Неклассические уравнения математической физики
2007. С. 172–181

УДК 517.946

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

А. И. Кожанов

Исследуется разрешимость первой начально-краевой задачи для вырождающихся уравнений соболевского типа четвертого порядка. Доказываются теоре-. мы существования "почти" регулярных решений

Для уравнений соболевского типа

$$Au_t + Bu = f(x,t) \tag{$*$}$$

в случае вырождающихся эллиптических операторов A и B второго порядка, действующих по пространственным переменным, в работах [1–4] была исследована разрешимость первой начально–краевой задачи в классе регулярных решений. Далее, в работах [5, 6] рассматривались уравнения $(*)$ с операторами A и B разных порядков — второго и четвертого соответственно, но при этом изучался лишь одномерный случай. В настоящей работе исследования работ [5, 6] будут продолжены — будет исследована разрешимость краевых задач для уравнений $(*)$ в случае операторов A и B второго и четвертого порядков соответственно в многомерной ситуации.

Пусть Ω есть ограниченная область пространства R^n с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ, Q есть цилиндр $\Omega \times (0,T)$ конечной высоты T, $a^{ij}(x)$, $b^{ij,k}(x)$, $i,j = 1,\ldots,n$, $k = 1,2$, $a(x)$, $b(x)$ и $f(x,t)$ — заданные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$ функции, A, B_1 и B_2 — операторы, заданные равенствами

$$Au = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}(x)u_{x_j}\right) + a_0(x)u, \quad B_k u = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b^{ij,k}(x)u_{x_j}\right), \quad k = 1,2,$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до n), $\nu_x = (\nu_1,\ldots,\nu_n)$ — вектор внутренней нормали к границе Γ в текущей точке x.

Целью настоящей работы является исследование разрешимости начально-краевых задач для уравнения

$$Lu \equiv Au_t - B_1B_2u + b(x)u = f(x,t) \tag{1}$$

в некоторых специальных случаях с вырождением.

Первый проанализированный нами случай соответствует эллиптическому оператору B_2, эллиптико-параболическому оператору B_1, эллиптическому на множестве Γ, и эллиптико-параболическому оператору A.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 06-01-00439 и интеграционного проекта СО РАН № 48

Будем считать, что условие *эллиптико-параболичности* операторов A и B_1 выполняется в следующем виде: существуют неотрицательные на множестве $\overline{\Omega}$ функции $\alpha^i(x)$ и $\beta^{i,1}(x)$ такие, что при $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in R^n$ выполняются неравенства

$$0 \le \alpha^i(x)\xi_i^2 \le a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \le m_0\alpha^i(x)\xi_i^2, \quad m_0 \ge 0; \tag{2}$$

$$0 \le \beta^{i,1}(x)\xi_i^2 \le b^{ij,1}(x)\xi_i\xi_j \le m_1\beta^{i,1}(x)\xi_i^2, \quad m_1 \ge 0. \tag{3}$$

Определим функции $c^{ij}(x)$, $i,j = 1,\dots,n$:

$$c^{ij}(x) = b^{jk,1}_{x_l}(x)b^{il,2}_{x_k}(x) - \frac{1}{2}\left(b^{ij,1}_{x_k}(x)b^{kl,2}\right)_{x_l} - \frac{1}{2}\left(b^{kl,1}(x)b^{ij,2}_{x_k}(x)\right)_{x_l},$$

и пусть c_0 есть такое число, для которого при $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in R^n$ выполняется неравенство

$$|c^{ij}(x)\xi_i\xi_j| \le c_0|\xi|^2. \tag{4}$$

Всюду ниже под решением первой краевой задачи для уравнения (1) (точную постановку см. ниже) мы будем понимать обобщенное решение, определяющееся интегральным тождеством

$$\int\limits_Q Au_t v\,dx\,dt - \int\limits_Q B_2uB_1v\,dx\,dt = \int\limits_Q fv\,dx\,dt,$$

в котором $v(x,t)$ есть функция класса $C^4(\overline{Q})$ такая, что $v(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial \nu_x} = 0$ при $(x,t) \in \gamma \times [0,T]$.

Уточним, что фраза "постоянная ... определяется входными данными задачи" всюду ниже означает, что данная постоянная вычисляется через функцию $f(x,t)$ и коэффициенты оператора.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$a^{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad b^{ij,1}(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad b^{ij,2}(x) \in C^3(\overline{\Omega}), \quad \beta^{i,1}(x) \in C^2(\overline{\Omega}),$$

$$a^{ij}(x) = a^{ji}(x),\ b^{ij,1}(x) = b^{ji,1}(x),\ b^{ij,2}(x) = b^{ji,2}(x),\ x \in \overline{\Omega},\ i,j = 1,\dots,n; \tag{5}$$

условия (2) *и* (3), *а также условия*

$$b^{ij,2}(x)\xi_i\xi_j \ge m_2|\xi|^2, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad \xi \in R^n, \quad m_2 > 0; \tag{6}$$

$$a(x) \le -\overline{a}_0 < 0, \quad b(x) \le 0, \quad x \in \overline{\Omega}; \tag{7}$$

$$\begin{gathered} |b^{ij,1}_{x_k}(x)| + |b^{ij,1}_{x_kx_l}(x)| + |\beta^{i,1}_{x_k}(x)| \le M_1\sqrt{\beta^{i,1}(x)}, \quad x \in \overline{\Omega}, \\ i,j,k,l = 1,\dots,n, \quad M_1 \ge 0; \end{gathered} \tag{8}$$

$$\exists \delta_0 > 0 :\ \alpha^i(x) + 2\delta_0 m_2\beta^{i,1}(x) \ge k_0 > c_0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad i = 1,\dots,n; \tag{9}$$

$$b^{ij,1}(x)\xi_i\xi_j \ge k_1|\xi|^2, \quad x \in \Gamma, \quad \xi \in R^n, \quad k_1 > 0. \tag{10}$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ *такой, что* $f(x,t) \in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, $f(x,0) = 0$ *при* $x \in \overline{\Omega}$ *краевая задача нахождения решения уравнения* (1), *удовлетворяющего условиям*

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{11}$$

$$u(x,t)|_{\Gamma\times(0,T)} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_x}|_{\Gamma\times(0,T)} = 0, \tag{12}$$

имеет обобщенное решение $u(x,t)$ *такое, что* $u(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$, $u_t(x,t) \in L_2(0,T;W_2^2(\Omega))$, $u(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^3(\Omega'))$, $\beta^{i,1}(x)u_{x_ix_jx_kx_l}(x,t) \in L_2(0,T;L_2(\Omega'))$ *для любой строго внутренней подобласти* Ω' *области* Ω, i, j, k, l=1, ..., n.

Доказательство. Пусть ε есть число из полуинтервала $(0,1]$. Положим

$$a_\varepsilon^{ij}(x) = a^{ij}(x) + \varepsilon b^{ij,2}(x), \quad A_\varepsilon u = \frac{\partial}{\partial x_i}(a_\varepsilon^{ij}(x)u_{x_j}) + a(x)u,$$

$$b_\varepsilon^{ij,1}(x) = b^{ij,1}(x) + \varepsilon b^{ij,2}(x), \quad B_{1\varepsilon} u = \frac{\partial}{\partial x_i}(b_\varepsilon^{ij,1}(x)u_{x_j}),$$

$$L_\varepsilon u = A_\varepsilon u_t - B_{1\varepsilon}B_2 u.$$

Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$L_\varepsilon u = f(x,t) \tag{1_ε}$$

и такую, что для нее выполняются условия (11) и (12). Из результатов работ [7,8] следует, что при выполнении условий (2), (3), (5) и (6), а также вследствие принадлежности функций $f(x,t)$ и $f_t(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ данная краевая задача имеет решение $u^\varepsilon(x,t)$ такое, что $u^\varepsilon(x,t) \in L_2(0,T;W_2^4(\Omega))$, $u_t^\varepsilon(x,t) \in L_2(0,T;W_2^4(\Omega))$. Покажем, что для функций $u^\varepsilon(x,t)$ имеют место "хорошие" априорные оценки. Индекс "ε" в процессе получения оценок указывать не будем.

Рассмотрим равенство

$$-\int_0^t\int_\Omega L_\varepsilon u\, u\, dx\, d\tau = -\int_0^t\int_\Omega f\, u\, dx\, d\tau, \quad t\in[0,T].$$

С помощью интегрирования по частям и условий (11) и (12) данное равенство преобразуется к виду

$$\frac12\int_\Omega a_\varepsilon^{ij}(x)u_{x_i}(x,t)u_{x_j}(x,t)\,dx - \frac12\int_\Omega a(x)u^2(x,t)\,dx + \int_0^t\int_\Omega b_\varepsilon^{ij,1}b^{kl,2}u_{x_kx_j}u_{x_ix_l}\,dx\,d\tau$$
$$-\int_0^t\int_\Omega bu^2\,dx\,d\tau = -\int_0^t\int_\Omega c^{ij}u_{x_i}u_{x_j}\,dx\,d\tau - \int_0^t\int_\Omega fu\,dx\,d\tau.$$

Условия (2), (3), (6), а также неравенство (4) дают неравенство

$$\frac12\int_\Omega \alpha^i(x)u_{x_i}^2(x,t)\,dx + \frac{a_0}{2}\int_\Omega u^2(x,t)\,dx + m_2\sum_{k=1}^n\int_0^t\int_\Omega \beta^{i,1}u_{x_ix_k}^2\,dx\,d\tau$$
$$+\varepsilon\int_0^t\int_\Omega (B_2u)^2\,dx\,d\tau \le c_0\sum_{i=1}^n\int_0^t\int_\Omega u_{x_i}^2\,dx\,d\tau + \frac12\int_0^t\int_\Omega u^2\,dx\,d\tau + \frac12\int_0^t\int_\Omega f^2\,dx\,d\tau. \tag{13}$$

Используя равенство

$$\int_\Omega \beta^{i,1}(x)u_{x_i}^2(x,t)\,dx = -\int_\Omega \beta^{i,1}(x)u_{x_ix_i}(x,t)u(x,t)\,dx$$
$$-\int_\Omega \beta_{x_i}^{i,1}(x)u_{x_i}(x,t)u(x,t)\,dx,$$

условие (8), а также неравенство Юнга, нетрудно показать, что имеет место неравенство

$$\int\limits_\Omega \beta^{i,1}(x)u_{x_i}^2(x,t)\,dx \le \delta\sum_{k=1}^n \int\limits_\Omega \beta^{i,1}(x)u_{x_ix_k}^2(x,t)\,dx + C(\delta)\int\limits_\Omega u^2(x,t)\,dx, \qquad (14)$$

в котором δ есть произвольное положительное число, число же $C(\delta)$ определяется помимо числа δ еще и функциями $\beta^{i,1}(x)$, $i=1,\dots,n$.

Из (13) и (14) вытекает неравенство

$$\int\limits_\Omega \alpha^i(x)u_{x_i}^2(x,t)\,dx + a_0\int\limits_\Omega u^2(x,t)\,dx + \frac{2m_2}{\delta}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \beta^{i,1}u_{x_i}^2\,dx\,d\tau$$

$$\le c_0\sum_{i=1}^n \int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{x_i}^2\,dx\,d\tau + C_1(\delta)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u^2\,dx\,d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega f^2\,dx\,d\tau. \qquad (15)$$

Далее, из (15) следуют неравенства

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \alpha^i u_{x_i}^2\,dx\,d\tau + a_0\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u^2\,dx\,d\tau \le c_0\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega u_{x_i}^2\,dx\,d\theta\,d\tau$$

$$+ C_1(\delta)\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega u^2\,dx\,d\theta\,d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega f^2\,dx\,d\theta\,d\tau,$$

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \left[\alpha^i + \frac{2m_2}{\delta}\beta^{i,1}\right]u_{x_i}^2\,dx\,d\tau + a_0\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u^2\,dx\,d\tau \le c_0\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{x_i}^2\,dx\,d\tau$$

$$+ c_0\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega u_{x_i}^2\,dx\,d\theta\,d\tau + C_1(\delta)\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega u^2\,dx\,d\theta\,d\tau + C_1(\delta)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u^2\,dx\,d\tau$$

$$+ \int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega f^2\,dx\,d\theta\,d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega f^2\,dx\,d\tau.$$

Выбрав число δ равным $\frac{1}{\delta_0}$, используя условие (9) и применяя ко второму из данных неравенств лемму Гронуолла, мы получим первую априорную оценку решений краевой задачи (1_ε), (11), (12):

$$\int\limits_\Omega u^2(x,t)\,dx + \sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{x_i}^2\,dx\,d\tau \le N_1; \qquad (16)$$

постоянная N_1 в этой оценке определяется лишь входными данными задачи, t есть число из отрезка $[0,T]$.

Анализируя аналогичным образом равенство

$$-\int\limits_0^t\int\limits_\Omega (L_\varepsilon u)_\tau u_\tau\,dx\,d\tau = -\int\limits_0^t\int\limits_\Omega f_\tau u_\tau\,dx\,d\tau, \qquad (17)$$

мы получим вторую априорную оценку решений краевой задачи (1_ε), (11), (12):

$$\int\limits_{\omega} u_t^2(x,t)\,dx + \sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} u_{x_i\tau}^2\,dx\,d\tau \le N_1; \tag{18}$$

постоянная N_2 в этой оценке вновь определяется лишь входными данными задачи (уточним, что при получении данной оценки использовались принадлежность функции $f_t(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ и равенство $u_t(x,0)=0$, являющееся следствием условия $f(x,0)=0$).

Помимо оценок (16) и (18), для решений краевой задачи (1_ε), (11), (12) имеют место оценки

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\beta^{i,1}u_{x_ix_k}^2\,dx\,d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\beta^{i,1}u_{x_ix_k\tau}^2\,dx\,d\tau\right) \le N_3 \tag{19}$$

с постоянной N_3, определяющейся лишь числами c_0, N_1, N_2 и функцией $f(x,t)$. Эти оценки являются следствием оценок (16) и (18), а также неравенства (13) и аналогичного неравенства, полученного при анализе равенства (17).

Положим $\Omega_\rho = \{x\in\Omega : dist(x,\Gamma)<\rho\}$. Пусть ρ есть настолько малое число, что в области Ω_ρ оператор B_1 строго эллиптичен с постоянной эллиптичности $\frac{k_1}{2}$ (существование такого числа ρ вытекает из условия гладкости (5) и из условия (10) строгой эллиптичности оператора B_1 на границе Γ области Ω). Далее, пусть $\eta(x)$ есть бесконечно дифференцируемая на множестве $\overline{\Omega}$ функция такая, что $\eta(x)=1$ при $x\in\Gamma$, $\eta(x)=0$ при $x\in\partial\Omega_\rho\cap\Omega$, $|\eta_{x_i}(x)|\le M\sqrt{\eta(x)}$, $|\eta_{x_ix_j}(x)|\le M\sqrt{\eta(x)}$, $i,j=1,\ldots,n$, $x\in\overline{\Omega}_\rho$ (существование такой функции $\eta(x)$ очевидно). Для функции $v(x,t)$, определенной равенством $v(x,t)=\eta(x)u(x,t)$, в области Ω_ρ выполняется уравнение

$$B_{1\varepsilon}B_2v = \eta f + b_\varepsilon^{kl,1}\eta_{x_k}(B_2u)_{x_l} + \Phi,$$

в котором функция Φ представляет собой линейную форму относительно функции $u(x,t)$ и ее производных $u_t(x,t)$, $u_{x_i}(x,t)$, $u_{x_it}(x,t)$, $u_{x_ix_j}(x,t)$, $u_{x_ix_jx_k}(x,t)$, $i,j,k=1,\ldots,n$ (вид функции Φ мы уточним ниже). Далее, для функции $v(x,t)$ выполняются условия

$$v(x,t)|_{\partial\Omega_\rho\times(0,T)} = \left.\frac{\partial v(x,t)}{\partial\nu_x}\right|_{\partial\Omega_\rho\times(0,T)} = 0.$$

Известные оценки решений краевых задач для эллиптических уравнений [9,10] дают неравенство

$$\|v\|^2_{L_2(0,t;W_2^4(\Omega_\rho))} \le N_4 + N_5\|\Phi\|_{L_2(0,t;L_2(\Omega_\rho))},$$

в котором постоянная N_4 определяется коэффициентами операторов B_i, $i=1,2$, и функцией $f(x,t)$, постоянная N_5 определяется только коэффициентами операторов B_i. Из этого неравенства, теорем вложения [11, 12] и неравенства (16) следует оценка

$$\sum_{i,j,k=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Gamma}u_{x_ix_jx_k}^2\,ds\,d\tau + \sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Gamma}u_{x_ix_j}^2\,ds\,d\tau \le \delta\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_\rho}\Phi^2\,dx\,d\tau + C_2(\delta), \tag{20}$$

в которой δ есть произвольное положительное число, число же $C_2(\delta)$ помимо числа δ определяется функцией $f(x,t)$ и коэффициентами операторов B_i, $i=1,2$.

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega L_\varepsilon u B_2 u\,dx\,d\tau = \int\limits_0^t\int\limits_\Omega f B_2 u\,dx\,d\tau.$$

Интегрированием по частям это равенство преобразуется к виду

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega b_\varepsilon^{ij,1}(B_2u)_{x_i}(B_2u)_{x_j}\,dx\,d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega a_\varepsilon^{ij}(x)b^{kl,2}(x)u_{x_ix_l}(x,t)u_{x_jx_k}(x,t)\,dx$$
$$= -\int\limits_0^t\int\limits_\Gamma b_\varepsilon^{ij,1}(B_2u)_{x_i}B_2u\nu_j\,ds\,d\tau - \int\limits_0^t\int\limits_\Omega a_{x_k}^{ij}b^{kl}u_{x_j\tau}u_{x_ix_l}\,dx\,d\tau$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a_\varepsilon^{ij}b_{x_i}^{kl,2}u_{x_kx_j}u_{x_l\tau}\,dx\,d\tau - \int\limits_0^t\int\limits_\Omega a_{x_k}^{ij}b_{x_i}^{kl,2}u_{x_j\tau}u_{x_l}\,dx\,d\tau$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \left(a_\varepsilon^{ij}(x)b_{x_i}^{kl,2}(x)\right)_{x_j}u_{x_k}(x,t)u_{x_l}(x,t)\,dx + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega b_0uB_2u\,dx\,d\tau$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_\Omega f_{x_i}b^{ij,2}u_{x_j}\,dx\,d\tau - \int\limits_0^t\int\limits_\Gamma fb^{ij,2}u_{x_j}\nu_i\,ds\,d\tau + +\int\limits_0^t\int\limits_\Omega fB_2u\,dx\,d\tau. \qquad (21)$$

Обозначим через I_1 первое слагаемое правой части данного равенства, через I_2 — сумму всех остальных. Оценки (16) и (18), неравенство (20) и неравенство Юнга дают следующие оценки для I_1 и I_2:

$$|I_1| \le N_6\delta\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_\rho}\Phi^2\,dx\,d\tau + C_3(\delta),$$

$$|I_2| \le \delta_1\sum_{i,j=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{x_ix_j}^2\,dx\,d\tau + C_4(\delta_1);$$

в этих оценках число δ_1 есть произвольное положительное число, число N_6 определяется лишь коэффициентами оператора B_1, число $C_3(\delta)$ и $C_4(\delta_1)$ определяются числами δ и δ_1, а также входными данными задачи.

Для функции Φ имеет место представление

$$\Phi = 2b_\varepsilon^{kl,1}b^{ij,2}u_{x_ix_jx_k}\eta_{x_l} + 2b_\varepsilon^{kl,1}b^{ij,2}u_{x_ix_kx_l}\eta_{x_j} + \widetilde{\Phi},$$

в котором функция $\widetilde{\Phi}$ является линейной формой относительно функции $u(x,t)$ и ее производных $u_t(x,t)$, $u_{x_i}(x,t)$, $u_{x_ix_j}(x,t)$, $i,j=1,\ldots,n$. Вследствие указанного представления выполняется неравенство

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_\rho}\Phi^2\,dx\,d\tau \le N_7\sum_{i,j,k=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_\rho}u_{x_ix_jx_k}^2\,dx\,d\tau + N_8\sum_{i,j=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_\rho}u_{x_ix_j}^2\,dx\,d\tau + N_9$$

с постоянными N_7 – N_9, определяющимися лишь входными данными задачи.

Рассмотрим теперь левую часть равенства (21). Имеем

$$\int\limits_0^t\int\limits_\Omega b_\varepsilon^{ij,1}(B_2u)_{x_i}(B_2u)_{x_j}\,dx\,d\tau=\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_\rho} b_\varepsilon^{ij,1}(B_2u)_{x_i}(B_2u)_{x_j}\,dx\,d\tau$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\rho} b_\varepsilon^{ij,1}(B_2u)_{x_i}(B_2u)_{x_j}\,dx\,d\tau\geq\frac{k_1}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_\rho}[(B_2u)_{x_i}]^2\,dx\,d\tau$$
$$\geq k_2\sum_{i,j,k=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_\rho}u^2_{x_ix_jx_k}\,dx\,d\tau-k_3\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_\rho}u^2_{x_i}\,dx\,d\tau;$$

постоянные k_2 и k_3 здесь строго положительны, определяются они числом k_1 и коэффициентами оператора B_2 (последнее неравенство вытекает из известных оценок решений краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка — см. [12]).

Суммируя проделанные выкладки, учитывая оценку (16) и неравенство (20), получаем, что при выборе числа δ достаточно малым следствием равенства (21) будет неравенство

$$\sum_{i,j,k=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_\rho}u^2_{x_ix_jx_k}\,dx\,d\tau+\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\beta^{i,1}[(B_2u)_{x_i}]^2\,dx\,d\tau$$
$$+\varepsilon\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega[(B_2u)_{x_i}]^2\,dx\,d\tau+\sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega\alpha^i(x)u^2_{x_ix_j}(x,t)\,dx$$
$$\leq\delta_2\sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega u^2_{x_ix_j}\,dx\,d\tau+C_5(\delta_2),\qquad(22)$$

в котором число δ_2 есть произвольное пооложительное число, число же $C_5(\delta_2)$ определяется, помимо числа δ_2, еще и входными данными задачи.

Неравенство (22) вместе с оценкой (19), условием (9) и возможностью выбора числа δ_2 сколь угодно малым дают априорную оценку

$$\sum_{i,j=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u^2_{x_ix_j}\,dx\,d\tau+\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\beta^{i,1}[(B_2u)_{x_i}]^2\,dx\,d\tau$$
$$+\varepsilon\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega[(B_2u)_{x_i}]^2\,dx\,d\tau\leq N_{10}\qquad(23)$$

с постоянной N_{10}, опреляющейся лишь входными данными задачи.

Следующая априорная оценка является следствием оценки (23); эта оценка имеет вид

$$\sum_{i,j,k=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\beta^{i,1}u^2_{x_ix_jx_k}\,dx\,d\tau+\sum_{i,j,k=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Gamma u^2_{x_ix_jx_k}\,ds\,d\tau+\sum_{i,j=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Gamma u^2_{x_ix_j}\,dx\,d\tau\leq N_{11},\qquad(24)$$

постоянная N_{11} в этой оценке определяется лишь входными данными задачи.

Перейдя к продифференцированному по переменной t уравнению (1_ε) и повторяя выкладки, которые привели к оценкам (23) и (24), мы получим, что для решений краевой задачи (1_ε), (11), (12) будет выполняться также следующая априорная оценка

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^t\int_\Omega u^2_{x_ix_j\tau}\,dx\,d\tau+\sum_{i,j,k=1}^{n}\int_0^t\int_\Omega(\beta^{i,1}+\varepsilon)u^2_{x_ix_jx_k}\,dx\,d\tau$$
$$+\sum_{i,j,k=1}^{n}\int_0^t\int_\Gamma u^2_{x_ix_jx_k\tau}\,ds\,d\tau+\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^t\int_\Gamma u^2_{x_ix_j\tau}\,ds\,d\tau\le N_{12},\quad(25)$$

постоянная N_{12} в которой вновь определяется лишь входными данными задачи.

Пусть $\varphi(x)$ есть бесконечно дифференцируемая функция, строго положительная внутри Ω, обращающаяся в нуль на Γ и такая, что выполняются неравенства $|\varphi_{x_i}(x)|\le M\sqrt{\varphi(x)}$, $i=1,\,\ldots,\,n$. Рассмотрим равенство

$$\int_0^t\int_\Omega\varphi L_\varepsilon uB_2^2u\,dx\,d\tau=\int_0^t\int_\Omega\varphi fB_2^2u\,dx\,d\tau.$$

Интегрируя по частям как справа так и слева, используя условия (2), (3), (8) а также условие $f\in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$, применяя неравенство Юнга и учитывая оценку (25), мы придем к неравентву

$$\int_\Omega\varphi(x)\alpha^i(x)[(B_2u(x,t))_{x_i}]^2\,dx+\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^t\int_\Omega\varphi\beta^{i,1}[(B_2u)_{x_ix_j}]^2\,dx\,d\tau$$
$$\le\delta\sum_{i,j,k}\int_\Omega\varphi(x)u^2_{x_ix_jx_k}(x,t)\,dx+C_6(\delta),\quad(26)$$

в котором δ есть произвольное положительное число, число C_6 определяется числом δ и входными данными задачи.

Имеют место очевидные неравенства

$$\int_\Omega\varphi(x)\beta^{i,1}(x)[(B_2u(x,t))_{x_i}]^2\le N_{13},$$

$$k_4\sum_{i,j,k=1}^{n}\int_\Omega\varphi(x)u^2_{x_ix_jx_k}(x,t)\,dx\le\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\varphi(x)[(B_2u(x,t))_{x_i}]^2\,dx+N_{14},$$

в которых числа N_{13}, N_{14} и k_4 положительны и определяются коэффициентами оператора B_2 и числом N_{12}. Используя эти неравенства и условие (9), получим, что следствием неравенства (26) будет неравенство

$$\sum_{i,j,k=1}^{n}\int_\Omega\varphi(x)u^2_{x_ix_jx_k}(x,t)\,dx+\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^t\int_\Omega\varphi\beta^{i,1}[(B_2u)_{x_ix_j}]^2\,dx\,d\tau$$
$$\le N_{15}\delta\sum_{i,j,k=1}^{n}\int_\Omega\varphi(x)u^2_{x_ix_jx_k}(x,t)\,dx+N_{16}\sum_{i,j,k=1}^{n}\int_0^t\int_\Omega\varphi u^2_{x_ix_jx_k}\,dx\,d\tau+N_{17}.$$

Подбирая число δ малым и используя далее лемму Гронуолла, мы придем к априорной оценке

$$\sum_{i,j,k=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\varphi(x)u^2_{x_ix_jx_k}(x,t)\,dx+\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\varphi\beta^{i,1}[(B_2u)_{x_ix_j}]^2\,dx\,d\tau\le N_{18} \qquad (27)$$

с постоянной N_{18}, определяющейся лишь входными данными задачи.

Из оценки (27) очевидным образом вытекают равномерные по ε включения

$$u(x,t)\in L_\infty(0,T;W_2^3(\Omega')),\quad \beta^{i,1}(x)u_{x_ix_jx_kx_l}(x,t)\in L_2(0,T;L_2(\Omega')) \qquad (28)$$

для $i,\ j,\ k,\ l=1,\ \dots,\ n$ и для произвольной строго внутренней подобласти Ω' области Ω.

Из оценок (25), (27) и из равномерных по ε включений (28), справедливых для всего семейства $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ решений краевой задачи (1_ε), (11), (12), следует возможность выбора подпоследовательности $\{u^{\varepsilon_m}(x,t)\}$, сходящейся к обобщенному решению $u(x,t)$ краевой задачи (1), (11), (12). Для предельной функции $u(x,t)$ будут иметь место оценки (25) и (27), взятые при $\varepsilon=0$, а также включения (28). Это и означает справедливость требуемого утверждения.

Теорема доказана.

Следующий случай соответствует эллиптико-параболическому оператору A и эллиптико-параболическим операторам B_1 и B_2, эллиптическим на множестве Γ.

В дополнение к условиям (2) и (3) эллиптико-параболичности операторов B_1 и A будем считать, что выполняется условие: существуют неотрицательные на множестве $\overline{\Omega}$ функции $\beta^{i,2}(x)$ такие, что при $x\in\overline{\Omega}$, $\xi\in R^n$ выполняются неравенства

$$0\le\beta^{i,2}(x)\xi_i^2\le b^{ij,2}(x)\xi_i\xi_j\le m_0\beta^{i,2}(x)\xi_i^2. \qquad (2')$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (2), (3), (5), (7) *и* (10) *теоремы* 1, *а также условие* (2′) *и условия*

$$|\beta^{i,2}_{x_k}(x)|\le M_1\sqrt{\beta^{i,2}(x)},\quad x\in\overline{\Omega},\quad i=1,\dots,n,\quad M_1\ge0; \qquad (8')$$

$$\exists\,\delta_0>0:\ \alpha^i(x)+2\delta_0\beta^{i,1}(x)\beta^{i,2}(x)\ge k_0>c_0,\quad x\in\overline{\Omega},\quad i=1,\dots,n; \qquad (9')$$

$$b^{ij,2}(x)\xi_i\xi_j\ge k_1|\xi|^2,\quad x\in\Gamma,\quad \xi\in R^n. \qquad (10')$$

Тогда для любой $f(x,t)$ такой, что $f(x,t)\in L_2(Q)$, $f_t(x,t)\in L_2(Q)$, $f(x,0)=0$ при $x\in\overline{\Omega}$ краевая задача (1), (11), (12) *имеет обобщенное решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t)\in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$, $u_t(x,t)\in L_2(0,T;W_2^2(\Omega))$.*

Доказательство этой теоремы проводится в целом вполне аналогично доказательству теоремы 1. Уточним лишь, что регуляризующий оператор L_ε строится с помощью регуляризации как оператора B_1, так и оператора B_2, и что требуемые априорные оценки выводятся с помощью анализа равенств, аналогичных соответствующим равенствам, использовавшимся при доказательстве теоремы 1.

Замечание 1. В [5] рассматривалась иная, нежели в настоящей работе, задача — вместо второго условия (12) задавалось условие

$$B_2u|_{\Gamma\times(0,T)}=0.$$

Подобную же задачу мы вполне могли бы исследовать и в многомерном случае.

Замечание 2. Аналогичными методами можно исследовать разрешимость первой краевой задачи для некоторых уравнений более высокого, чем четвертого, порядка — например, для уравнений

$$Au_t + (-1)^m B_1 B_2 u = f$$

с эллиптико- параболическими операторами A и B_1 второго порядка и эллиптическим оператором B_2 порядка $2m$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kozhanov A. I.* Certain classes of degenerate Sobolev – Galpern equations // Sib. Adv. Math. 1994. V. 4, № 1. P. 65–94.
2. *Кожанов А. И.* Смешанная задача для одного класса вырождающихся псевдопараболических систем // Труды Международного семинара “Дифференциальные уравнения и приложения”. Самара: СамГУ, 1997. С. 47–59.
3. *Kozhanov A. I.* Composite Type Equations and Inverse Problems. Utrecht: VSP, 1999.
4. *Кожанов А. И.* Задача сопряжения для одного класса уравнений составного типа переменного направления // Неклассические уравнения математической физики. Сб. научн. трудов. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2002. С. 96–109.
5. *Кулешова И. И.* О разрешимости начально-краевой задачи для одного класса вырождающихся уравнений соболевского типа // Мат. заметки ЯГУ. 2006. Т. 13, вып. 1. С. 87–97.
6. *Кожанов А. И., Кулешова И. И.* О разрешимости первой краевой задачи для одного класса вырождающихся уравнений соболевского типа // Мат. заметки ЯГУ. 2006. Т. 13, вып. 2. С. 33–41.
7. *Якубов С. Я.* Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.
8. *Пятков С. Г.* Разрешимость одной краевой задачи для псевдопараболических уравнений четвертого порядка // Вестн. НГУ. Сер. мат., мех., инф. 2005. Вып. 3, № 5. С. 43–56.
9. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М.: ИЛ, 1962.
10. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
11. *Соболев С. Л.* Некоторые приложения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
12. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

Кожанов Александр Иванович
Россия, Новосибирск, Институт математики СО РАН
kozhanov@math.nsc.ru