в рамки жестких ограничений. Характер разрешимости этой задачи, безусловно, будет определяться параметрами, фигурирующими в граничных условиях. В этом направлении можно устанавливать разнообразные условия разрешимости рассматриваемой задачи. Мы рассмотрим случай $s_0 = 0$, когда вся граница неизвестна и ограничимся доказательством следующих предложений.

Предложение 1. *Если выполняются равенства* $\beta(s) = -\zeta'(s)$, $\gamma(s) = \eta'(s)$, *а значения комбинации* $\alpha(s) + \gamma(s)f'(\zeta(s))$ *в конечных точках интервала* $[0, l]$ *совпадают, тогда для существования интеграла задачи* (1), (2), (4) *необходимо условие*

$$\int_0^l [\alpha(s) + \gamma(s)f'(\zeta(s))]ds = 0.$$

Предложение 2. *Если хотя бы для одного значения переменного* s *из интервала* $0 \leq s \leq l$ *имеет место равенство* $\eta(s)\beta(s) + \gamma(s)\zeta(s) = 0$, *то задача* (1), (2), (4) *может оказаться нефредгольмовой.*

Для рассмотрения поставленной задачи воспользуемся общим представлением интеграла уравнения (4).

2. Построение общего интеграла уравнения (4)

К рассматриваемому уравнению (4) приурочим классический метод характеристик (см. [5]), разработанный для гиперболических уравнений, все корни характеристического уравнения которых действительны. Уравнение (4) из-за эллиптичности имеет два комплексных характеристических корня, которые определяют два недействительных характеристических направления. Как характеристические корни, так и направления, выражаются производными первого порядка неизвестного решения и, следовательно, не определены. Эти направления выражены соотношениями

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{i + u_y}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{u_x}{i - u_y}$$

Вдоль направлений, определенных этими двумя равенствами, само уравнение (4) можно записать следующим образом

$$(u_y - i)du_x - u_x du_y - i(u_x)^2 f'(u)du = 0,$$

$$(u_y + i)du_x - u_x du_y - i(u_x)^2 f'(u)du = 0$$

соответственно. Непосредственными вычислениями можно удостовериться, что нелинейные аналоги лапласовых инвариантов равны нулю (см. [5]). Поэтому полученные характеристические дифференциальные соотношения вполне интегрируемы. Интегрированием обеих пар этих соотношений получаем по две пары характеристических инвариантов на каждое из двух семейств

$$\xi = u + iy, \quad \xi_1 = \frac{u_y}{u_x} - i(\frac{1}{u_x} + f'(u)), \tag{5}$$

$$\eta = u - iy, \quad \eta_1 = \frac{u_y}{u_x} + i(\frac{1}{u_x} + f'(u)). \tag{6}$$

Первая пара инвариантов (5) соответствует семейству харктеристических кривых корня λ_1, а другая пара (6) — семейству характеристик корня λ_2. Известно, что система инвариантов (ρ, ρ_1) для характеристического семейства корня λ_1 полная и все остальные инварианты выражаются через них. Аналогично обстоит дело и с другой парой инвариантов (τ, τ_1) (см. [6]). Оба этих семейства неизвестны, поскольку они зависят от неизвестного решения $u(x, y)$ и его производных первого порядка. Однако известно, что для инвариантов ρ и ρ_1 множество характеристических кривых корня λ_1 является общим семейством линий уровня. Следовательно, между этими инвариантами должна существовать функциональная зависимость $\rho_1 = m'(\rho)$ без явного присутствия в ней других параметров. Здесь m — произвольная аналитическая функция комплексного аргумента $u+iy$. Аналогичными рассуждениями можно утверждать существование функциональной связи $\tau_1 = n'(\tau)$, где n — также произвольная аналитическая функция аргумента $u-iy$. Таким образом, приходим к двум соотношениям

$$u_y - i(1+u_x f'(u)) = u_x m'(u+iy), \quad u_y + i(1+u_x f'(u)) = u_x n'(u-iy),$$

откуда производные u_x и u_y можно выразить в терминах трех величин ρ, τ и u.

$$u_x = -\frac{2i}{m'(\rho)-n'(\tau)+2if'(u)}, \quad u_y = -\frac{i(m'(\rho)+n'(\tau))}{m'(\rho)-n'(\tau)+2if'(u)}.$$

Подставляя их в условие согласованности $du = pdx + qdy$, будем иметь соотношением

$$2idx = -m'(\rho)d\rho + n'(\tau)d\tau - 2if'(u)du,$$

интегрируя которое, получаем

$$x = -f(u) + \frac{i}{2}(m(\rho) - n(\tau)).$$

Согласно формулам (5) и (6) величины ρ и τ взаимно комплексно сопряжены так же, как и другая пара характеристических инвариантов ρ_1 и τ_1. Учитывая этот факт, из последнего соотношения будем иметь

$$x = -f(u) + \frac{i}{2}(m(\rho) - \bar{m}(\rho)) = -f(u) - \operatorname{Im} m(\rho),$$

где $m(\rho)$ — произвольная аналитическая функция. Следовательно, без всяких ограничений отностительно свойств решений приходим к выводу,что независимые переменные x, y и любое решение $u(x,y)$ уравнения (4) связаны между собой функциональным соотношением

$$x + f(u) + v(y,u) = 0, \tag{7}$$

где $v(y,u)$ — произвольная гармоническая функция указанных аргументов. Следует проверить, эквивалентны ли равенство (7) и уравнение (4), или следует ли из соотношения (7) заданное уравнение. Для этого продифференцируем его до второго порядка включительно. Из равенства, полученного однократным дифференцированием по аргументу x соотношения (7), определяем

$$v_u(y,u) + f'(u) = -\frac{1}{u_x} = -\frac{v_y(y,u)}{u_y}. \tag{8}$$

С учетом (8) во всех трех выражениях, полученных двухкратным дифференцированием соотношения (7) по независимым переменным x, y, получаем следующие три равенства

$$v_{uu}(y,u) + f''(u) = \frac{u_{xx}}{(u_x)^3}, \quad \frac{u_y u_{xx}}{(u_x)^2} - \frac{u_{xy}}{u_x} + v_{yu}(y,u)u_x = 0,$$

$$\frac{(u_y)^2 u_{xx}}{(u_x)^3} - \frac{u_{yy}}{u_x} + 2v_{uy}(y,u)u_y + v_{yy}(y,u) = 0.$$

Исключая из последних двух равенств смешанную производную $v_{uy}(y,u)$, имеем

$$\frac{(u_y)^2u_{xx}-(u_x)^2u_{yy}}{(u_x)^3}-2\frac{u_yu_{xx}-u_xu_{xy}}{(u_x)^3}u_y+v_{yy}(y,u)=0.$$

Принимая во внимание, что функция $v(y,u)$ гармонична, определяем значения производной

$$v_{yy}(y,u)=-v_{uu}(y,u)=f''(u)-\frac{u_{xx}}{(u_x)^3},$$

подставляя которую в последнее равенство, приходим к уравнению (4).

Таким образом, заключаем, что без всяких ограничений из уравнения (4) следует соотношение (7) и, наоборот, из соотношения (7) вытекает уравнение (4). Следовательно, равенство (7) вполне можно принять за представление общего интеграла уравнения (4).

3. Приложение общего интеграла к задаче со свободной границей

Для начала рассмотрим задачу (1), (2), (4), предполагая, что число s_0 отлично от нуля и на плоскости x,y имеем как заданную часть границы неизвестной области, так и свободную часть.

Распространим на рассматриваемую задачу метод Даламбера и подчиним общий интеграл (7) условиям (1) и (2). Для этого из соотношений (8) выразим производные $u_x(x,y)$ и $u_y(x,y)$ в терминах произвольного решения уравнения Лапласа $v(y,u)$ и функции $f(u)$, фигурирующей в правой части уравнения (4). Подставляя их значения во второе из условий (2), заданное на свободной части Γ_2 границы неизвестной области D, получаем

$$\beta(s)v_y(\eta(s),\zeta(s))+\gamma(s)v_u(\eta(s),\zeta(s))=-[\alpha(s)+\gamma(s)f'(\zeta(s))],\quad s_0\le s\le l. \tag{9}$$

Принимая во внимание условие (1), которое должно быть удовлетворено на заданной части Γ_1 границы области, для неизвестной гармонической функции $v(y,u)$ на основании представления общего интеграла (7) имеем

$$v(\eta(s),\zeta(s))=-[\xi(s)+f(\zeta(s))],\quad s_0\le s\le l. \tag{10}$$

Таким образом, для неизвестной функции $v(y,u)$ на замкнутой кривой Γ получили соотношения, правые части которых полностью определены параметрами условий задачи и функцией f. Следовательно, нелинейную задачу со свободной границей (1), (2) свели к смешанной задаче (9), (10) для гармонической функций $v(y,u)$ в области, расположенной на плоскости переменных y,u и ограниченной замкнутой жордановой кривой Γ, когда на одной части границы заданы значения самой функции $v(y,u)$, а на другой — значения, вообще говоря, ее наклонной производной. Как видно, направление, по которому берется эта производная, в каждой точке границы Γ определяется функциями $\beta(s)$ и $\gamma(s)$, фигурирующими в краевом условии (2). Направление дифференцирования, определенное условием (9), может быть и касательной, если

$$\beta(s)=\eta'(s),\quad \gamma(s)=\zeta'(s).$$

В таком случае на соответствующей части границы Γ однозначно определяются значения искомой функции $v(y,u)$, и они совместно с условием (10) составляют первую краевую задачу. А в случае, когда

$$\beta(s)=-\zeta'(s),\quad \gamma(s)=\eta'(s), \tag{11}$$

условием (9) на части границы Γ задана производная по направлению конормали от искомой функции $v(y,u)$. Если при этом предположить s_0, будет известно значение $-\xi(0) - f(\zeta(0))$ функции $v(y,u)$ в единственной точке $(\eta(0),\zeta(0))$. На всей же границе Γ будет задана ее производная по конормали, и функцию $v(y,u)$ следует искать как решение задачи Неймана с граничным условием

$$-\zeta'(s)v_y(\eta(s),\zeta(s)) + \eta'(s)v_u(\eta(s),\zeta(s)) = \frac{dv}{d\nu}\bigg|_{\Gamma} = -[\alpha(s)+\gamma(s)f'(\zeta(s))], \quad 0 \le s \le l. \quad (12)$$

Согласно условиям предложения 1 проинтегрированная по границе Γ правая часть равенства (12) равна нулю, что является необходимым для разрешимости полученной задачи (см. [7]). Пусть $w(y,u)+C$ с произвольным постоянным C обозначает регулярное решение этой задачи. Подставим это решение в представлении общего интеграла (7) уравнения (4)

$$x + f(u) + w(y,u) + C = 0.$$

Рассмотрим теперь значения полученного выражения на границе Γ

$$x = -f(\zeta(s)) - w(\eta(s),\zeta(s)) - C. \quad (13)$$

Согласно нашим предположениям относительно функций $\eta(l)=\eta(0)$, $\zeta(l)=\zeta(0)$, а также непрерывности функций $f(u)$ и $w(y,u)$ величина $x(s)$ будет определена на интервале $[0,l]$ в виде непрерывной функции $\xi^*(s)$, принимающей одинаковые значения на концах этого интервала. По условиям задачи задана единственная точка $(\xi(0),\eta(0))$ границы неизвестной области. Учитывая это условие, определяем и произвольную постоянную C. Тем самым, однозначно можно найти неизвестную кривую Γ_2 в параметрическом виде

$$x = \xi(s) \equiv -f(\zeta(s)) - w(\eta(s),\zeta(s)) + f(\zeta(0)) + w(\eta(0),\zeta(0)) + \xi(0),\ y=\eta(s),\ 0 \le s \le l. \quad (14)$$

Во избежание точек самопересечения и других особенностей этой кривой, пользуясь представлением гармонической функции $w(y,u)$ и функции $\xi(s)$ можно установить дополнительные условия относительно параметров задачи. В том случае, когда кривая Γ является окружностью, эти условия получаются без особых затруднений.

Чтобы определить решение задачи (1), (2), (4), потребуется ее интеграл

$$x + f(u) + w(y,u)\xi(0) - f(\zeta(0)) - w(\eta(0),\zeta(0)) = 0 \quad (15)$$

рассмотреть в качестве функционального уравнения относительно величины u. Таким образом, доказано, что требовалось — интегральное условие предложения 1, действительно, является необходимым для существования интеграла задачи (1), (2), (4).

Теперь несколько слов о задаче с наклонной производной. Как известно, задача с наклонной производной может оказаться нефредгольмовой, если направление, по которому взята производная в граничном условии (9), хотя бы в одной точке совпадет с касательным к границе Γ направлением (см., например, [8, 9]). Направление производной функции $v(x,y)$ в левой части условия (9), определенное двухкомпонентным вектором $(\beta(s),\gamma(s))$ ортогонально с нормальным к границе Γ вектором $(-\zeta'(s),\eta'(s))$, если имеет место равенство

$$-\beta(s)\zeta'(s) + \gamma(s)\eta'(s) = 0$$

В таком случае может быть нарушена фредгольмовость задачи с наклонной производной с условием (9) для функции $v(x, y)$ и, следовательно, самой задачи (1), (2), (4). Что и требовалось.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Биркгоф Г., Сарантонело Э.* Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964.

2. *Берс Л.* Математические вопросы дозвукоаой и околозввуковой газовой динамики. М.: ИЛ, 1961.

3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций ломплексного переменного. М.: Ф.-М., 1958.

4. *Dubreil-Jacotin M. L.* Sur la determination rigoureuse des ondes permanents periodiques dempleur Finie // J. Math. Pures Appl. 1934. V. 13, № 3. P. 217–291.

5. *Goursat E.* Lesons sur integration des equations aux derives partielles du second ordre. Tome 2. 1898.

6. *Гвазава Д. К.* О решениях нелинейного вырождающегося эллиптического уравнения Дюбрейль-Жакотен // Доклады расширенных заседаний семинара ИПМ им. И. Н. Векуа. Тбилиси: Изд-во Тбилисского госуниверситета, 1986. С. 23–26.

7. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: ИЛ, 1957.

8. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.

9. *Янушаускас А.* Методы потенциала в теории эллиптических уравнений. Вильнюс: Мокслас, 1990.

Гвазава Джондо Константинович
Грузия, Тбилиси, Математический институт им. А. Размадзе
jgvaza@rmi.acnet.ge