Неклассические уравнения математической физики
2007. С. 182–196

УДК 517.9

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕИЗВЕСТНЫМ МЛАДШИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В СЛУЧАЕ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ НА ВРЕМЕННЫХ СЛОЯХ

О. А. Колтуновский

В работе методами априорных оценок, регуляризации и неподвижной точки доказаны теоремы существования и единственности решения обратной коэффициентной задачи для одномерного гиперболического уравнения в случае переопределения на временных слоях.

В прямоугольнике $D = \{(x,t)\colon 0 < x < 1,\, 0 < t < T < +\infty\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + q(x,t)u_t = f_0(x,t), \tag{1}$$

где коэффициент

$$q(x,t) = \sum_{k=1}^{m} a_k(x,t)q_k(x),$$

функции $f_0(x,t)$, $a_k(x,t)$ $(k = 1,\dots,m)$ — известны и заданы при $(x,t) \in \overline{D}$.

В работе рассматривается

Обратная задача. Найти функции $u(x,t)$ и $q_k(x)$ $(k = 1,\dots,m)$, связанные в D уравнением (1) и такие, что выполняются условия

$$u(0,t) = \mu_0(t), \quad u(1,t) = \mu_1(t), \quad 0 < t < T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 < x < 1, \tag{3}$$

$$u_t(x,0) = u_1(x), \quad 0 < x < 1, \tag{4}$$

$$u(x,t_k) = \overline{u}_{0k}(x), \quad (k = 1,\dots,m), \quad 0 < x < 1. \tag{5}$$

Функции $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\overline{u}_{0k}(x)$ $(k = 1,\dots,m)$ — известны и заданы при $x \in [0,1]$, $t \in [0,T]$, числа t_k заданы и удовлетворяют неравенству $0 < t_1 < \ldots < t_m = T$.

Условия (2)–(4) являются условиями первой начально-краевой задачи для гиперболического уравнения (1). Условия (5) — условия переопределения на временных слоях, позволяющие найти вместе с решением $u(x,t)$ и неизвестные компоненты коэффициента $q(x,t)$ — функции $q_k(x)$ $(k = 1,\dots,m)$. Так как неизвестными являются решение и коэффициент уравнения (1), то обратная задача будет нелинейной. Нелинейные обратные задачи для гиперболических уравнений в различных постановках изучались в работах [7–13] и в ряде других, однако в

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 06-01-00439 и интеграционного проекта СО РАН № 48

вышеприведенной постановке подобные задачи ранее не изучались. Методы исследования, применяемые в данной работе, близки к методам [6].

Сделаем следующее

Предположение 1. Существует функция $U = U(x,t)$ из класса $C^4(\overline{D})$, удовлетворяющая граничным условиям (2)–(4).

Произведем замену $u(x,t) = v(x,t) + U(x,t)$ и переформулируем обратную задачу: требуется найти функции $v(x,t)$ и $q_k(x)$ $(k = 1,\dots,m)$, связанные в прямоугольнике D уравнением

$$v_{tt} - v_{xx} + q(x,t)u_t = f(x,t) \tag{1'}$$

при выполнении условий

$$v(0,t) = 0, \quad v(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \tag{2'}$$

$$v(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{3'}$$

$$v_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{4'}$$

$$v(x,t_k) = \overline{u}_k(x), \quad (k = 1,\dots,m), \quad 0 < x < 1. \tag{5'}$$

Функции $f(x,t)$ и $\overline{u}_k(x)$ равны соответственно

$$f(x,t) = f_0(x,t) - (U_{tt} - U_{xx}),$$
$$\overline{u}_k(x) = \overline{u}_{0k}(x) - U(x,t_k), \quad (k = 1,\dots,m).$$

Полагая в $(1')$ $t = 0$, $t = t_1,\dots,t = t_m$, получим равенства

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k(x,0)q_k(x) = \frac{f(x,0) - v_{tt}(x,0)}{u_1(x)}, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k(x,t_i)q_k(x) = \frac{f(x,t_i) - v_{tt}(x,t_i) + \overline{u}_i''(x)}{u_t(x,t_i)}, \end{cases} \tag{6}$$
$$(i = 1,\dots,m).$$

Из последних m равенств определим функции $q_k(x)$:

$$q_k(x) = \frac{\Delta_{1k}^v(x) - \Delta_{2k}^v(x)}{\Delta(x)},$$

где определители $\Delta(x)$, $\Delta_{1k}^v(x)$ и $\Delta_{2k}^v(x)$ равны соответственно

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} a_1(x,t_1) & \cdots & a_m(x,t_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1(x,t_m) & \cdots & a_m(x,t_m) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{1k}^v(x) = \begin{vmatrix} a_1(x,t_1) & \cdots & \dfrac{f(x,t_1) + \overline{u}_1''(x)}{u_t(x,t_1)} & \cdots & a_m(x,t_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1(x,t_m) & \cdots & \dfrac{f(x,t_m) + \overline{u}_m''(x)}{u_t(x,t_m)} & \cdots & a_m(x,t_m) \end{vmatrix}$$

(в $\Delta(x)$ изменен k-ый столбец),

$$\Delta_{2k}^v(x) = \begin{vmatrix} a_1(x,t_1) & \cdots & \dfrac{v_{tt}(x,t_1)}{u_t(x,t_1)} & \cdots & a_m(x,t_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1(x,t_m) & \cdots & \dfrac{v_{tt}(x,t_m)}{u_t(x,t_m)} & \cdots & a_m(x,t_m) \end{vmatrix}$$

(в $\Delta(x)$ изменен k-ый столбец).

Найденные значения $q_k(x)$ подставим в первое равенство системы (6), получим

$$v_{tt}(x,0)=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^v(x)v_{tt}(x,t_k)+\beta^v(x), \tag{7}$$

где

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_k^v(x)v_{tt}(x,t_k)=\frac{u_1(x)}{\Delta(x)}\sum_{k=1}^{m}a_k(x,0)\Delta_{2k}^v(x),$$
$$\beta^v(x)=f(x,0)-\frac{u_1(x)}{\Delta(x)}\sum_{k=1}^{m}a_k(x,0)\Delta_{1k}^v(x).$$

Определим пространства функций, используемые далее:

$$\begin{aligned}V=&\{v(x,t):v(x,t)\in W_2^2(D)\cap L_\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)),\\ &v_t(x,t)\in W_2^2(D)\cap L_\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)), v_{tt}(x,t)\in L_\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1))\},\\ \widetilde{V}=&\{v(x,t):v(x,t)\in V,\ v_{xxtt}(x,t)\in L_2(D)\}.\end{aligned}$$

Нормы в этих пространствах определяются равенствами

$$\begin{aligned}\|v\|_V=&\|v\|_{W_2^2(D)}+\|v\|_{L_\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1))}+\|v_t\|_{W_2^2(D)}+\|v_t\|_{L_\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1))}\\ &+\|v_{tt}\|_{L_\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1))},\\ \|v\|_{\widetilde{V}}=&\|v\|_V+\|v_{xxtt}\|_{L_2(D)}.\end{aligned}$$

Определим множества функций V^* и $\widetilde{V}^*$ из введенных пространств V и $\widetilde{V}$:

$$\begin{aligned}V^*=&\{v(x,t):v(x,t)\in V,\ 0<u_1^*\leqslant v_t(x,t_k)+U_t(x,t_k)\leqslant u_2^*<+\infty,\\ &|v_{xt}(x,t_k)+U_{xt}(x,t_k)|\leqslant\overline{u}^*<+\infty,\ k=1,\dots,m\},\\ \widetilde{V}^*=&\{v(x,t):v(x,t)\in V^*,\ v_{xxtt}(x,t)\in L_2(D)\}.\end{aligned}$$

Пусть при $x\in[0,1]$ справедливы неравенства $(k=1,\dots,m)$:

$$0<E_1\leqslant f(x,t_k)+\overline{u}_k''(x)\leqslant E_2. \tag{8}$$

Обозначим

$$\widetilde{\Delta}_k=\min_{\substack{x\in[0,1]\\ e\in[E_1,E_2]\\ u\in[u_1^*,u_2^*]}}\Delta_k(x,e,u),\quad \widetilde{\widetilde{\Delta}}_k=\max_{\substack{x\in[0,1]\\ e\in[E_1,E_2]\\ u\in[u_1^*,u_2^*]}}\Delta_k(x,e,u),$$

где определитель $\Delta_k(x,e,u)$ получен из определителя $\Delta(x)$ заменой k-го столбца на столбец из чисел $\dfrac{e}{u}$.

Возьмем число $\delta\in(0,1)$, введем следующие функции

$$\sigma_k(\xi)=\begin{cases}\xi, & \text{если } |\xi|\leqslant\delta\Delta_k\\ -\delta\Delta_k, & \text{если } \xi\leqslant-\delta\Delta_k\\ \delta\Delta_k, & \text{если } \xi\geqslant\delta\Delta_k\end{cases}\quad (k=1,\dots,m)$$

и для функции $p(x,t)$, заданной в прямоугольнике $\overline{D}$, определим коэффициент

$$Q_p(x,t) = \sum_{k=1}^{m} a_k(x,t)\,\frac{\Delta_{1k}^p(x) - \sigma_k(\Delta_{2k}^p(x))}{\Delta(x)}\,.$$

Исследуем вспомогательную задачу: требуется найти функцию $v(x,t)$, которая удовлетворяет в прямоугольнике D уравнению ($\varepsilon > 0$)

$$-\varepsilon v_{ttxx} + v_{ttt} - v_{xxt} + (Q_v v_t)_t = F_v(x,t), \tag{9}$$

где функция $F_v(x,t) = f_t(x,t) - (Q_v(x,t)U_t(x,t))_t$, а также условиям (2′), (3′), (4′) и (7). Заметим, что уравнение (8) — нелинейное нагруженное [1, 2] уравнение составного типа, для которого поставлена нелокальная, ввиду условия (7), задача. Обозначим через D_k прямоугольник: $D_k = \{(x,t)\colon 0 < x < 1,\ 0 < t < t_k\}$ и определим функции, матрицы и постоянные, которые понадобятся ниже:

$$\Delta^* = \min_{[0,1]}\Delta(x),\quad \Delta^{**} = \max_{[0,1]}\Delta(x),\quad \widetilde{\Delta} = \min_{1\leqslant k\leqslant m}\widetilde{\Delta}_k,\quad \widetilde{\widetilde{\Delta}} = \max_{1\leqslant k\leqslant m}\widetilde{\widetilde{\Delta}}_k,$$

$$F_{0k} = \|f_t\|_{L_\infty(D_k)} + (1+\delta)\,\frac{\widetilde{\widetilde{\Delta}}}{\Delta^*}\left\{\max_{\overline{D}_k}|U_{tt}|\cdot\sum_{i=1}^{m}\max_{\overline{D}_k}|a_i| + \max_{\overline{D}_k}|U_t|\cdot\sum_{i=1}^{m}\max_{\overline{D}_k}|a_{it}|\right\},$$

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_{0k} =& \|f_{tt}\|_{L_\infty(D_k)} + (1+\delta)\,\frac{\widetilde{\widetilde{\Delta}}}{\Delta^*}\left\{\max_{\overline{D}_k}|U_{ttt}|\cdot\sum_{i=1}^{m}\max_{\overline{D}_k}|a_i|\right.\\ &\left.+ 2\max_{\overline{D}_k}|U_{tt}|\cdot\sum_{i=1}^{m}\max_{\overline{D}_k}|a_{it}| + \max_{\overline{D}_k}|U_t|\cdot\sum_{i=1}^{m}\max_{\overline{D}_k}|a_{itt}|\right\},\end{aligned}$$

$$A_k(x) = \frac{u_1(x)}{\Delta(x)}\sum_{i=1}^{m} a_i(x,0)A_{ki}(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

где $A_{ki}(x)$ — алгебраические дополнения элементов $\Delta(x)$,

$$\overline{\alpha}_k = \frac{1}{u_1^*}\max_{[0,1]}|A_k(x)|,\quad \overline{\overline{\alpha}}_k = \frac{1}{u_1^*}\max_{[0,1]}|A_k'(x)| + \frac{1}{(u_1^*)^2}\max_{[0,1]}|A_k(x)|\,\overline{u}^{\,*},$$

$$\overline{\beta} = \|f(x,0)\|_{L_\infty(0,1)} + mE_2\max_{1\leqslant k\leqslant m}\overline{\alpha}_k,\quad \overline{E} = \max_{1\leqslant k\leqslant m}\|f_x(x,t_k) + \overline{u}_k'''(x)\|_{L_\infty(0,1)},$$

$$\overline{\overline{\beta}} = \|f_x(x,0)\|_{L_\infty(0,1)} + m\overline{E}\cdot\max_{1\leqslant k\leqslant m}\overline{\alpha}_k + mE_2\cdot\max_{1\leqslant k\leqslant m}\overline{\overline{\alpha}}_k,$$

$$\widetilde{Q}_k = \frac{(1-\delta)\widetilde{\Delta}}{\Delta^{**}}\sum_{i=1}^{m}\min_{\overline{D}_k}|a_i(x,t)|,\quad \widetilde{\widetilde{Q}}_k = \frac{(1+\delta)\widetilde{\widetilde{\Delta}}}{\Delta^*}\sum_{i=1}^{m}\max_{\overline{D}_k}|a_i(x,t)|,$$

$$\begin{aligned}\Phi_0 =& \sum_{k=1}^{m}\left[F_{0k}^2\left(\frac{7}{3}\,t_k^3 + 4t_k\right) + \frac{14}{3}\,\widetilde{F}_{0k}^2 t_k^3\right]\\ &+ \left(\sum_{k=1}^{m}t_k\right)[(m+1)\overline{\beta}^{\,2} + (2m+1)\overline{\overline{\beta}}^{\,2}] + \frac{\widetilde{\widetilde{Q}}}{\widetilde{Q}}\,\frac{\max\limits_{[0,1]}a(x,t)}{\min\limits_{[0,1]}a(x,t)}\,(m+1)\overline{\beta}^{\,2},\end{aligned}$$

$$\bar{t}_i = t_i - 2\left(\sum_{k=1}^{m}t_k\right)[(m+1)\overline{\alpha}_i^{\,2} + (2m+1)\overline{\overline{\alpha}}_i^{\,2}],$$

$$\bar{\bar{t}}_i = t_i - 4\left(\sum_{k=1}^{m}t_k\right)(2m+1)\overline{\alpha}_i^{\,2},\quad a(x,t) = \sum_{k=1}^{m}a_k(x,t),$$

$A_k(x,t)$ — матрица квадратичной формы относительно переменных $v_{xxt}(x,t)$, $v_{ttt}(x,t)$, $v_{tt}(x,t)$, $v_t(x,t)$:

$$A_k(x,t)=\begin{pmatrix} 1/2 & 2\,\widetilde{\widetilde{Q}}_k a t_k & 8\,\widetilde{\widetilde{Q}}_k a t_k & \widetilde{\widetilde{Q}}_k a_t \\ 2\,\widetilde{\widetilde{Q}}_k a t_k & 7/8 & 0 & (1/2)\,\widetilde{\widetilde{Q}}_k a_t \\ 8\,\widetilde{\widetilde{Q}}_k a t_k & 0 & (1/2)(1-\widetilde{\widetilde{Q}}_k a_t)+2\,\widetilde{Q}_k t_k & 0 \\ \widetilde{\widetilde{Q}}_k a_t & (1/2)\,\widetilde{\widetilde{Q}}_k a_t & 0 & \widetilde{Q}_k(a_t+t_k\,|a_{tt}|) \end{pmatrix}$$

(здесь $a\equiv a(x,t)$), $B_k(x,t_k)$ — матрица квадратичной формы относительно переменных $v_{xtt}(x,t_k)$, $v_{tt}(x,t_k)$, $v_t(x,t_k)$, $v_{xxt}(x,t_k)$, $v_{xt}(x,t_k)$

$$B_k(x,t_k)=\begin{pmatrix} 2\,\bar{\bar{t}}_k & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2\,\bar{t}_k & 0 & \widetilde{\widetilde{Q}}_k a t_k & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{Q}_k a_t t_k & \widetilde{\widetilde{Q}}_k a_t t_k & 0 \\ 0 & \widetilde{\widetilde{Q}}_k a t_k & \widetilde{\widetilde{Q}}_k a_t t_k & (1/4)t_k & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & (1/2)t_k \end{pmatrix}$$

(здесь $a\equiv a(x,t_k)$).

Теорема 1 (о существовании решения). *Пусть выполнено предположение* 1, *неравенство* (8) *и включения:* $f(x,t)\in L_\infty(D)$, $f_t(x,t)\in L_\infty(D)$, $f_{tt}(x,t)\in L_\infty(D)$, $f(x,0)\in W^1_\infty(0,1)$, $f(x,t_k)\in W^1_\infty(0,1)$, $\overline{u}_{0k}\in C^3([0,1])$ $(k=1,\ldots,m)$.

Пусть при $k=1,\ldots,m$ *функции* $a_k(x,t)\in C^2(\overline{D})$ *и справедливы неравенства*

$$a_k(x,t)>0,\quad a_{kt}(x,t)\geqslant 0,\quad a_{ktt}(x,t)\leqslant 0,\quad (x,t)\in\overline{D}.$$

Предположим также, что выполняются неравенства: $\Delta^*>0$, $\widetilde{\Delta}>0$, $\bar{t}_k>0$, $\bar{\bar{t}}_k>0$,

$$1>m\,\frac{\widetilde{\widetilde{Q}}_k}{\widetilde{Q}_k}\,\frac{\max\limits_{[0,1]}a(x,t)}{\min\limits_{[0,1]}a(x,t)}\,\overline{\alpha}_k^2\quad(k=1,\ldots,m).$$

Пусть матрицы $A_k(x,t)$ *и* $B_k(x,t_k)$ $(k=1,\ldots,m)$ *являются матрицами положительно определенных квадратичных форм при* $(x,t)\in\overline{D}_k$.

Предположим, наконец, что выполняются неравенства $(k=1,\ldots,m)$*:*

$$u_k^*\leqslant U_t(x,t_k)-2\sqrt{\frac{\Phi_0}{t_k}},\quad u_2^*\geqslant U_t(x,t_k)+2\sqrt{\frac{\Phi_0}{t_k}},\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

$$|U_{xt}(x,t_k)|+2\sqrt{2}\,\sqrt{\frac{\Phi_0}{t_k}}\leqslant\overline{u}^*,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

$$\max_{\substack{x\in[0,1]\\ e\in\left[-2\sqrt{\frac{\Phi_0}{t_k}},\,2\sqrt{\frac{\Phi_0}{t_k}}\,\right]\\ u\in[u_1^*,u_2^*]}}\Delta_k(x,e,u)\leqslant\delta\widetilde{\Delta}_k.$$

Тогда существует решение $\{v(x,t),q_1(x),\ldots,q_m(x)\}$ *обратной задачи* $(1')$, $(2')$, $(3')$, $(4')$, $(5')$ *такое, что* $v(x,t)\in V$, $q_k(x)\in L_\infty(0,1)$ $(k=1,\ldots,m)$.

Доказательство. Пусть функция $p(x,t)\in\widetilde{V}^*$. Рассмотрим семейство задач: найти функцию $v_\lambda(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике D решением уравнения

$$L_{\varepsilon p}v\equiv-\varepsilon v_{ttxx}+v_{ttt}-v_{xxt}+(Q_p v_t)_t=F_p(x,t)\tag{9_p}$$

и такую, что для нее выполняются граничные условия $(2')$, $(3')$, $(4')$ и условие

$$v_{tt}(x,0) = \lambda \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^p(x) v_{tt}(x,t_k) + \beta^p(x), \tag{$7_{p\lambda}$}$$

число $\lambda \in [0,1]$.

Докажем разрешимость задач в пространстве $\widetilde{V}$ методом продолжения по параметру.

Обозначим через Λ множество тех чисел $\lambda \in [0,1]$, для которых задача (9_p), $(2')$, $(3')$, $(4')$, $(7_{p\lambda})$ разрешима в пространстве V. Если это множество окажется непустым и открытым в индуцированной топологии, то оно будет совпадать со всем отрезком $[0,1]$.

Разрешимость задачи (9_p), $(2')$, $(3')$, $(4')$, $(7_{p\lambda})$ при $\lambda = 0$ в пространстве $\widetilde{V}$ фактически установлена в книге [3]. Коэффициенты Q_p и Q_{pt} в силу условий теоремы 1 ограничены. Поэтому число 0 принадлежит множеству Λ, что доказывает непустоту Λ.

Для доказательства открытости множества Λ получим необходимые априорные оценки.

Умножим обе части уравнения (9_p) на выражение

$$(2t_k - t)(v_{tt} - v_{xxtt}) + \frac{1}{2}\, v_{ttt}$$

и проинтегрируем получившееся равенство по каждому прямоугольнику D_k ($k = 1, \ldots, m$).

В правой части произведем интегрирование по частям с учетом условия $(4')$ и применим неравенство Коши, получим оценку

$$\begin{gathered}
\left| \iint\limits_{D_k} F_p \left[(2t_k - t)(v_{tt} - v_{xxtt}) + \frac{1}{2}\, v_{ttt} \right] dx\, dt \right| \leqslant \left| \iint\limits_{D_k} F_p (2t_k - t) v_{tt}\, dx\, dt \right| \\
+ \left| \iint\limits_{D_k} [F_p(2t_k - t)]_t v_{xxt}\, dx\, dt \right| + \frac{1}{2} \left| \iint\limits_{D_k} F_p v_{ttt}\, dx\, dt \right| + t_k \left| \int\limits_0^1 v_{xxt}(x,t_k) F_p(x,t_k)\, dx \right| \\
\leqslant \frac{1}{4} \iint\limits_{D_k} v_{tt}^2\, dx\, dt + \iint\limits_{D_k} F_p^2 (2t_k - t)^2\, dx\, dt + \frac{1}{4} \iint\limits_{D_k} v_{xxt}^2\, dx\, dt \\
+ \iint\limits_{D_k} \{[F_p(2t_k - t)]_t\}^2\, dx\, dt + \frac{1}{16} \iint\limits_{D_k} v_{ttt}^2\, dx\, dt + \iint\limits_{D_k} F_p^2\, dx\, dt \\
+ \frac{1}{4}\, t_k \int\limits_0^1 v_{xxt}^2(x,t_k)\, dx + t_k \int\limits_0^1 F_p^2(x,t_k)\, dx.
\end{gathered}$$

В силу определения функции $F_p(x,t)$, коэффициента $Q_p(x,t)$, чисел F_{0k} и $\widetilde{F}_{0k}$, а также условий теоремы 1, получаем окончательную оценку

$$\begin{gathered}
\left| \iint\limits_{D_k} F_p \left[(2t_k - t)(v_{tt} - v_{xxtt}) + \frac{1}{2} v_{ttt} \right] dx\, dt \right| \\
\leqslant \frac{1}{4} \left[\iint\limits_{D_k} v_{tt}^2\, dx\, dt + \iint\limits_{D_k} v_{xxt}^2\, dx\, dt + \frac{1}{4} \iint\limits_{D_k} v_{ttt}^2\, dx\, dt + t_k \int\limits_0^1 v_{xxt}^2(x,t_k)\, dx \right]
\end{gathered}$$

$$+ F_{0k}^2\left(\frac{7}{3}\,t_k^3 + 4t_k\right) + \frac{14}{3}\,\widetilde{F}_{0k}^2 t_k^3 \equiv I_1 + F_{0k}^2\left(\frac{7}{3}\,t_k^3 + 4t_k\right) + \frac{14}{3}\,\widetilde{F}_{0k}^2 t_k^3. \quad (10)$$

Далее в доказательстве теоремы 1 положительные постоянные M_i ($i = 1, \ldots$) зависят только от входных данных задачи (9), (2′), (3′), (4′), (7) — известных функций и их норм в соответствующих пространствах, определяемых условиями теоремы 1, но не зависят от чисел λ, ε и выбора функции p. Рассмотрим левую часть

$$I_2 \equiv \iint\limits_{D_k} L_{\varepsilon p} v\left[(2t_k - t)(v_{tt} - v_{xxtt}) + \frac{1}{2}\,v_{ttt}\right] dx\,dt$$

$$= \iint\limits_{D_k} (-\varepsilon v_{xxtt} + v_{ttt} - v_{xxt} + Q_p v_{tt} + Q_{pt} v_t)\left[(2t_k - t)(v_{tt} - v_{xxtt}) + \frac{1}{2}\,v_{ttt}\right] dx\,dt.$$

После интегрирования по частям с учетом однородных граничных условий (2′), (3′), (4′) и условий теоремы 1 получаем оценку

$$\begin{aligned}
I_2 \geqslant{} & M_1\left(\|v\|^2_{W_2^2(D_k)} + \|v_t\|^2_{W_2^2(D_k)} + \varepsilon\,\|v_{xxtt}\|^2_{L_2(D_k)}\right) \\
& + I_1 + \frac{1}{8}\,t_k \int\limits_0^1 [2v_{xtt}^2(x,t_k) + 2v_{xt}^2(x,t_k) + v_{xxt}^2(x,t_k)]\,dx \\
& + \left\{\frac{1}{4}\,\varepsilon \int\limits_0^1 [v_{xtt}^2(x,t_k) - v_{xtt}^2(x,0)]\,dx + \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{4}\,t_k v_{xtt}^2(x,t_k) - t_k v_{xtt}^2(x,0)\right] dx\right. \\
& + \int\limits_0^1 \left[\left(\frac{1}{2}\,t_k + \frac{1}{4}\,Q_p\right) v_{tt}^2(x,t_k) - (t_k + (1/4)Q_p) v_{tt}^2(x,0)\right] dx \qquad (11) \\
& + \frac{1}{4}\,t_k \int\limits_0^1 v_{xt}^2(x,t_k)\,dx + \frac{1}{8}\,t_k \int\limits_0^1 v_{xxt}^2(x,t_k)\,dx + \frac{1}{2}\,t_k \int\limits_0^1 Q_{pt} v_t^2(x,t_k)\,dx \\
& + \frac{1}{2} \int\limits_0^1 v_{xt} v_{xtt}(x,t_k)\,dx - t_k \int\limits_0^1 Q_p v_{tt} v_{xxt}(x,t_k)\,dx - t_k \int\limits_0^1 Q_{pt} v_t v_{xxt}(x,t_k)\,dx.
\end{aligned}$$

Просуммируем неравенства (11), используем условие ($7_{p\lambda}$), тогда в силу условий теоремы 1, элементарного неравенства $(b_1 + \cdots + b_m)^2 \leqslant m(b_1^2 + \cdots + b_m^2)$ и оценок (10), (11) получим оценку

$$\begin{aligned}
M_2(\|v\|^2_{W_2^2(D)} + \|v_t\|^2_{W_2^2(D)} + \varepsilon\,\|v_{xxtt}\|^2_{L_2(D)}) + M_3 \int\limits_0^1 [v_{tt}^2(x,0) + v_{ttx}^2(x,0)]\,dx \\
+ \frac{1}{8} \sum_{k=1}^m t_k \int\limits_0^1 [2v_{xtt}^2(x,t_k) + 2v_{xt}^2(x,t_k) + v_{xxt}^2(x,t_k)]\,dx \leqslant \Phi_0. \quad (12)
\end{aligned}$$

Заметим следующее: если при оценке интеграла

$$\iint\limits_{D_k} F_p\left[(2t_k - t)(u_{tt} - u_{xxtt}) + \frac{1}{2}\,u_{ttt}\right] dx\,dt$$

не проводить интегрирование по частям, то аналогичным образом получается оценка

$$\|v\|^2_{W_2^2(D)} + \|v_t\|^2_{W_2^2(D)} + \varepsilon\,\|v_{xxtt}\|^2_{L_2(D)} + \int\limits_0^1 [v_{tt}^2(x,0) + v_{ttx}^2(x,0)]\,dx \leqslant M_4\bigg(\frac{1}{\varepsilon}\,\|F_p\|^2_{L_2(D)} + \|\beta^p\|^2_{W_2^1(0,1)}\bigg). \quad (13)$$

Рассмотрим прямоугольник $D_\tau = \{(x,t)\colon 0 < x < 1,\ 0 < t < \tau\}$, где τ — произвольное число из интервала $[0,T]$. Аналогично предыдущему, умножим обе части уравнения (9_p) на выражение

$$(2\tau - t)(u_{tt} - u_{xxtt}) + \frac{1}{2}\,u_{ttt},$$

проинтегрируем получившееся равенство по прямоугольнику D_τ, используем оценку (13) и тогда получим оценку (при фиксированном $\varepsilon > 0$):

$$\|v\|^2_{\widetilde V} \leqslant M_5\bigg(\frac{1}{\varepsilon}\,\|F_p\|^2_{L_2(D)} + \|\beta^p\|^2_{W_2^1(0,1)}\bigg). \quad (14)$$

Докажем открытость множества Λ. Пусть при некотором $\lambda \in [0,1]$ задача (9_p), $(2')$, $(3')$, $(4')$, $(7_{p\lambda})$ разрешима в пространстве $\widetilde V$. Тогда для любой функции $w(x,t) \in \widetilde V$ существует решение уравнения (9_p) — функция $v(x,t) \in \widetilde V$, которая удовлетворяет условиям $(2')$, $(3')$, $(4')$ и условию

$$v_{tt}(x,0) = \lambda\bigg[\sum_{k=1}^m \alpha_k^p(x) v_{tt}(x,t_k)\bigg] + \widehat\lambda\bigg[\sum_{k=1}^m \alpha_k^p(x) w_{tt}(x,t_k)\bigg] + \beta^p(x).$$

Следовательно, задача (9_p), $(2')$, $(3')$, $(4')$, $(7_{p\lambda})$ порождает оператор $\overline P$, переводящий пространство $\widetilde V$ в себя: $\overline P(w) = v$. Возьмем функции $w_1, w_2 \in \widetilde V$ и их образы $v_1, v_2 \in \widetilde V$. Рассмотрим разности $\overline w = w_1 - w_2$, $\overline v = v_1 - v_2$. Тогда $\overline v$ удовлетворяет уравнению $L_{\varepsilon p}\overline v = 0$, условиям $(2')$, $(3')$, $(4')$ и условию

$$\overline v_{tt}(x,0) = \lambda\bigg[\sum_{k=1}^m \alpha_k^p(x)\overline v_{tt}(x,t_k)\bigg] + \widehat\lambda\bigg[\sum_{k=1}^m \alpha_k^p(x)\overline w_{tt}(x,t_k)\bigg].$$

Оценка (14) приводит к неравенству

$$\|\overline v\|^2_{\widetilde V} \leqslant M_6\widehat\lambda^2 \sum_{k=1}^m \|\overline w_{tt}(x,t_k)\|^2_{W_2^1(0,1)} \leqslant M_7\widehat\lambda^2\|\overline w\|^2_{\widetilde V},$$

поэтому для всех $\widehat\lambda$ таких, что $M_7\widehat\lambda^2 < 1$, оператор $\overline P$ является сжимающим, следовательно, имеет неподвижную точку $w_0 \in \widetilde V$, которая, очевидно, является решением задачи (9_p), $(2')$, $(3')$, $(4')$, $(7_{p\lambda+\widehat\lambda})$. Открытость множества Λ доказана, т. к. вместе со своим элементом λ оно содержит и его окрестность

$$\bigg(\lambda - \frac{1}{\sqrt{M_7}}; \lambda + \frac{1}{\sqrt{M_7}}\bigg) \cap [0,1].$$

Т. к. окрестность имеет фиксированный радиус. не зависящий от λ, и число 0 принадлежит Λ, то Λ совпадает с отрезком $[0,1]$. Тем самым для любой функции

$p(x,t) \in \widetilde{V}$ доказана разрешимость задачи (9_p), $(2')$, $(3')$, $(4')$, (7_p) в пространстве $\widetilde{V}$.

В силу условий теоремы 1 справедлива равномерная оценка функции $\beta^p(x)$ для любой функции $p \in \widetilde{V}^*$:

$$\|\beta^p\|^2_{W^1_2(0,1)} \leqslant M_8(\overline{\beta}^2 + \overline{\overline{\beta}}^2),$$

поэтому оценку (14) можно переписать в виде

$$\|v\|^2_{\widetilde{V}} \leqslant M_9\left(\frac{1}{\varepsilon}\|f_t\|^2_{L_2(D)} + \frac{1}{\varepsilon}\|U\|^2_{C^3(\overline{D})} + \overline{\beta}^2 + \overline{\overline{\beta}}^2\right) = \widetilde{r}^2. \tag{15}$$

Применим, с учетом условия $(2')$, известные неравенства $(k = 1, \ldots, m)$:

$$|v_t(x,t_k)| \leqslant \left(\int\limits_0^1 v^2_{xt}(x,t_k)\,dx\right)^{1/2}, \quad |v_{xt}(x,t_k)| \leqslant \left(\int\limits_0^1 v^2_{xxt}(x,t_k)\,dx\right)^{1/2}, \tag{16}$$

тогда из оценки (12) получаем

$$|v_t(x,t_k)| \leqslant 2\sqrt{\frac{\Phi_0}{t_k}}, \quad |v_{xt}(x,t_k)| \leqslant 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{\Phi_0}{t_k}}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{17}$$

Рассмотрим ограниченное, замкнутое и выпуклое множество функций из пространства $\widetilde{V}$:

$$\widetilde{K}^* = \{v(x,t) : v(x,t) \in \widetilde{V}^*,\ \|v\|_{\widetilde{V}} \leqslant \widetilde{r}\}.$$

Оценки (15) и (17) в силу условий теоремы 1 показывают, что для любой функции $p(x,t) \in \widetilde{K}^*$ можно найти решение задачи (9_p), $(2')$, $(3')$, $(4')$, (7_p) — функцию $v(x,t) \in \widetilde{K}^*$. Тем самым на множестве $\widetilde{K}^*$ эта задача порождает оператор $\widetilde{P}(p) = v$. Покажем, что оператор $\widetilde{P}$ имеет в $\widetilde{K}^*$ неподвижную точку. Для этого осталось показать [14] его вполне непрерывность.

Пусть последовательность функций $\{p_n(x,t)\}$ есть ограниченная последовательность из $\widetilde{K}^*$, $\{v_n(x,t)\}$ есть последовательность образов функций $p_n(x,t)$ при действии оператора $\widetilde{P}$. В силу оценки (15) последовательность $\{v_n(x,t)\}$ ограничена в пространстве $\widetilde{V}$. Далее заметим, что последовательности $\{p_{ntt}(x,t_i)\}$, $\{p_{nxt}(x,t_i)\}$, $\{p_{nt}(x,t_i)\}$ $(i = 1, \ldots, m)$ будут ограниченными последовательностями в $W^1_2(0,1)$. Из ограниченности последовательностей $\{p_n(x,t)\}$, $\{v_n(x,t)\}$, $\{p_{ntt}(x,t_i)\}$, $\{p_{nxt}(x,t_i)\}$, $\{p_{nt}(x,t_i)\}$ $(i = 1, \ldots, m)$ и компактности вложения $W^1_2(0,1)$ в $C([0,1])$ следует [5], что существуют подпоследовательности $\{p_{n_k}(x,t)\}$ и $\{v_{n_k}(x,t)\}$ соответствующих последовательностей и функции $p(x,t)$ и $v(x,t)$ такие, что при $k \to \infty$ имеют место сходимости:

$$\begin{aligned}
&p_{n_k}(x,t) \to p(x,t) \text{ слабо в } \widetilde{V} \text{ и почти всюду в } \overline{D},\\
&v_{n_k}(x,t) \to v(x,t) \text{ слабо в } \widetilde{V} \text{ и почти всюду в } \overline{D},\\
&p_{n_k tt}(x,t_i) \to p_{tt}(x,t_i) \text{ сильно в } C([0,1]),\\
&p_{n_k xt}(x,t_i) \to p_{xt}(x,t_i) \text{ сильно в } C([0,1]),\\
&p_{n_k t}(x,t_i) \to p_t(x,t_i) \text{ сильно в } C([0,1]) \quad (i = 1, \ldots, m).
\end{aligned}$$

Из этих сходимостей следует, что функции $p(x,t)$ и $v(x,t)$ будут связаны уравнением (9_p), функция $v(x,t)$ удовлетворяет условиям $(2')$, $(3')$, $(4')$, (7_p).

Для функции $w_k(x,t) = v_{n_k}(x,t) - v(x,t)$ имеет место равенство

$$-\varepsilon w_{kxtt} + w_{kttt} - w_{kxxt} + Q_{p_{n_k}} w_{ktt} + Q_{p_{n_k}t} w_{kt} = (Q_p - Q_{p_{n_k}})(v_{tt} + U_{tt}) \\ + (Q_{pt} - Q_{p_{n_k}t}(v_t + U_t),$$

условия $(2')$, $(3')$, $(4')$ и нелокальное условие

$$w_{ktt}(x,0) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i^{p_{n_k}}(x) w_{itt}(x,t_i) - \sum_{i=0}^{m} [\alpha_i^p(x) - \alpha_i^{p_{n_k}}(x)] v_{tt}(x,t_i) \\ + [\beta^{p_{n_k}}(x) - \beta^p(x)].$$

В силу оценки, аналогичной (14), для функций $w_k(x,t)$, сильной сходимости $p_{n_k tt}(x,t_i) \to p_{tt}(x,t_i)$, $p_{n_k xt}(x,t_i) \to p_{xt}(x,t_i)$, $p_{n_k t}(x,t_i) \to p_t(x,t_i)$ в $C([0,1])$ и определения коэффициентов $Q_p(x,t)$, $\alpha_i^p(x)$ $(i = 1,\dots,m)$, $\beta^p(x)$ получаем сходимость: $\|w_k\|_{\widetilde{V}} \to 0$ при $k \to \infty$, которая показывает компактность и непрерывность оператора $\widetilde{P}$, т. е. его вполне непрерывность.

Вполне непрерывность оператора $\widetilde{P}$, его свойство переводить множество $\widetilde{K}^*$ в себя и теорема Шаудера [14] дают нам, что оператор $\widetilde{P}$ имеет на множестве $\widetilde{K}^*$ неподвижную точку. Эта неподвижная точка, т. е. функция $v(x,t)$ из пространства $\widetilde{V}$, будет решением задачи (9) $(2')$, $(3')$, $(4')$, (7).

Это решение получено для любого $\varepsilon > 0$, поэтому обозначим его $v_\varepsilon(x,t)$.

Из оценки (12), условия $(2')$ и неравенства типа (16) получим оценку $(k = 1,\dots,m)$

$$|v_{\varepsilon tt}(x,t_k)| \leqslant 2\sqrt{\frac{\Phi_0}{t_k}}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{17}$$

В силу условий теоремы 1 и неравенства (17) срезывающие функции $\sigma_k(\Delta_{2k}^{v_\varepsilon}(x)) = \Delta_{2k}^{v_\varepsilon}(x)$, поэтому коэффициент $Q_{v_\varepsilon}(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k(x,t) q_k(x)$, где

$$q_k(x) = \frac{\Delta_{1k}^{v_\varepsilon}(x) - \Delta_{2k}^{v_\varepsilon}(x)}{\Delta(x)}.$$

Покажем, что с помощью предельного перехода по параметру ε можно доказать разрешимость в пространстве V задачи $(1')$, $(2')$, $(3')$, $(4')$, $(5')$.

Из оценки (12) можно получить оценку

$$\|v_\varepsilon\|_V^2 + \varepsilon \|v_{\varepsilon xxtt}\|_{L_2(D)}^2 \leqslant M_{10}\Phi_0 \tag{18}$$

(аналогично способу получения оценки (14)). Оценка (18) означает, что существует числовая последовательность $\{\varepsilon_k\}$, подпоследовательность функций $\{v_{\varepsilon_k}(x,t)\}$ и функция $v(x,t)$ такие, что при $k \to \infty$ имеют место сходимости:

$$\begin{gathered} \varepsilon_k \to 0, \\ v_{\varepsilon_k}(x,t) \to v(x,t) \text{ слабо в } V \text{ и почти всюду в } \overline{D}, \\ \varepsilon_k v_{\varepsilon_k xxtt} \to 0 \text{ слабо в } L_2(D), \\ v_{\varepsilon_k tt}(x,t_i) \to v_{tt}(x,t_i) \text{ сильно в } C([0,1]), \\ v_t(x,t_i) \to v_t(x,t_i) \text{ сильно в } C([0,1]) \quad (i = 1,\dots,m). \end{gathered}$$

Следовательно функция $v(x,t)$ удовлетворяет в прямоугольнике D уравнению

$$(v_{tt} - v_{xx} + Q_v(v + U)_t)_t = f_t(x,t), \tag{19}$$

а также условиям (2′), (3′), (4′) и (7).

Докажем, что функция $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1′), а также условиям (5′).

Проинтегрируем уравнение (19) по переменной t в пределах от $t=0$ до $t=\tau$, где $\tau\in[0,T]$:

$$[v_{tt}-v_{xx}+Q_v(v+U)_t](x,\tau)-[v_{tt}-v_{xx}+Q_v(v+U)_t](x,0)=f(x,\tau)-f(x,0).$$

Т. к. для функции $v(x,t)$ выполняется условие (7), то выполняется и первое из уравнений (6), т. к.

$$Q_v(x,0)=\sum_{k=1}^{m}a_k(x,0)q_k(x),\quad q_k(x)=\frac{\Delta^v_{1k}(x)-\Delta^v_{2k}(x)}{\Delta(x)}.$$

Поэтому функция $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1′)

$$[v_{tt}-v_{xx}+Q_v(v+U)_t](x,\tau)=f(x,\tau),\quad \tau\in[0,T].$$

Теперь проинтегрируем уравнение (19) по переменной t в пределах от $t=\tau$ до $t=t_k$ $(k=1,\dots,m)$. Т. к. уравнение (1′) выполняется, то справедливо равенство

$$[v_{tt}-v_{xx}+Q_v(v+U)_t](x,t_k)=f(x,t_k).$$

С другой стороны, в силу (6), справедливо равенство

$$v_{tt}(x,t_k)-\overline{u}_i''(x)+Q_v(x,t_k)[v_t(x,t_k)+U_t(x,t_k)]=f(x,t_k).$$

Обозначим $w_k(x)=v(x,t_k)-\overline{u}_k(x)$, тогда из последних двух равенств получаем $w_k''(x)=0$. Так как $w_k(0)=w_k(1)=0$ в силу (2′) и определения функции $\overline{u}_k(x)$, то $w_k(x)=0$ и все условия (5′): $v(x,t_k)=\overline{u}_k(x)$ выполняются. Функции $q_i(x)\in L_\infty(0,1)$ $(i=1,\dots,m)$ в силу своего определения. Коэффициент $q(x,t)$ в уравнениях (1′) или (1) полагаем равным $Q_v(x,t)$.

Теорема 1 доказана.

Обсудим вопрос о единственности решения обратной задачи (1)–(5) или эквивалентной ей задачи (1′)–(5′). Единственность ищем среди решений $u(x,t)\in V$ таких, что $|u_{tt}(x,t)|\leqslant N$ в $\overline{D}$. Достаточные условия существования таких решений приведены в теореме 1.

Обозначим

$$\begin{aligned}
&\widetilde{u}_1^*=\min_{\overline{D}}\{u_1(x)-TN\},\quad \widetilde{u}_2^*=\max_{\overline{D}}\{u_1(x)+T[N]\},\\
&\widetilde{E}_{1k}=\min_{\overline{D}_k}[f(x,t_k)+\overline{u}_k''(x)-N-|U_{tt}(x,t)|],\\
&\widetilde{E}_{2k}=\max_{\overline{D}_k}[f(x,t_k)+\overline{u}_k''(x)+N+|U_{tt}(x,t)|],\\
&\widetilde{\Delta}_k^*=\min_{\substack{x\in[0,1]\\ e\in[\widetilde{E}_{1k},\widetilde{E}_{2k}]\\ u\in[\widetilde{u}_1^*,\widetilde{u}_2^*]}}\Delta_k(x,e,u),\quad \widetilde{\widetilde{\Delta}}_k^{\,*}=\max_{\substack{x\in[0,1]\\ e\in[\widetilde{E}_{1k},\widetilde{E}_{2k}]\\ u\in[\widetilde{u}_1^*,\widetilde{u}_2^*]}}\Delta_k(x,e,u),\\
&\widetilde{\Delta}^*=\min_{1\leqslant k\leqslant m}\widetilde{\Delta}_k^*,\quad \widetilde{\widetilde{\Delta}}^{\,*}=\max_{1\leqslant k\leqslant m}\widetilde{\widetilde{\Delta}}_k^{\,*}.
\end{aligned}$$

Если справедливы неравенства

$$\widetilde{u}_1^*>0,\quad \widetilde{\Delta}^*>0 \tag{20}$$

и предположения теоремы 1 относительно функций $a_k(x,t)$ $(k=1,\dots,m)$ и определителя $\Delta(x)$, то для рассматриваемых решений $u=v+U$ выполняются следующие оценки в прямоугольнике $\overline{D}_k$:

$$0<\widetilde{u}_1^*\leqslant u_t(x,t_k)\leqslant \widetilde{u}_2^*,\quad x\in[0,1],$$
$$0<Q_k^*\leqslant q_u(x,t)\leqslant Q_k^{**},$$

где

$$Q_k^*=\frac{\widetilde{\Delta}_k^*}{\Delta_2^*}\min_{\overline{D}_k}a(x,t),\quad Q_k^{**}=\frac{\widetilde{\widetilde{\Delta}}_k^*}{\Delta_1^*}\max_{\overline{D}_k}a(x,t),$$
$$0<\widetilde{Q}_k^*\leqslant q_{ut}(x,t)\leqslant \widetilde{Q}_k^{**},$$

где

$$\widetilde{Q}_k^*=\frac{\widetilde{\Delta}_k^*}{\Delta_2^*}\min_{\overline{D}_k}a_t(x,t),\quad \widetilde{Q}_k^{**}=\frac{\widetilde{\widetilde{\Delta}}_k^*}{\Delta_1^*}\max_{\overline{D}_k}a_t(x,t).$$

Обозначим

$$B_i=\max_{\overline{D}}\left|\sum_{k=1}^m a_k(x,t)A_{ki}(x)\right|,\quad C_i=\max_{\overline{D}}\left|\sum_{k=1}^m a_{kt}(x,t)A_{ki}(x)\right|,$$
$$B_{0i}=\max_{[0,1]}\left|\sum_{k=1}^m a_k(x,0)A_{ki}(x)\right|,$$
$$\overline{\overline{s}}_{0i}=2m\left(\frac{\widetilde{u}_2^*-TN}{\widetilde{u}_1^*\Delta_1^*}\right)^2B_{0i}^2,\quad \overline{\overline{S}}_{0i}=\left(\sum_{k=1}^m t_k\right)\overline{\overline{s}}_{0i},$$
$$\overline{s}_{0i}=\left(\frac{\widetilde{E}_{2i}}{\widetilde{u}_1^*}\right)^2\overline{\overline{s}}_{0i},\quad \overline{S}_{0i}=\left(\sum_{k=1}^m t_k\right)\overline{s}_{0i},$$
$$\overline{\overline{s}}_i=2m\,\frac{B_i^2N^2+C_i^2(\widetilde{u}_2^*)^2}{(\widetilde{u}_1^2\Delta_1^*)^2},\quad \overline{s}_i=\overline{\overline{s}}_i\left(\frac{\widetilde{E}_{2i}}{\widetilde{u}_1^*}\right)^2,$$
$$\overline{\overline{S}}_i=2\left(\sum_{k=1}^m\frac{t_k^3}{(1/2)+Q_k^*t_k}\right)\overline{\overline{s}}_i,\quad \overline{S}_i=2\left(\sum_{k=1}^m\frac{t_k^3}{(1/2)+Q_k^*t_k}\right)\overline{s}_i.$$

Теорема 2 (о единственности решения)**.** *Пусть выполняются: предположение 1, неравенство (20) и включения:* $f(x,t)\in L_\infty(D)$, $f_t(x,t)\in L_\infty(D)$, $\overline{u}_{0k}(x)\in C^2([0,1])$ $(k=1,\dots,m)$.

Пусть при $k=1,\dots,m$ *функции* $a_k(x,t)\in C^2(\overline{D})$ *и справедливы неравенства:*

$$a_k(x,t)>0,\quad a_{kt}(x,t)\geqslant 0,\quad a_{ktt}(x,t)\leqslant 0,\quad (x,t)\in\overline{D}.$$

Предположим также, что справедливы неравенства $(k=1,\dots,m)$:

$$\frac12\,t_k-\overline{\overline{S}}_{0k}>\overline{\overline{S}}_k,\quad \left(1+\frac12\,\widetilde{Q}_1^*\right)t_k-\overline{S}_{0k}>\overline{S}_k.$$

Тогда существует не более одного решения $\{u(x,t),q_1(x),\dots,q_m(x)\}$ *обратной задачи* (1)–(5) *такого, что* $u(x,t)\in V$, $q_k(x)\in L_\infty(0,1)$ $(k=1,\dots,m)$ *и такого, что* $|u_{tt}(x,t)|\leqslant N$ *при* $(x,t)\in\overline{D}$.

Доказательство. Разность двух решений $\overline{v}(x,t)=u_2(x,t)-u_1(x,t)=v_2(x,t)-v_1(x,t)$ удовлетворяет в прямоугольнике D уравнению

$$\overline{v}_{tt}-\overline{v}_{xx}+q_2\overline{v}_t=(q_1-q_2)u_{1t}, \tag{21}$$

где $q_1 = q_{u_1}$, $q_2 = q_{u_2}$, однородным условиям $(2')$, $(3')$, $(4')$ и условию при $0 \leqslant x \leqslant 1$ (см. [7]):

$$\overline{v}_{tt}(x,0) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{v_2} \overline{v}_{tt}(x,t_i) + \sum_{i=1}^{m} [\alpha_i^{v_2}(x) - \alpha_i^{v_1}(x)] v_{1tt}(x,t_i) + [\beta^{v_2}(x) - \beta^{v_1}(x)]$$
$$= u_1(x) \sum_{i=1}^{m} J_i(x) \left[\sum_{k=1}^{m} a_k(x,0) A_{ki}(x) \right],$$

где

$$J_i(x) = \frac{1}{\Delta(x)} \left\{ \frac{\overline{v}_{tt}(x,t_i)}{u_{2t}(x,t_i)} - \overline{v}_t(x,t_i) \frac{f(x,t_i) + \overline{u}_i''(x) - v_{1tt}(x,t_i)}{u_{1t}(x,t_i) u_{2t}(x,t_i)} \right\}.$$

Преобразуем разность (см. [7])

$$q_1(x,t) - q_2(x,t) = -\sum_{i=1}^{m} J_i(x) \left[\sum_{k=1}^{m} a_k(x,t) A_{ki}(x) \right].$$

В силу условий теоремы 2 получаем оценку

$$\overline{v}_{tt}^2(x,0) \leqslant \sum_{i=1}^{m} [\overline{\overline{s}}_{0i} v_{tt}^2(x,t_i) + \overline{s}_{0i} v_t^2(x,t_i)] \tag{22}$$

и оценку

$$[q_1(x,t) - q_2(x,t)]^2 u_{1tt}^2 + [q_{1t}(x,t) - q_{2t}(x,t)]^2 u_{1t}^2$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} [\overline{\overline{s}}_i v_{tt}^2(x,t_i) + \overline{s}_i v_t^2(x,t_i)]. \tag{23}$$

Продифференцируем уравнение (21) по переменной t, далее умножим почленно на выражение $(2t_k - t)\overline{v}_{tt}$ и проинтегрируем получившееся равенство по области D_k.

Правая часть оценивается следующим образом по неравенству Коши с использованием оценки (23)

$$\left| \iint_{D_k} ((q_1 - q_2)u_{1t})_t (2t_k - t) \overline{v}_{tt} \, dx\, dt \right| \leqslant \iint_{D_k} \overline{v}_{tt}^2 \left[\frac{1}{2} + q_2(2t_k - t) \right] dx\, dt$$
$$+ \frac{1}{4} \iint_{D_k} \frac{[((q_1 - q_2)u_{1t})_t]^2 (2t_k - t)^2}{(1/2) + q_2(2t_k - t)} \, dx\, dt \leqslant \iint_{D_k} \overline{v}_{tt}^2 \left[\frac{1}{2} + q_2(2t_k - t) \right] dx\, dt$$
$$+ 2 \left(\frac{t_k^3}{(1/2) + Q_k^* t_k} \right) \cdot \sum_{i=1}^{m} [\overline{\overline{s}}_i v_{tt}^2(x,t_i) + \overline{s}_i v_t^2(x,t_i)]. \tag{24}$$

В левой части после интегрирования по частям получим

$$\iint\limits_{D_k} [\,\overline{v}_{ttt} - \overline{v}_{xxt} + (q_2\overline{v}_t)_t]\overline{v}_{tt}(2t_k - t)\,dx\,dt$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\iint\limits_{D_k} \overline{v}_{tt}^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\,t_k\int\limits_0^1 \overline{v}_{tt}^2(x,t_k)\,dx - t_k\int\limits_0^1 \overline{v}_{tt}^2(x,0)\,dx$$
$$+\frac{1}{2}\iint\limits_{D_k} \overline{v}_{xt}^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\,t_k\int\limits_0^1 \overline{v}_{xt}^2(x,t_k)\,dx$$
$$+\iint\limits_{D_k} q_2(2t_k - t)\overline{v}_{tt}^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\,t_k\int\limits_0^1 q_{2t}\overline{v}_t^2(x,t_k)\,dx. \quad (25)$$

Суммируем неравенства (24) и (25) от $k = 1$ до $k = m$, используем оценку $\int\limits_0^1 \overline{v}_{xt}^2(x,t_k)\,dx \geqslant 2\int\limits_0^1 \overline{v}_t^2(x,t_k)\,dx$, оценки (22) и (23) и условия теоремы 2, тогда получим равенство нулю следующих интегралов:

$$\iint\limits_D \overline{v}_{tt}^2\,dx\,dt = 0, \quad \iint\limits_D \overline{v}_{xt}^2\,dx\,dt = 0.$$

Т. к. для функции $\overline{v}(x,t)$ выполняются однородные условия $(2')$, $(3')$, $(4')$, то $\overline{v}(x,t) = 0$ в D.

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.
2. *Дженалиев М. Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Ин-т теоретической и прикладной математики, 1995.
3. *Kozhanov A. I.* Composite Type Equations and Inverse Problems. Utrecht: VSP, 1999.
4. *Якубов С. Я.* Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Эли, 1985.
5. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
6. *Валитов И. Р., Кожанов А. И.* Обратные задачи для гиперболических уравнений: случай неизвестных коэффициентов, зависящих от времени // Вестник НГУ. Серия математика, механика, информатика. 2006. Т. 6, вып. 1. С. 3–18.
7. *Романов В. Г.* Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: Наука, 1972.
8. *Романов В. Г.* Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный мир, 2005.
9. *Аниконов Ю. Е.* Формулы в обратных задачах для уравнений 2-го порядка // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320, № 4. С. 848–850.
10. *Savateev E. G.* An inverse problem for the Burger's equation and its hyperbolic regularization // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1993. V. 1, N 3. P. 231–244.
11. *Savateev E. G.* Well-posedness and reduction of an inverse problem for a hyperbolic equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1994. V. 2, N 2. P. 165–180.
12. *Denisov A. M.* Determination of a nonlinear coefficient in a hyperbolic equation for the Goursat problem // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1998. V. 6, N 4. P. 327–334.

13. *Scheglov A. Yu.* The inverse problem of determination of a nonlinear course in a hyperbolic equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1998. V. 6. P. 625–644.

14. Функциональный анализ. Серия “Справочная математическая библиотека”, под редакцией С. Г. Крейна. М.: Наука, 1972.

Колтуновский Олег Александрович
Россия, Южно-Сахалинск, Южно-Сахалинский институт экономики, права и информатики
`koltoleg@rambler.ru`