Неклассические уравнения математической физики
2007. С. 158–171

УДК 517.956

О СИЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Т. Ш. Кальменов, У. А. Искакова

В прямоугольной области методом спектрального разложения задачи Коши для уравнения Лапласа с отклоняющимся аргументом установлен критерий сильной разрешимости задачи Коши для уравнения Лапласа.

Как известно, Ж. Адамаром [1] был построен пример, показывающий неустойчивость задачи Коши для уравнения Лапласа относительно малых изменений начальных данных. В работах [2, 3] и др. эта задача с помощью решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа сведена к интегральным уравнениям первого рода, даны различные регуляризации рассматриваемой задачи и установлена ее условная корректность. В настоящей работе методом спектрального разложения оператора Лапласа с отклоняющимся аргументом найден критерий сильной разрешимости задачи Коши для уравнения Лапласа. Для этого сначала рассмотрим вспомогательную задачу.

1. Смешанная задача Коши

Задача. В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < \pi, -1 < t < 1\}$ найти решение уравнения

$$Lu \equiv u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=\pi} = 0 \tag{2}$$

и начальным условиям

$$u\big|_{t=-1} = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=-1} = \varphi_2(x). \tag{3}$$

Определение 1. Функцию $u \in L_2(\Omega)$ назовем *сильным решением* смешанной задачи Коши (1)–(3), если существует последовательность функций $u_n \in C^{\,2}(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих условиям

$$u_n\big|_{x=0} = 0, \quad u_n\big|_{x=\pi} = 0, \quad \frac{\partial u_n}{\partial t}\bigg|_{t=-1} = 0, \quad u_n\big|_{t=-1} = 0$$

и таких что u_n и Lu_n сходятся в норме $L_2(\Omega)$ соответственно к u и f.

В дальнейшем важную роль играет следующая задача на собственные значения для уравнения Лапласа с отклоняющимся аргументом:

$$Lu = u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t) = \lambda u(x,-t), \quad 0 < x < \pi, \ -1 < t < 1 \tag{4}$$

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=\pi} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=-1} = 0, \quad u\big|_{t=-1} = 0. \tag{6}$$

Эквивалентная запись уравнения (4) имеет вид

$$LPu = P(u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t)) = \lambda u(x,t),$$

где $Pu(x,t) = u(x,-t)$.

Собственные функции задачи (4)–(6) ищем методом разделения переменных

$$u_{km}(x,t) = \sin kx \ v_{km}(t), \tag{7}$$

где $k = 1, 2, \ldots$ Тогда для определения $v_{km}(t)$ имеем следующую спектральную задачу для уравнения с отклоняющимся аргументом

$$v''_{km}(t) - k^2 v_{km}(t) = \lambda v_{km}(-t), \quad -1 < t < 1, \tag{8}$$

$$v_{km}(-1) = 0, \quad v'_{km}(-1) = 0. \tag{9}$$

Применяя оператор $\frac{d^2}{dt^2} - k^2$ к обеим частям уравнения (8), имеем

$$v^{(4)}_{km}(t) - 2k^2 v''_{km}(t) + (k^4 - \lambda^2) v_{km}(t) = 0.$$

Подставляя общее решение этого уравнения

$$v_{km}(t) = c_{1m} e^{t\sqrt{k^2+\lambda}}\lambda + c_{2m} e^{-t\sqrt{k^2+\lambda}} + c_{3m} e^{t\sqrt{k^2-\lambda}} + c_{4m} e^{-t\sqrt{k^2-\lambda}}$$

в уравнение (8), получаем окончательный вид общего решения уравнения (8)

$$v_{km}(t) = c_{1m}\left(e^{t\sqrt{k^2+\lambda}} + e^{-t\sqrt{k^2+\lambda}}\right) + c_{2m}\left(e^{t\sqrt{k^2-\lambda}} - e^{-t\sqrt{k^2-\lambda}}\right),$$

или

$$v_{km}(t) = c_{1m}\operatorname{ch}(t\sqrt{k^2+\lambda}) + c_{2m}\operatorname{sh}(t\sqrt{k^2-\lambda}), \tag{10}$$

где c_{1m} и c_{2m} некоторые постоянные. Используя начальные условия (9), приходим к системе линейных однородных уравнений относительно этих постоянных. Как известно, чтобы эта система имела нетривиальное решение, определитель этой системы

$$\triangle(\lambda) = \begin{vmatrix} \operatorname{ch}\sqrt{k^2+\lambda} & -\operatorname{sh}\sqrt{k^2-\lambda} \\ -\sqrt{k^2+\lambda}\operatorname{sh}\sqrt{k^2+\lambda} & \sqrt{k^2-\lambda}\operatorname{ch}\sqrt{k^2-\lambda} \end{vmatrix}$$

должен равняться нулю. Таким образом, для определения параметра λ имеем следующее соотношение

$$\sqrt{k^2-\lambda}\operatorname{ch}\sqrt{k^2+\lambda}\operatorname{ch}\sqrt{k^2-\lambda} - \sqrt{k^2+\lambda}\operatorname{sh}\sqrt{k^2+\lambda}\operatorname{sh}\sqrt{k^2-\lambda} = 0. \tag{11}$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *При фиксированном k спектральная задача (8)–(9) в пространстве $L_2(-1,1)$ имеет полную ортонормированную систему собственных векторов*

$v_{km}(t)$, $m = 1, 2, \ldots$, *соответствующих собственным значениям* λ_{km}, *являющихся корнями уравнения* (11).

Доказательство. Действительно, применяя к задаче Коши (8)–(9) обратный оператор L_C^{-1}, приходим к операторному уравнению

$$v_{km}(t) = \lambda(L_C^{-1} P v_{km})(t),$$

где $Pf(t) = f(-t)$, а функция $\nu(t) = L_C^{-1} f(t)$ является решением задачи Коши

$$\nu\,''(t) - k^2 \nu(t) = f(t), \quad \nu(-1) = \nu\,'(-1) = 0 \quad \forall f(t) \in L_2(-1, 1).$$

Тогда для оператора L_C^{-1} имеем представление

$$L_C^{-1} f(t) = \frac{1}{k} \int\limits_{-1}^{t} f(x) \operatorname{sh} k(t - x) dx \quad \forall f(t) \in L_2(-1, 1). \tag{12}$$

Следовательно, сопряженный оператор имеет вид

$$\left(L_C^{-1}\right)^* f(t) = \frac{1}{k} \int\limits_{t}^{1} f(x) \operatorname{sh} k(x - t) dx, \quad \forall f(t) \in L_2(-1, 1). \tag{13}$$

Учитывая представления (12), (13), нетрудно убедиться, что $L_C^{-1} P f = P \left(L_C^{-1}\right)^* f$. Тогда цепочка равенств

$$L_C^{-1} P f = P \left(L_C^{-1}\right)^* f = P^* \left(L_C^{-1}\right)^* f = \left(L_C^{-1} P\right)^* f, \quad f \in L_2(-1, 1),$$

позволяет заключить, что оператор $L_C^{-1} P$ является вполне непрерывным самосопряженным оператором Гильберта – Шмидта [4]. Следовательно, при каждом $k = 1, 2, \ldots$ спектральная задача (8)–(9) имеет полную ортонормированную систему функций $v_{km}(t)$, $m = 1, 2, \ldots$ в $L_2(-1, 1)$. Лемма доказана.

В силу леммы 1 имеем вещественность собственных значений задачи (8)–(9), т. е. вещественность корней λ_{km} уравнения (11). Легко проверить, что $\lambda_{km} > 0$. Для этого выпишем асимптотику наименьших собственных значений λ_{km} при $k \longrightarrow \infty$.

После нетривиальных преобразований уравнения (11) имеем

$$\frac{(1 + e^{-2\sqrt{k^2+\lambda}})(1 + e^{-2\sqrt{k^2-\lambda}})}{(1 - e^{-2\sqrt{k^2+\lambda}})(1 - e^{-2\sqrt{k^2-\lambda}})} = \sqrt{\frac{k^2 + \lambda}{k^2 - \lambda}} \tag{14}$$

Считая $|\lambda| < 1$ и логарифмируя обе части равенства (14), имеем

$$f_k(\lambda) = \ln\left(\frac{1 + e^{-2\sqrt{k^2+\lambda}}}{1 - e^{-2\sqrt{k^2+\lambda}}}\right) + \ln\left(\frac{1 + e^{-2\sqrt{k^2-\lambda}}}{1 - e^{-2\sqrt{k^2-\lambda}}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{k^2 + \lambda}{k^2 - \lambda}\right) = 0$$

Вычислив производную, получаем $f'_k(0) = -\frac{1}{k^2}$. Тогда искомую границу монотонности функций $f_k(\lambda)$ можно определить из соотношения

$$f'_k(\lambda_0) = f'_k(0) + f''_k(\theta\lambda_0) \cdot \lambda_0 < 0,$$

где $\lambda_0 : 0 < \lambda_0 < 1$, а $\theta \in (0,\ 1)$ — произвольное число. Таким образом, для определения λ_0 имеем условие

$$\lambda_0 k^2 f''_k(\theta\lambda_0) < 1. \tag{15}$$

Распишем явно вторую производную функций $f_k(\lambda)$

$$f_k''(\lambda) = \frac{e^{-2\sqrt{k^2+\lambda}}}{k^2+\lambda} \cdot \frac{2\left(1+e^{-4\sqrt{k^2+\lambda}}\right)}{\left(1-e^{-4\sqrt{k^2+\lambda}}\right)^2} + \frac{1}{(k^2+\lambda)^{3/2}} \cdot \frac{e^{-2\sqrt{k^2+\lambda}}}{1-e^{-4\sqrt{k^2+\lambda}}}$$
$$+ \frac{e^{-2\sqrt{k^2-\lambda}}}{k^2-\lambda} \cdot \frac{2\left(1+e^{-4\sqrt{k^2-\lambda}}\right)}{\left(1-e^{-4\sqrt{k^2-\lambda}}\right)^2} + \frac{1}{(k^2-\lambda)^{3/2}} \cdot \frac{e^{-2\sqrt{k^2-\lambda}}}{1-e^{-4\sqrt{k^2-\lambda}}} - \frac{2\lambda k^2}{(k^4-\lambda^2)^2}\ .$$

Тогда верно неравенство

$$f_k''(\theta\lambda_0) < 2\frac{e^{-2\sqrt{k^2-\theta\lambda_0}}}{k^2-\theta\lambda_0} \cdot \frac{2\left(1+e^{-4\sqrt{k^2-\theta\lambda_0}}\right)}{\left(1-e^{-4\sqrt{k^2-\theta\lambda_0}}\right)^2}$$
$$+ \frac{2}{(k^2-\theta\lambda_0)^{3/2}} \cdot \frac{e^{-2\sqrt{k^2-\theta\lambda_0}}}{1-e^{-4\sqrt{k^2-\theta\lambda_0}}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(k^2-\theta\lambda_0)^2}\ . \quad (16)$$

Оценим вторые сомножители первого и второго слагаемых в правой части неравенства (16)

$$\frac{2\left(1+e^{-4\sqrt{k^2-\theta\lambda_0}}\right)}{\left(1-e^{-4\sqrt{k^2-\theta\lambda_0}}\right)^2} = \frac{1}{\left(1-e^{-2\sqrt{k^2-\theta\lambda_0}}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+e^{-2\sqrt{k^2-\theta\lambda_0}}\right)^2}$$
$$< \frac{2}{\left(1-e^{-2\sqrt{k^2-\theta\lambda_0}}\right)^2},$$

$$\frac{e^{-2\sqrt{k^2-\theta\lambda_0}}}{1-e^{-4\sqrt{k^2-\theta\lambda_0}}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-e^{-2\sqrt{k^2-\theta\lambda_0}}} - \frac{1}{1+e^{-2\sqrt{k^2-\theta\lambda_0}}}\right] < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-e^{-2\sqrt{k^2-\theta\lambda_0}}}.$$

Заметим также, что

$$\frac{1}{1-e^{-2\sqrt{k^2-\theta\lambda_0}}} < \frac{1}{\left(1-e^{-2\sqrt{k^2-\theta\lambda_0}}\right)^2}.$$

Таким образом, неравенство (16) принимает вид

$$f_k''(\theta\lambda_0) < \frac{1}{(k^2-\theta\lambda_0)^{m(k)}}\left[\frac{4e^{-2\sqrt{k^2-\theta\lambda_0}}+1}{\left(1-e^{-2\sqrt{k^2-\theta\lambda_0}}\right)^2} + \frac{1}{2}\right],$$

где $m(k) = \begin{cases} 2, & \text{при } k=1 \\ 1, & \text{при } k>1 \end{cases}$. Далее, имеем

$$f_k''(\theta\lambda_0) < \frac{1}{(k^2-\theta\lambda_0)^{m(k)}}\left[\frac{5}{\left(1-2e^{-2\sqrt{k^2-\theta\lambda_0}}\right)} + \frac{1}{2}\right]$$
$$< \frac{1}{(k^2-\theta\lambda_0)^{m(k)}}\left[5(1+2e^{-2\sqrt{k^2-\theta\lambda_0}}) + \frac{1}{2}\right].$$

Т. е. при больших k справедливо неравенство

$$f_k''(\theta\lambda_0) < \frac{15,5}{k^2-\theta\lambda_0}.$$

К последнему применяя условие (15), получим требуемую границу для λ_0

$$\frac{15,5\lambda_0 k^2}{k^2-\theta\lambda_0} < 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 < \frac{k^2}{15,5k^2+\theta}, \quad k>1, \quad 0<\theta<1.$$

Зафиксируем полученный результат.

Лемма 2. *Существует число* λ_0 *такое, что при* $0<\lambda<\lambda_0<\frac{k^2}{15,5k^2+\theta}$, $k>1$, $\theta\in(0,1)$, *справедливы следующие утверждения*

1) *функция* $f_k'(\lambda)$ *сохраняет постоянный знак;*

2) *для функции* $f_k''(\lambda)$ *выполняется неравенство* $\left|\lambda k^2 f_k''(\lambda)\right|<1$, $k>1$.

Лемма 3. *Асимптотика собственных значений задачи* (8)–(9), *не превосходящих* λ_0, *при больших* k *имеет следующий вид*

$$\lambda_{k1} = 4k^2e^{-2k}(1+o(1)). \tag{17}$$

Доказательство. Согласно лемме 2 монотонная функция $f_k(\lambda)$ на интервале $(0,\ \lambda_0)$ может иметь только один нуль. По формуле Тейлора имеем

$$f_k(\lambda) = f_k(0) + \frac{f_k'(0)}{1!}\lambda + \frac{f_k''(\theta\lambda)}{2!}\lambda^2, \quad 0<\theta\lambda<\lambda.$$

Подставляя вычисленные значения функций и ее производной, получаем

$$f_k(\lambda) = 2\ln\left(\frac{1+e^{-2k}}{1-e^{-2k}}\right) - \frac{\lambda}{k^2} + f_k''(\theta\lambda)\frac{\lambda^2}{2}.$$

Тогда нулем линейной части функции

$$k^2 f_k(\lambda) = 2k^2\ln\left(\frac{1+e^{-2k}}{1-e^{-2k}}\right) - \lambda + k^2 f_k''(\theta\lambda)\frac{\lambda^2}{2}$$

будет

$$\lambda_{k1} = 2k^2\ln\left(\frac{1+e^{-2k}}{1-e^{-2k}}\right).$$

При достаточно больших $k\gg 1$, учитывая асимптотические формулы, последнее соотношение можно записать в виде

$$\lambda_{k1} = 4k^2e^{-2k}(1+o(1)).$$

Учитывая результат леммы 2 на окружности $|\lambda| = 4k^2e^{-2k}(1+\varepsilon)$, где ε — сколь угодное малое положительное число, для достаточно больших $k\geq\ k_0(\varepsilon)$ легко проверить справедливость неравенства

$$\left|f_k''(\theta\lambda)k^2\lambda^2\right|_{|\lambda|=4k^2e^{-2k}(1+\varepsilon)} \leq \left|2k^2\ln\left(\frac{1+e^{-2k}}{1-e^{-2k}}\right)-\lambda\right|_{|\lambda|=4k^2e^{-2k}(1+\varepsilon)}$$

Тогда по теореме Руше [5] имеем, что количество нулей функции $k^2f_k(\lambda)$ и ее линейной части совпадает и они лежат внутри круга $|\lambda|<4k^2e^{-2k}(1+\varepsilon)$. Следовательно, функция $k^2f_k(\lambda)$ при $0<\lambda<\lambda_0$ имеет один нуль, асимптотика которого задается формулой (17). Лемма 3 доказана.

Проведя нормировку функций, определямых формулой (7), получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Спектральная задача Коши* (4)–(6) *имеет полную ортонормированную систему собственных векторов* $u_{km}(x,t) = \sin kx\ v_{km}(t)$, *где* $v_{km}(t)$ *задаются формулой* (10), *а собственные значения* λ_{km} *являются корнями уравнения* (11), *при этом при больших* k *наименьшее собственное значение* λ_{k1} *имеет асимптотику* (17).

Теперь применим найденные спектральные характеристики задачи (4)–(6) для решения задачи Коши (1)–(3). Пусть $u(x,t) \in C^2(\Omega)$ — решение задачи (1)–(3). Тогда в силу полноты и ортонормированности собственных функций $u_{km}(x,t)$ задачи (4)–(6) функцию $u(x,t)$ в пространстве $L_2(\Omega)$ можно разложить в ряд

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{km} u_{km}(x,t) \tag{18}$$

где a_{km} — коэффициенты Фурье по системе $u_{km}(x,t)$. Переписав уравнение (1) в виде

$$LPu = P(u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t)) = Pf(x,t) \tag{19}$$

и подставив решение (18) в равенство (19), с учетом соотношения

$$P\triangle u_{km}(x,t) = \lambda_{km} u_{km}(x,t)$$

имеем

$$a_{km} = \frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}},$$

где

$$\tilde{f}_{km} = \left(f(x,-t),\ u_{km}(x,t)\right)_0.$$

Таким образом, для решения $u(x,t)$ получим следующее представление

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}} u_{km}(x,t). \tag{20}$$

Отметим, что представление (20) остается справедливым для любого сильного решения задачи (1)–(3). Естественно возникает вопрос: для какого подмножества функций $f \in L_2(\Omega)$ существует сильное решение? Для ответа на вопрос преобразуем формулу (20) к следующему виду

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{f}_{k1}}{\lambda_{k1}} u_{k1}(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}} u_{km}(x,t),$$

из которого следует, что

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\tilde{f}_{k1}}{\lambda_{k1}}\right|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \left|\frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}}\right|^2. \tag{21}$$

В силу леммы 3 имеем $\lambda_{km} \geq \frac{1}{17}$, $m > 1$, поэтому правая часть равенства (21) ограничена только для тех $f(x,t)$, для которых ограничена следующая весовая норма

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\tilde{f}_{k1}}{\lambda_{k1}}\right|^2 < \infty. \tag{22}$$

Тем самым доказана

Теорема 2. *Сильное решение смешанной задачи Коши существует тогда и только тогда, когда $f(x,t)$ удовлетворяет неравенству* (22).

Если обозначим через $\bar{L}_C^{-1}$ обратный оператор сильного оператора $\bar{L}_C$, определяемого соотношениями (1)–(3), то из теоремы 2 немедленно следует

Теорема 3. *Оператор $\bar{L}_C^{-1}$ отображает единичный шар $\|f\| \le 1$ в шар $\|u\| \le N$ тогда и только тогда, когда существует $k_0(N)$ такое, что выполняются условия*

$$\tilde{f}_{k1} = (Pf,\ u_{k1})_0 = 0, \quad k = k_0(N), k_0(N)+1, \ldots,$$

где $Pf(x,t) = f(x,-t)$.

Замечание 1. Теоремы 1–3 остаются справедливыми и в случае произвольного прямоугольника $\Omega = \{(x,t):\ a < x < b,\ c < t < d\}$.

Теперь переходим к изучению разрешимости задачи Коши в области Ω.

2. Задача Коши

Задача. Найти решение уравнения

$$Lu \equiv u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{23}$$

удовлетворяющее условиям

$$u\big|_{t=-1} = \tau(x), \quad u_t\big|_{t=-1} = \nu(x). \tag{24}$$

Предположим, что решение $u(x,t) \in C^2(\overline{\Omega})$ существует на боковой границе области Ω и принимает значения

$$u(0,t) = \varphi_1(t), \quad u(\pi,t) = \varphi_2(t),$$

где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — подлежащие определению функции. Таким образом, задача (23), (24) сводится к следующей задаче.

Задача. Найти в области Ω решение уравнения

$$Lu \equiv \triangle u = f, \tag{25}$$

удовлетворяющее условиям

$$u\big|_{t=-1} = \tau(x), \quad u_t\big|_{t=-1} = \nu(x), \tag{26}$$

$$u\big|_{x=0} = \varphi_1(t), \quad u\big|_{x=\pi} = \varphi_2(t). \tag{27}$$

Предполагая выполненными условия

$$\tau(0) = \tau(\pi) = 0, \quad \nu(0) = \nu(\pi) = 0,$$

$$\varphi_1(-1) = \varphi_1'(-1) = 0, \quad \varphi_2(-1) = \varphi_2'(-1) = 0,$$

после линейного преобразования

$$w(x,t) = u(x,t) - \tau(x) - (t+1)\nu(x) - \frac{\pi - x}{\pi}\varphi_1(t) - \frac{x}{\pi}\varphi_2(t)$$

задача (25)–(27)принимает вид

$$Lu = \triangle w = g, \tag{28}$$

$$w\big|_{t=-1} = 0, \quad w_t\big|_{t=-1} = 0, \tag{29}$$

$$w\big|_{x=0} = 0, \quad w\big|_{x=\pi} = 0, \tag{30}$$

где

$$g = g(x,t) = f(x,t) - \tau''(x) - (t+1)\nu''(x) - \frac{\pi - x}{\pi}\varphi_1''(t) - \frac{x}{\pi}\varphi_2''(t). \tag{31}$$

Иначе говоря, мы имеем смешанную задачу Коши, которая рассматривалась в п. 1 и для которой установлен критерий сильной разрешимости (теорема 2). Таким образом, по теореме 2 имеем, что смешанная задача Коши (23), (24) сильно разрешима тогда и только тогда, когда имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{g_{k1}}{\lambda_{k1}}\right|^2 < \infty, \tag{32}$$

где

$$g_{km} = \left(g(x,-t),\ u_{km}(x,t)\right)_0, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

функции $u_{km}(x,t)$ являются собственными функциями спектральной задачи Коши для уравнения Лапласа с отклоняющимся аргументом (4)–(6), свойства которых излагались в теореме 1. Отметим также, что для собственных чисел λ_{k1} имеет место лемма 3.

Определение 2. Будем говорить, что задача Коши (23), (24) *сильно разрешима*, если сильно разрешима соответствующая смешанная задача Коши (25)–(27).

Ниже покажем, что неизвестные боковые значения $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ могут определяться из условия (10). Справедлива следующая

Лемма 4. *Собственные функций $v_{k1}(t)$ спектральной задачи (8), (9) представимы виде*

$$v_{k1}(t) = \operatorname{sh}\left(t\sqrt{k^2 - \lambda_{k1}} + \sqrt{k^2 + \lambda_{k1}}\right)(1 + h_k(t)), \tag{33}$$

где функция $h_k(t)$ монотонно убывает по k на полуинтервале $(-1, 1]$.

Доказательство. Общее решение уравнения (8) имеет вид (10). Из начальных условии (9) имеем окончательный вид (10) при $m = 1$

$$v_{k1}(t) = \operatorname{sh}\sqrt{k^2 - \lambda_{k1}}\operatorname{ch} t\sqrt{k^2 + \lambda_{k1}} + \operatorname{ch}\sqrt{k^2 + \lambda_{k1}}\operatorname{sh} t\sqrt{k^2 - \lambda_{k1}}.$$

Полученное представление с помощью формул сложения для гиперболических функций преобразуем к следующему виду

$$\begin{aligned} 2v_{k1}(t) = {} & \operatorname{sh}(\sqrt{k^2 - \lambda_{k1}} + t\sqrt{k^2 + \lambda_{k1}}) + \operatorname{sh}(\sqrt{k^2 - \lambda_{k1}} - t\sqrt{k^2 + \lambda_{k1}}) \\ & + \operatorname{sh}(t\sqrt{k^2 - \lambda_{k1}} + \sqrt{k^2 + \lambda_{k1}}) + \operatorname{sh}(t\sqrt{k^2 - \lambda_{k1}} - \sqrt{k^2 + \lambda_{k1}}). \end{aligned} \tag{34}$$

Разлагая в степенной ряд аргументы гиперболических синусов при $k \longrightarrow \infty$ имеем

$$t\sqrt{1 - \frac{\lambda_{k1}}{k^2}} + \sqrt{1 + \frac{\lambda_{k1}}{k^2}} = (1+t)\alpha\left(\frac{\lambda_{k1}}{k^2}\right) + (1-t)\beta\left(\frac{\lambda_{k1}}{k^2}\right),$$

$$t\sqrt{1 - \frac{\lambda_{k1}}{k^2}} - \sqrt{1 + \frac{\lambda_{k1}}{k^2}} = (t-1)\alpha\left(\frac{\lambda_{k1}}{k^2}\right) - (1+t)\beta\left(\frac{\lambda_{k1}}{k^2}\right),$$

$$\sqrt{1-\frac{\lambda_{k1}}{k^2}}-t\sqrt{1+\frac{\lambda_{k1}}{k^2}}=(1-t)\alpha\left(\frac{\lambda_{k1}}{k^2}\right)-(1+t)\beta\left(\frac{\lambda_{k1}}{k^2}\right),$$

$$\sqrt{1-\frac{\lambda_{k1}}{k^2}}+t\sqrt{1+\frac{\lambda_{k1}}{k^2}}=(1+t)\alpha\left(\frac{\lambda_{k1}}{k^2}\right)+(t-1)\beta\left(\frac{\lambda_{k1}}{k^2}\right),$$

где

$$\alpha(x)=1+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4+\ldots,\quad p=\frac{1}{2},$$

$$\beta(x)=p\,x+\frac{p(p-1)(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5+\ldots,\quad p=\frac{1}{2}.$$

Заметим, что $v_{k1}(t)$ асимптотически равна $\operatorname{sh} k(t+1)$ при $k\longrightarrow\infty$, если, учитывая эти разложения, вновь сложить синусы в формуле (34). Для уточнения вида $h_k(t)$ преобразуем первое слагаемое представления (34) следующим образом

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sh}(\sqrt{k^2-\lambda_{k1}}+t\sqrt{k^2+\lambda_{k1}})\\
&\qquad=\operatorname{sh}(\sqrt{k^2+\lambda_{k1}}+t\sqrt{k^2-\lambda_{k1}})(\operatorname{ch}(1-t)(\sqrt{k^2+\lambda_{k1}}-\sqrt{k^2-\lambda_{k1}})\\
&\qquad\quad-\operatorname{sh}(1-t)(\sqrt{k^2+\lambda_{k1}}-\sqrt{k^2-\lambda_{k1}})\operatorname{cth}(\sqrt{k^2+\lambda_{k1}}+t\sqrt{k^2-\lambda_{k1}})).
\end{aligned}$$

На основании формулы Лагранжа справедливо равенство

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ch}(1-t)(\sqrt{k^2+\lambda_{k1}}-\sqrt{k^2-\lambda_{k1}})\\
&=1+\frac{1}{2}(1-t)\left((\sqrt{k^2+\lambda_{k1}}-\sqrt{k^2-\lambda_{k1}})^2\right)'\operatorname{sh}(1-t)\theta(\sqrt{k^2+\lambda_{k1}}-\sqrt{k^2-\lambda_{k1}}),
\end{aligned}$$

где θ — произвольное число из интервала $\left(0,4ke^{-2k}\right)$, $k=1,2,\ldots$ Сложив второе и четвертое слагаемое, затем учитывая вышеизложенные рассуждения, получаем представление (33), где $h_k(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned}
h_k(t)&=\frac{1}{4}(1-t)\left((\sqrt{k^2+\lambda_{k1}}-\sqrt{k^2-\lambda_{k1}})^2\right)'\operatorname{sh}(1-t)\theta(\sqrt{k^2+\lambda_{k1}}-\sqrt{k^2-\lambda_{k1}})\\
&\quad-\frac{1}{2}\operatorname{sh}(1-t)(\sqrt{k^2+\lambda_{k1}}-\sqrt{k^2-\lambda_{k1}})\operatorname{cth}(\sqrt{k^2+\lambda_{k1}}+t\sqrt{k^2-\lambda_{k1}})\\
&\qquad-\frac{\operatorname{sh}\frac{1+t}{2}(\sqrt{k^2+\lambda_{k1}}-\sqrt{k^2-\lambda_{k1}})\operatorname{ch}\frac{1-t}{2}(\sqrt{k^2+\lambda_{k1}}+\sqrt{k^2-\lambda_{k1}})}{\operatorname{sh}(\sqrt{k^2+\lambda_{k1}}+t\sqrt{k^2-\lambda_{k1}})}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Имеет место следующая основная теорема.

Теорема 4. *Система гиперболических синусов* $\{\operatorname{sh} kt\}$, *где* $k=k_1,k_2,\ldots$, *является полной в* $L_2(0,1)$.

Доказательство. Пусть $\overline{L}$ — замыкание дифференциального оператора

$$Lu\equiv(A-k_i^2I)u=g(t),\quad t\in(0,1),\quad A=\frac{d^2}{dt^2},\tag{35}$$

при граничных условиях

$$u(1)=u'(1)=0,\quad u(0)=0.\tag{36}$$

Очевидно, что оператор $\overline{L}$ является замкнутым, т. к. порождается переопределенными граничными условиями. Обозначим через $\overline{L}^*$ сопряженный оператор к $\overline{L}$, который определяется дифференциальным выражением

$$\overline{L}^* v = \left(\frac{d^2 v}{dt^2} - k_i^2\right) v = \widetilde{g}(t), \quad t \in (0,1), \tag{37}$$

и граничным условием

$$v(0) = 0. \tag{38}$$

Поскольку оператор $\overline{L}$ является замкнутым оператором, то для разрешимости задачи (35), (36) (т. е. для обратимости оператора $\overline{L}$) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие [4]

$$(g(t), \operatorname{sh} k_i t) = 0, \tag{39}$$

где функция $\operatorname{sh} k_i t$ — решение однородной задачи (37), (38).

Представим оператор $\overline{L}$, определяемый выражением (35), следующим образом

$$\overline{L}u = \left(I - k_i^2 A^{-1}\right) Au = g(t), \quad t \in (0,1).$$

Тогда $\overline{L}^{-1}$ представляется через ряд Неймана [4]

$$u = \overline{L}^{-1} u = A^{-1}\left(I - k_i^2 A^{-1}\right)^{-1} g = \sum_{j=0}^{\infty} \left(k_i^2\right)^j A^{-j-1} g, \tag{40}$$

где A^{-j} есть j-ая степень обратного к оператору

$$Au = \frac{d^2 u}{dt^2}, \quad D(A) = \{u \in C^1[0,1],\ u(1) = u'(1) = 0\},$$

следовательно, имеет вид

$$A^{-j} f = \int_1^t \frac{(t-\xi)^j}{j!} g(\xi)\, d\xi.$$

Подставив найденное представление решения (40) в последнее из условий (36), получаем

$$\left(A^{-1} g\right)\big|_{t=0} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(k_i^2\right)^j \left(A^{-j-1} g\right)\big|_{t=0} = 0. \tag{41}$$

Если ввести обозначение

$$c_1 = \left(A^{-1} g\right)\big|_{t=0}, \quad c_j = \left(A^{-j-1} g\right)\big|_{t=0},$$

то соотношение (41) определяет бесконечную систему линейных однородных уравнений относительно $\{c_j\}$ с определителем

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & k_1^2 & (k_1^2)^2 & \ldots & (k_1^2)^{n-1} & \ldots \\ 1 & k_2^2 & (k_2^2)^2 & \ldots & (k_2^2)^{n-1} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & k_n^2 & (k_n^2)^2 & \ldots & (k_n^2)^{n-1} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Значение $\triangle$ определяется как

$$\triangle = \lim_{n \longrightarrow \infty} \triangle_n,$$

где $\triangle_n$ — определитель Вандермонда [6] порядка n

$$\triangle_n = \prod_{1 \le i < j \le n} (k_j^2 - k_i^2).$$

Следовательно, система имеет только тривиальное решение, т. е.

$$c_j = \int_0^1 \frac{(\xi)^j}{j!} g(\xi) d\xi = 0, \quad j = 0, 1, \ldots$$

Отсюда из полноты системы $\{\xi^j\}$, $j = 0, 1, \ldots$, имеем

$$g(\xi) = 0.$$

Учитывая соотношение (39), убеждаемся в справедливости утверждения теоремы.

Следствие 1. *Системы функций* $\{\operatorname{sh} 2kt\}$, $\{\operatorname{sh}(2k+1)t\}$, $\{\operatorname{sh} kt\}$ *одновременно полны в* $L_2(0,1)$ *при любом* $k = k_0, k_0 + 1, \ldots$

Следствие 2. *Система гиперболических косинусов* $\{\operatorname{ch} kt\}$ *является полной в* $L_2(0,1)$.

Следствие 3. *Система функций* $v_{k1}^0(t) = \operatorname{sh}\left(\sqrt{k^2 + \lambda_{k1}} + t\sqrt{k^2 - \lambda_{k1}}\right)$ *полна в* $L_2(-1,1)$.

Действительно, в силу замены

$$\xi = \frac{1}{2(k+1)} \left(\sqrt{k^2 + \lambda_{k1}} + t\sqrt{k^2 - \lambda_{k1}}\right)$$

имеем

$$v_{k1}^0(t) = \operatorname{sh} 2(k+1)\xi,$$

где

$$\xi \in \left(\frac{\sqrt{k^2 + \lambda_{k1}} - \sqrt{k^2 - \lambda_{k1}}}{2(k+1)}, \frac{\sqrt{k^2 + \lambda_{k1}} + \sqrt{k^2 - \lambda_{k1}}}{2(k+1)}\right) \subseteq (0,1)$$

при $t \in (-1,1)$.

На основании предыдущих утверждений (лемма 4, теорема 4 и следствия) нетрудно доказать справедливость следующей теоремы.

Теорема 5. *Система собственных функций* $\{v_{k1}(t)\}$ *полна в* $L_2(-1,1)$ *при* $k = k_0, k_0 + 1, \ldots$ *Эта система функций также полна при четных* $k = 2m$ *и нечетных* $k = 2m+1$, *где* k_0 *— любое целое положительное число.*

Теперь введем обозначения

$$f_{k1} = (f(x,-t), u_{k1}(x,t)) = \int_{-1}^{1}\int_0^{\pi} f(x,-t) \sin kx\, v_{k1}(t)\, dxdt,$$

$$\tau_{k1} = (\tau''(x), u_{k1}(x,t)) = \int_{-1}^{1}\int_0^{\pi} \tau''(x) \sin kx\, v_{k1}(t)\, dxdt,$$

$$\nu_{k1} = ((1+t)\tau''(x), u_{k1}(x,-t)) = \int_{-1}^{1}\int_0^{\pi} \nu''(x) \sin kx (1-t) v_{k1}(t)\, dxdt,$$

$$\left(\frac{\pi - x}{\pi}\varphi_1''(t), u_{k1}(x,-t)\right) = \frac{1}{k}\int_{-1}^{1} \varphi_1''(-t) v_{k1}(t) dt = \frac{1}{k}\varphi_{1k1}, \tag{42}$$

$$\left(\frac{x}{\pi}\varphi_2''(t), u_{k1}(x,-t)\right) = -\frac{(-1)^k}{k}\int\limits_{-1}^{1}\varphi_2''(-t)v_{k1}(t)dt = -\frac{(-1)^k}{k}\varphi_{2k1}. \qquad (43)$$

Тогда в силу соотношений (31) и (32) имеем

$$g_{k1} = f_{k1} - \tau_{k1} - \nu_{k1} - \frac{1}{k}\varphi_{1k1} + \frac{(-1)^k}{k}\varphi_{2k1},$$

$$\frac{g_{k1}}{\lambda_{k1}} = d_{k1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}|d_{k1}|^2 < \infty. \qquad (44)$$

Имеет место

Лемма 5. *Пусть $f(t) \in L_2(-1,1)$ и выполнены условия*

$$\left|\int\limits_{-1}^{1} f(t)v_{k1}(t)dt\right| \le 4k^3e^{-2k}\varepsilon, \quad k = k_0, k_0+1, \ldots,$$

где $\varepsilon > 0$. Тогда $f(t) \equiv 0$.

Лемма 5 доказывается с помощью применения теоремы Фрагмена – Линделефа [5] к аналитической функции

$$\int\limits_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{sh}\, zt dt = Q(z), \quad 0 < |\arg z| \le \frac{\pi}{8}.$$

В силу леммы 5 при $\tau \equiv \nu \equiv f \equiv 0$, учитывая представления (42), (43), нетрудно показать, что $\varphi_{1k1} = \varphi_{2k1} = 0$, т. е. $\varphi_1(t) = 0$, $\varphi_2(t) = 0$. Следовательно, $w(x,t) \equiv u(x,t) \equiv 0$, что и доказывает единственнось решения задачи Коши.

Обозначим через (p_{kj}) матрицу перехода от полной системы $\{v_{k1}\}$ к полной ортонормированной системе $\{\psi_{k1}\}$

$$\psi_{k1} = \sum_{j=1}^{k} p_{kj}v_{j1}$$

по схеме Шмидта [4]

$$\begin{aligned}\psi_{11}(t) &= \frac{v_{11}(t)}{\|v_{11}\|}, \quad \psi_{21}(t) = \frac{v_{21} - (v_{21},\psi_{11})\psi_{11}}{\|v_{21} - (v_{21},\psi_{11})\psi_{11}\|}, \ \ldots, \\ \psi_{k1}(t) &= \frac{v_{k1} - (v_{k1},\psi_{1,1})\psi_{1,1} - \ldots - (v_{k1},\psi_{k-1,1})\psi_{k-1,1}}{\|v_{k1} - (v_{k1},\psi_{1,1})\psi_{1,1} - \ldots - (v_{k1},\psi_{k-1,1})\psi_{k-1,1}\|}.\end{aligned} \qquad (45)$$

Отметим, что при $v_{k1}(t) = t^{2k}$

$$\psi_{k1} = \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2}\right)^k F\left(-k, k+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t^2\right),$$

где $F(a,b,c,z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса [7].

Имеет место

Лемма 6. *Пусть $g(t) \in L_2(-1,1)$ и заданы коэффициенты Фурье по полной системе $\{v_{k1}\}$*

$$g_k = \int_{-1}^{1} g(t) v_{k1}(t) dt.$$

Коэффициенты Фурье g_k однозначно определяют функцию $g(t) \in L_2(-1,1)$ по ортонормированной системе $\{\psi_{k1}\}$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{k} p_{kj} g_j \right|^2 < \infty,$$

где коэффициенты p_{kj} определяются из соотношения (45).

Пусть $v^+_{2k,1}(t)$, $v^-_{2k+1,1}(t)$ — ортонормированные системы, порожденные полными системами $v_{2k,1}(t)$, $v_{2k+1,1}(t)$ соответственно. Тогда в силу (45) имеем

$$v^+_{2k,1}(t) = \sum_{j=1}^{k} p^+_{2k,2j} v_{2j,1},$$

$$v^-_{2k+1,1}(t) = \sum_{j=1}^{k} p^-_{2k+1,2j+1} v_{2j+1,1},$$

где $(p^+_{2k,2j})$ и $(p^-_{2k+1,2j+1})$ — соответствующие матрицы перехода.

Учитывая представления (42), (43) и соотношения (44), при четном k имеем

$$\int_{-1}^{1} (\varphi_1''(-t) - \varphi_2''(-t)) v_{2k,1}(t) = 2k(f_{2k,1} - \tau_{2k,1} - \nu_{2k,1} - d_{2k,1}\lambda_{2k,1}),$$

аналогично при нечетном k

$$\int_{-1}^{1} (\varphi_1''(-t) + \varphi_2''(-t)) v_{2k+1,1}(t)$$
$$= (2k+1)(f_{2k+1,1} - \tau_{2k+1,1} - \nu_{2k+1,1} - d_{2k+1,1}\lambda_{2k+1,1}).$$

Тогда в силу леммы 6 функция $\varphi_1''(-t) - \varphi_2''(-t)$ однозначно определяется тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{k} p^+_{2k,2j} 2j (f_{2j,1} - \tau_{2j,1} - \nu_{2j,1} - d_{2j,1}\lambda_{2j,1}) \right|^2 < \infty. \tag{46}$$

Аналогично функция $\varphi_1''(-t) + \varphi_2''(-t)$ однозначно определяется тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{k} p^-_{2k+1,2j+1} (2j+1)(f_{2j+1,1} - \tau_{2j+1,1} - \nu_{2j+1,1} - d_{2j+1,1}\lambda_{2j+1,1}) \right|^2 < \infty. \tag{47}$$

Тем самым доказана

Теорема 6. *Пусть* $\tau(x)$, $\nu(x) \in C^3([0,\pi])$, $f \in L_2(\Omega)$, $\tau(0) = \tau(\pi) = 0$, $\nu(0) = \nu(\pi) = 0$. *Задача Коши* (23), (24) *сильно разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования* (46), (47).

Замечание 2. Теорему 6 можно обобщить для операторного уравнения

$$\frac{d^2}{dt^2}u - Au = f,$$

используя спектральное разложение линейного несамосопряженного оператора A.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 352 с.
2. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 142 с.
3. *Лаврентьев М. М.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1956. Т. 20, № 6. С. 819–842.
4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
5. *Титчмарш Е.* Теория функций. М.: Наука, 1980. 463 с.
6. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра. М.: Наука, 1974. 295 с.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Физ.-мат. лит., 1974. 294 с.
8. *Кальменов Т. Ш., Искакова У. А.* Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа // Докл. РАН. 2007. Т. 414, № 2. С. 168–171.

Кальменов Тынысбек Шарипович
Казахстан, Алматы, Центр физико-математических исследований

Искакова Улзада Асиловна
Казахстан, Алматы, Центр физико-математических исследований
ulzada@list.ru