*Неклассические уравнения
математической физики
2007. С. 197–211*

УДК 517.958

О ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ СМЕШАННОГО ТИПА, МОДЕЛИРУЮЩИХ ТЕПЛОВЫЕ ПРОЦЕССЫ, ПРОТЕКАЮЩИЕ В РЕЖИМАХ С ОБОСТРЕНИЕМ

В. А. Нахушева

В настоящее время наблюдается значительный интерес к сложным процессам, протекающим в режимах с обострением, а также к теплообмену в составной среде, когда на одной ее части перенос тепла происходит по закону Фурье, а на другой — в соответствии с принципом расширенной необратимой термодинамики, учитывающим конечность скорости распространения тепла. В качестве базовых уравнений математических моделей этих процессов выступают нелинейные как локальные, так и нелокальные дифференциальные уравнения, в том числе и уравнения дробного порядка.

В работе доказывается, что проблема приемлемой линеаризации основополагающих нелинейных уравнений теории режимов с обострением приводит к смешанного и смешанно-составного типам уравнений теплопроводности первого и второго рода; исследуется ряд качественных свойств их решений.

1. Линеаризация нелинейного уравнения теплопроводности с нелокальным условием Самарского

В основе математических моделей проблем геотермии, теории тепло- и массообмена лежат уравнения в частных производных второго порядка параболического, эллиптического и гиперболического типов. Гиперболическое уравнение теплопроводности выступает в качестве математической модели высокоинтенсивных нестационарных тепловых процессов, учитывающей конечность скорости распространения тепла [1, с. 40; 2; 3, с. 115; 4, с. 81].

При определенной идеализации процесс горения в среде с объемным источником тепла $f(v) = q_0\rho v^2$, $q_0 = \mathrm{const} \geq 0$ и коэффициентом теплопроводности $k(v)$, зависящим от температуры $v = v(\xi, t)$ в точке $\xi \in [0, r_0]$ в момент времени $t > 0$ по линейному закону $k^*(v) = \varkappa_0 v + \varkappa_1$, $\varkappa_0 = \mathrm{const} > 0$, моделируется следующим нелинейным уравнением в частных производных второго порядка параболического типа:

$$\rho c_v \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[k^*(v)\frac{\partial v}{\partial \xi}\right] + f(v), \tag{1.1}$$

которое является одномерным вариантом математической модели горения

$$\rho\frac{\partial E}{\partial t} = \mathrm{div}(\varkappa_0^{\alpha_0} v^{\sigma_0} \,\mathrm{grad}\, v) + q_0\rho v^{\beta_0},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-01-96627) и по Программе Отделения математических наук РАН № 3 “Современные вычисления и информационные технологии решения больших задач”, проект “Исследование математических и инфологических моделей селевых потоков с целью создания САПР противоселевых мероприятий и сооружений”

анализируемой в работе [2]. Здесь: $E = c_v v$, а c_v, $\varkappa_0$, q_0 — заданные параметры, которые не зависят от t и пространственной координаты ξ; α_0, β_0 и σ_0 — заданные числа; $\varkappa_1$ — заданная, не зависящая от ξ, величина; ρ — плотность среды.

Следуя [2], предположим, что плотность среды ρ распределена в среде по закону $\rho = a_0\xi^{-k}$, $a_0 = \mathrm{const} > 0$, $0 \le k = \mathrm{const} < 2$.

Уравнению (1.1) после почленного дифференцирования по временной переменной можно придать следующий вид:

$$\xi^{-k}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left[\frac{(\varkappa_0 v + \varkappa_1)}{a_0 c_v}\frac{\partial v}{\partial t}\right] + \frac{2q_0}{c_v}\xi^{-k} v\frac{\partial v}{\partial t}. \tag{1.2}$$

Предположим, что время t_* является моментом обострения (или точкой локального или глобального экстремума) среднего значения $\delta(t) = \frac{1}{r_0}\int\limits_0^{r_0} v(\xi,t)d\xi$ решения $v(\xi,t)$ уравнения (1.2) по сегменту $0 \le \xi \le r_0$ в момент времени t и

$$\delta'(t) = \mu_0|t - t_*|^{-n}\mathrm{sign}(t_* - t). \tag{1.3}$$

Равенство (1.3) представляет собой вариант нелокального краевого условия Самарского с параметрами μ_0 и n, которые считаются заданными или подлежащими идентификации, причем $n \le 0$, когда t_* является экстремальным моментом времени и $n > 0$, если t_* означает момент обострения процесса, протекающего в режиме с обострением.

Нелинейное уравнение (1.2) порождает в силу (1.3) линейное уравнение в частных производных второго порядка

$$\mathrm{sign}\,(t_* - t)\cdot|t - t_*|^n\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \xi^k\frac{\varkappa_0\mu_0}{a_0 c_v}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{2q_0}{c_v}\mu_0 v. \tag{1.4}$$

В уравнении (1.4) произведем замену переменных

$$x = \xi\sqrt[k-2]{\frac{\varkappa_0\mu_0}{a_0 c_v}}, \quad y = t - t_*, \quad u(x,y) = v\left(x\sqrt[k-2]{\frac{a_0 c_v}{\varkappa_0\mu_0}}, y + t_*\right). \tag{1.5}$$

Тогда функция $u = u(x,y)$ должна удовлетворять уравнению

$$x^k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{sign}\,y\cdot|y|^n\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0 \tag{1.6}$$

со спектральным параметром $\lambda = 2q_0\mu_0/c_v$.

Так как $\xi = \left(\frac{a_0 c_v}{\varkappa_0\mu_0}\right)^{1/(k-2)} x$, то предположение (1.3) переходит в условие

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^r u(x,y)dx = \mu\,\mathrm{sign}\,y\cdot|y|^{-n} \tag{1.7}$$

с параметрами $\mu = r_0\mu_0\left(\frac{\varkappa_0\mu_0}{a_0 c_v}\right)^{1/(k-2)}$, $r = r_0\left(\frac{\varkappa_0\mu_0}{a_0 c_v}\right)^{1/(k-2)}$.

Из (1.3) следует, что если $n \ne 1$, то

$$(1-n)\delta(t) = -\mu_0|t - t_*|^{1-n} + A_n, \tag{1.8}$$

где A_n — параметр, который при $n < 1$ определяется равенством

$$A_n = (1-n)\delta(t_*) \tag{1.9}$$

или формулой
$$A_n = (1-n)\delta(0) + \mu_0 t_*^{1-n}, \quad n > 1. \tag{1.10}$$

При $n = 1$

$$\delta'(t) = \frac{\mu_0}{t_* - t}, \quad \delta(t) = \mu_0 \log|t - t_*| + A_1, \quad A_1 = \delta(0) - \mu_0 \log t_*. \tag{1.11}$$

Предположим, что $n \leq 1$ и в уравнении (1.2) заменим, как и ранее, сомножитель $\dfrac{\partial v}{\partial t}$ в квадратной скобке на $\delta'(t)$, а сомножитель v в произведении $v\dfrac{\partial v}{\partial t}$ на $\bar{\delta} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int\limits_0^T \delta(t)dt$, где T — расчетное время. Эти операции инициируют уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\varkappa_0^2}{a_0 c_v}\delta'(t)\,\xi^k \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{2q_0}{c_v}\,\bar{\delta}\,\frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

которое после замены (1.5) и в случае нелокального краевого условия (1.3) переходит в уравнение смешанного типа второго порядка

$$x^k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sign} y \cdot |y|^n \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b\frac{\partial u}{\partial y}\right] = 0 \tag{1.12}$$

с параметром $b = 2q_0\bar{\delta}/c_v$.

Уравнение (1.12) заменой $u = U\exp(-by/2)$ сводится к уравнению

$$x^k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \operatorname{sign} y \cdot |y|^n \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{1}{4}b^2 U\right) = 0.$$

Из равенств (1.8)–(1.11) при $n < 2$ заключаем, что

$$(1-n)\bar{\delta} - A_n = -\frac{\mu_0}{T}\int\limits_0^T |t - t_*|^{1-n} dt = -\frac{\mu_0}{(2-n)T}[t_*^{2-n} + (T - t_*)^{2-n}],$$

а при $n = 1$ имеем $\bar{\delta} = \mu_0 \int\limits_0^T \log|t - t_*|\, dt + A_1$.

Уравнения (1.6) и (1.12) являются уравнениями эллиптического типа при $y > 0$ и гиперболического типа при $y < 0$. Когда $k = 0$, $n = 0$, они принимают вид

$$\operatorname{sign} y \cdot u_{xx} + u_{yy} + \lambda \operatorname{sign} y \cdot u = 0, \tag{1.13}$$
$$\operatorname{sign} y \cdot u_{xx} + u_{yy} + b u_y = 0. \tag{1.14}$$

Если же в уравнении (1.6) положить $k = 0$, то при $n = -1$ получим уравнение смешанного типа первого рода

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda y u = 0, \tag{1.15}$$

а при $n = 1$ — уравнение смешанного типа второго рода

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0. \tag{1.16}$$

Уравнение (1.13) при $\lambda = 0$ и (1.14) при $b = 0$ совпадают с уравнением Лаврентьева – Бицадзе, а уравнение (1.15) — с уравнением Трикоми. Момент обострения $y = 0$ $(t = t_*)$ является особой характеристикой для уравнения (1.16), как и для уравнений (1.6), (1.12) в случае, когда $k = 0$, $n > 0$. Исключительным случаем модели (1.6) является уравнение

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sign} y \cdot y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1.17}$$

Полупрямая $x + y = 0$, $x \le 0$ является характеристикой уравнений (1.13), (1.14) и (1.17).

Пусть теперь объемный источник тепла $f(v)$ меняется по закону

$$\frac{\partial f(v)}{\partial t} = \rho \left[2q_0 v \frac{\partial v}{\partial t} + q_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} \right], \tag{1.18}$$

где q_1 — коэффициент, учитывающий эффект памяти. Тогда вместо уравнения (1.4) получим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \xi^k \frac{\mu_0 \varkappa_0}{a_0 c_v} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} |t - t_*|^{-n} \operatorname{sign}(t_* - t) + \frac{1}{c_v} \left[2\mu_0 q_0 v |t - t_*|^{-n} \operatorname{sign}(t_* - t) + q_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} \right],$$

которое в переменных (1.5) при $k = 0$ и $n = -2$ имеет следующий вид:

$$\operatorname{sign} y \cdot y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \operatorname{sign} y \cdot y^2 u = 0. \tag{1.19}$$

Здесь

$$x = \xi \sqrt{\frac{a_0 c_v}{\mu_0 \varkappa_0}}, \ y = t - t_*, \quad u(x, y) = v \left(x \sqrt{\frac{\mu_0 \varkappa_0}{a_0 c_v}}, y + t_* \right), \ a = -\frac{q_1}{c_v} \sqrt{\frac{\mu_0 \varkappa_0}{a_0 c_v}}.$$

Из (1.19) при $y < 0$ $(t < t_*)$ получаем гиперболическое уравнение теплопроводности

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda y^2 u. \tag{1.20}$$

При $\lambda = 0$ уравнение (1.20) по форме и структуре совпадает с известным в теории тепломассообмена уравнением А. В. Лыкова [3, с. 38]

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{1.21}$$

которое описывает движение потока влаги в коллоидном капиллярно-пористом теле поликапиллярной структуры.

2. Замыкающие соотношения для смешанного типа уравнений теплопроводности первого и второго рода

При $k = 0$, $n = -1$ условие Самарского (1.7) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^r u(x, y) dx = \mu y, \tag{2.1}$$

где

$$\mu = r_0\sqrt{a_0 c_v \mu_0/\varkappa_0} = \text{const} > 0, \quad r = r_0\sqrt{\frac{a_0 c_v}{\varkappa_0 \mu_0}}, \tag{2.2}$$

$$u(x,y) = v(\xi,t), \quad \xi = x\xi_0, \quad \xi_0 = \sqrt{\frac{\varkappa_0\mu_0}{a_0 c_v}}, \quad t = y + t_*. \tag{2.3}$$

Пусть температурное поле $v(\xi,t)$ удовлетворяет начальному и граничному условиям:

$$v(\xi,0) = \varphi_1(\xi), \quad 0 \le \xi \le r_0; \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi}\Big|_{\xi=r_0} - \frac{\partial v}{\partial \xi}\Big|_{\xi=0} = \psi_1(t), \quad 0 < t < T_1. \tag{2.5}$$

Тогда из (2.4) и (2.5), входящих в замыкающие соотношения, в силу (2.2) и (2.3) получаем

$$u(x,-t_*) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le r; \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=r} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \psi(y), \quad -t_* < y < T = T_1 - t_*. \tag{2.7}$$

Здесь $\varphi(x) = \varphi_1(x\xi_0)$ и $\psi(y) = \xi_0\psi_1(y+t_*)$ — заданные функции из классов $C[0,r]$ и $C[0,T]$ соответственно, а T_1 — расчетное время.

При выводе смешанного типа уравнения теплопроводности (1.15) первого рода допускались погрешности аппроксимационного характера. Влияние этой погрешности может быть ослаблено приближенной заменой уравнения (1.15) уравнением

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda y u = f(y) \tag{2.8}$$

с неизвестной флуктуирующей силой $f(y)$, которая должна однозначно определяться из нелокального краевого условия (2.1) и замыкающего соотношения (2.7).

Действительно, рассмотрим уравнение (2.8) в прямоугольной области $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < r,\ -t_* < y < T\}$. Пусть $u = u(x,y)$ — решение уравнения (2.8) с неизвестной правой частью $f(y) \in C[-t_*,T]$, удовлетворяющее условиям (2.1), (2.6) и (2.7). Из (2.1) и (2.6) следует, что

$$\int_0^r u(x,y)dx = \frac{\mu}{2}(y^2 - t_*^2) + \int_0^r \varphi(x)dx, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_0^r u(x,y)dx = \mu. \tag{2.10}$$

Равенства (2.8), (2.9) и (2.10) дают основание записать

$$\begin{aligned} rf(y) - \lambda y\left[\frac{\mu}{2}(y^2 - t_*^2) + \int_0^r \varphi(x)dx\right] - \mu &= y\int_0^r \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx \\ &= y\left[\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=r} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0}\right] = y\psi(y). \end{aligned}$$

Отсюда однозначно находится искомая правая часть $f(y)$ уравнения (2.8) по формуле

$$f(y) = \frac{1}{r}\left\{\mu + \lambda y\left[\frac{\mu}{2}(y^2 - t_*^2) + \int_0^r \varphi(x)dx + \psi(y)\right]\right\}. \tag{2.11}$$

Для уравнения (2.8) могут быть применены следующие замыкающие соотношения:

$$u(0,y)=\varphi_0(y),\quad u(r,y)=\psi_0(y),\quad -t_*\le y\le T; \tag{2.12}$$

$$u(x,T)=\Phi(x),\quad 0\le x\le r, \tag{2.13}$$

где $\varphi_0(y)$, $\psi_0(y)$ и $\Phi(x)$ — заданные непрерывные на сегментах $[-t_*,T]$ и $[0,r]$ функции своих аргументов.

Условия (2.1) и (2.6) позволили найти функцию $f(y)$ по формуле (2.11), а условия (2.6), (2.12), (2.13) являются краевыми условиями первого рода для уравнения (2.8).

В случае нелокального краевого условия вида $\partial u/\partial x\big|_{x=0}=\partial u/\partial x\big|_{x=r}$ функция $\psi(y)=0$, а функция (2.11) представляет собой полином третьей степени и задается формулой $f(y)=f(0)+f'(0)y+f'''(0)y^3/8$, где $f(0)=\frac{\mu}{r}$, $f'(0)=\frac{\lambda}{r}\left[\int\limits_0^r\varphi(x)dx-\frac{\mu}{2r}t_*^2\right]$, $f'''(0)=\frac{3\mu\lambda}{r}$. В этом случае функция $u=f'(0)+f(0)y^2/2$ будет решением уравнения (2.8) с параметром $\lambda=1$.

Уравнение (2.8) относится к классу уравнений смешанного типа, для которых найден критерий единственности решения задачи Дирихле в прямоугольных областях [5, с. 149].

Вместо уравнения (2.8) допустимо введение в рассмотрение и изучение следующего смешанно-составного типа уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\lambda yu\right)=0. \tag{2.14}$$

Прямая $y=\mathrm{const}$ является характеристикой этого уравнения.

При $k=0$, $n=1$, $\varkappa_1=0$ система (1.2), (1.3) означает, что

$$\frac{\partial^2v}{\partial t^2}=\frac{\varkappa_0}{a_0c_v}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(v\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{2q_0}{c_v}v\frac{\partial v}{\partial t}, \tag{2.15}$$

$$(t_*-t)\delta'(t)=\mu_0. \tag{2.16}$$

В правой части уравнения (2.15) сомножитель v_t произведения vv_t заменим через $\delta'(t)$. В результате с учетом (2.16) вместо нелинейного уравнения (2.15) получим линейное уравнение

$$\frac{\partial^2v}{\partial t^2}+\frac{\xi_0^2}{t-t_*}\frac{\partial^2v}{\partial\xi^2}+\frac{2q_0\mu_0}{(t-t_*)c_v}v=f_1(t), \tag{2.17}$$

с неизвестной правой частью $f_1(t)$. Функцию $f_1(t)$ можно назвать погрешностью линеаризации нелинейного уравнения (2.15) заменой его линейным уравнением (2.17) второго порядка смешанного типа второго рода.

Уравнение (2.17) можно аппроксимировать и следующим уравнением смешанно-составного типа:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial^2v}{\partial t^2}+\frac{\xi_0^2}{t-t_*}\frac{\partial^2v}{\partial\xi^2}+\frac{2q_0\mu_0}{(t-t_*)c_v}\right]=0. \tag{2.18}$$

Уравнения (2.17) и (2.18) в переменных (2.3) записываются так:

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\lambda u=f(y),\quad f(y)=yf_1(y+t_*); \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\lambda u\right]=0. \tag{2.20}$$

В соответствии с (2.16) решение $u(x,y)$ уравнений (2.19) и (2.20) должно удовлетворять нелокальному краевому условию

$$y\int\limits_0^r u(x,y)dx = \mu. \tag{2.21}$$

Из (2.21) имеем

$$\int\limits_0^r u(x,y)dx = \mu\log\left|\frac{y}{t_*}\right| + \int\limits_0^r u(x,-t_*)dx,\ \ y\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int\limits_0^r u(x,y)dx = -\frac{\mu}{y}.$$

Следовательно, если $u(x,y)$ — решение уравнения (2.19), удовлетворяющее условиям (2.6) и (2.7), то функция $f(y)$ однозначно вычисляется по формуле

$$f(y) = \frac{1}{r}\left[\psi(y) - \frac{\mu}{y} + \lambda\mu\log\left|\frac{y}{t_*}\right| + \lambda\int\limits_0^r \varphi(x)dx\right].$$

К замыкающим соотношениям по терминологии А. А. Самарского и П. Н. Вабищевича [1, с. 41] для смешанного типа уравнений теплопроводности наряду с начальными (2.6) и краевыми (2.7) условиями входят и условия сопряжения на координатной прямой $y = 0$, соответствующей экстремальному моменту. Для уравнений смешанного типа первого рода вида (2.8) естественные условия сопряжения записываются в виде: $u(x,-0) = u(x,+0)$, $u_y(x,-0) = u_y(x,+0)$ или в виде

$$u(x,-0) = G_0(x)u(x,+0) + g_0(x), \quad u_y(x,-0) = G_1(x)u(x,+0) + g_1(x), \tag{2.22}$$

где $G_k(x)$, $g_k(x)$ — заданные функции из класса $C[0,r]$, $k = 0,1$.

Для уравнений смешанно-составного типа первого рода вида (2.14) условия сопряжения задаются так же, как и (2.22).

В случае уравнений теплопроводности второго рода вида (2.19) или (2.20) условия сопряжения на линии $y = 0$, соответствующей моменту обострения, может существенно отличаться от (2.22).

Действительно, в области Ω рассмотрим класс решений уравнения (1.16), представимых в виде

$$u(x,y) = X(x)Y(y), \tag{2.23}$$

где $X(x)$ и $Y(y)$ соответственно являются решениями следующих уравнений:

$$X'' + \omega^2 X = 0; \tag{2.24}$$

$$yY'' + (\lambda - \omega^2)Y = 0, \tag{2.25}$$

где частота $\omega = \pi j/r$, $j = 1,2,\ldots$

Предположим, что

$$\lambda = 2q_0\mu_0/c_v > \omega^2. \tag{2.26}$$

Решение $X_j(x)$ уравнения гармонического осциллятора (2.24), соответствующее частоте $\omega_j = \pi j/r$ и удовлетворяющее условию Дирихле

$$X_j(0) = 0, \quad X_j(r) = 0 \tag{2.27}$$

задается формулой

$$X_j(x) = a^j \sin\omega_j x, \tag{2.28}$$

где a^j — амплитуда.

В уравнении (2.24) положим $\lambda_j = \sqrt{\lambda - \omega_j^2} > 0$, а затем осуществим замену переменных по формуле

$$Y(y) = \frac{y_j}{2\lambda_j} Z(y_j), \quad y_j = 2\lambda_j \sqrt{|y|}. \tag{2.29}$$

В результате, принимая к сведению, что

$$y = \frac{\operatorname{sign} y}{4\lambda_j^2} y_j^2, \quad \frac{dy_j}{dy} = \frac{2 \operatorname{sign} y}{y_j} \lambda_j^2, \quad Y'(y) = \frac{\operatorname{sign} y}{y_j} \lambda_j \frac{d(y_j Z)}{dy_j},$$

$$\begin{aligned} yY''(y) = \frac{\operatorname{sign} y}{4\lambda_j^2} y_j^2 \lambda_j \operatorname{sign} y \cdot \frac{d}{dy_j} \left[\frac{1}{y_j} \frac{d(y_j Z)}{dy_j} \right] \frac{2 \operatorname{sign} y}{y_j} \lambda_j^2 \\ = \frac{\lambda_j \operatorname{sign} y}{2} y_j \frac{d}{dy_j} \left[\frac{y_j Z' + Z}{y_j} \right], \end{aligned}$$

$$yY''(y) + \lambda_j^2 Y(y) = \frac{\lambda_j \operatorname{sign} y}{2} y_j \frac{d}{dy} \left(Z' + \frac{1}{y_j} Z \right) + \frac{\lambda_j}{2} y_j Z = 0,$$

получим дифференциальное уравнение для цилиндрических функций

$$y_j^2 Z'' + y_j Z + (y_j^2 \operatorname{sign} y - 1) Z = 0, \tag{2.30}$$

которое при $y > 0$ совпадает с уравнением Бесселя [6, с. 128; 7, с. 398], а при $y < 0$ — с уравнением для модифицированной функции Бесселя или функции Макдональда.

Пусть $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя первого и второго рода, а $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя или функции Макдональда:

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}; \quad I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)};$$

$$\begin{aligned} Y_\nu(z) = N_\nu(z) = \frac{2}{\pi} J_\nu(z) \log \frac{z}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-k-1)!}{\nu!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k-\nu} \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{k!\,(\nu+k)!} \left[\frac{\Gamma'(\nu+k+1)}{(\nu+k)!} + \frac{\Gamma'(k+1)}{k!} \right], \quad \nu = 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_\nu(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(-1)^k (\nu-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k-\nu} \\ + \frac{(-1)^{\nu+1}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+\nu}}{k!\,(k+\nu)!} \left[2 \log \frac{z}{2} - \frac{\Gamma'(k+1)}{k!} - \frac{\Gamma'(k+\nu+1)}{(\nu+k)!} \right]. \end{aligned}$$

В силу (2.29) и (2.30) общее решение уравнения (2.25), соответствующее частоте ω_j, представимо в виде

$$Y(y) = Y^j(y) = \begin{cases} \dfrac{y_j}{2\lambda_j} [C_1^+ J_1(y_j) + C_2^+ Y_1(y_j)], & y > 0, \\ \dfrac{y_j}{2\lambda_j} [C_1^- I_1(y_j) + C_2^- K_1(y_j)], & y < 0, \end{cases} \tag{2.31}$$

где $C_1^{\pm}$, $C_2^{\pm}$ — произвольные постоянные.

Для функций Бесселя справедливы асимптотические формулы:

$$J_\nu(y_j) = \frac{y_j^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}[1+O(y_j^2)],\ Y_\nu(y_j) = -\frac{2^\nu\Gamma(\nu)}{\pi y_j^\nu} + O(y_j^\varepsilon), \tag{2.32}$$

$\varepsilon = \min(\nu, 2-\nu)$, $\nu \geq 0$;

$$Y_0(y_j) = \frac{2}{\pi}[\log y_j + O(1)],\ I_1(y_j) = \frac{y_j}{2}[1+O(y_j^2)]; \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned} K_0(y_j) &= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(y_j/2)^{2k}}{(k!)^2}\left[\log\frac{y_j}{2} - \frac{\Gamma'(k+1)}{k!}\right] \\ &= -I_0(y_j)\log\frac{y_j}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma'(k+1)}{(k!)^3}\left(\frac{y_j}{2}\right)^{2k} = -\log\frac{y_j}{2} + O(1); \end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned} K_1(y_j) &= \frac{1}{y_j} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(y_j/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}\left[2\log\frac{y_j}{2} - \frac{\Gamma'(k+1)}{k!} - \frac{\Gamma'(k+2)}{(k+1)!}\right] \\ &= \frac{1}{y_j} + I_1(y_j)\log\frac{y_j}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)!\,\Gamma'(k+1) - k!\,\Gamma'(k+2)}{k!(k+1)!}\left(\frac{y_j}{2}\right)^{2k+1} \\ &= \frac{1}{y_j}[1+O(y_j)]. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Из (2.31) на основании (2.32)-(2.35) заключаем:

$$\lim_{y\to+0} Y(y) = Y_+^j(0) = C_2^+ \lim_{y\to+0}\frac{y_j}{2\lambda_j}Y_1(y_j) = -\frac{1}{\pi\lambda_j}\,C_2^+; \tag{2.36}$$

$$\lim_{y\to-0} Y(y) = Y_-^j(0) = C_2^- \lim_{y\to-0}\frac{y_j}{2\lambda_j}K_1(y_j) = \frac{1}{2\lambda_j}\,C_2^-. \tag{2.37}$$

Равенства (2.36) и (2.37) доказывают, что

$$Y_+^j(0) = Y_-^j(0) \ \Leftrightarrow\ \pi C_2^- = -2C_2^+. \tag{2.38}$$

Из (2.31) и равенств

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dy_j}y_jJ_1(y_j) = y_jJ_0(y_j), \quad \frac{d}{dy_j}y_jY_1(y_j) = y_jY_0(y_j); \\ &\frac{d}{dy_j}y_jI_1(y_j) = y_jI_0(y_j), \quad \frac{d}{dy_j}y_jK_1(y_j) = -y_jK_0(y_j), \end{aligned}$$

легко увидеть, что

$$\frac{dY}{dy} = \frac{2\lambda_j^2}{y_j}\frac{dY^j}{dy_j} = \begin{cases} \lambda_j[C_1^+J_0(y_j) + C_2^+Y_0(y_j)], & y>0, \\ \lambda_j[C_1^-I_0(y_j) - C_2^-K_0(y_j)], & y<0. \end{cases} \tag{2.39}$$

Функции $Y_0(y_j)$ и $K_0(y_j)$ допускают следующие представления:

$$Y_0(y_j) = \frac{2}{\pi}J_0(y_j)\log\frac{y_j}{2} - \frac{2}{\pi}Y_{0r}(y_j), \tag{2.40}$$

$$K_0(y_j) = -I_0(y_j)\log\frac{y_j}{2} + K_{0r}(y_j), \tag{2.41}$$

где

$$Y_{0r}(y_j)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma'(k+1)}{\Gamma^3(k+1)}\left(\frac{y_j}{2}\right)^{2k},\ K_{0r}(y_j)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma^3(k+1)}\left(\frac{y_j}{2}\right)^{2k}.$$

Формула (2.39) и представления (2.40) и (2.41) для функций $Y_+(y_j)=Y_+^j(y_j)$ и $Y_-(y_j)=Y_-^j(y_j)$ позволяют записать

$$\lim_{y\to+0}\left[Y_+'(y)-\frac{2\lambda_j}{\pi}C_2^+J_0(y_j)\log\frac{y_j}{2}\right]=\lambda_j\lim_{y\to+0}\left[C_1^+J_0(y_j)-\frac{2}{\pi}C_2^+Y_{0r}(y_j)\right],$$
$$\lim_{y\to-0}\left[Y_-'(y)-\lambda_jC_2^-I_0(y_j)\log\frac{y_j}{2}\right]=\lambda_j\lim_{y\to-0}\left[C_1^-I_0(y_j)-C_2^-K_{0r}(y_j)\right].$$

Отсюда, согласно равенств $J_0(0)=I_0(0)=1$, $Y_{0r}(0)=K_{0r}(0)=\mathrm{const}=\Gamma'(1)$,

$$\lim_{y_j\to0}[J_0(y_j)-1]\log\frac{y_j}{2}=0,\quad \lim_{y_j\to0}[I_0(y_j)-1]\log\frac{y_j}{2}=0,$$

получим

$$\lim_{y\to+0}\left\{Y_+'(y)-\frac{2\lambda_j}{\pi}C_2^+[J_0(y_j)-1]\log\frac{y_j}{2}-\frac{2\lambda_j}{\pi}C_2^+\log\frac{y_j}{2}\right\}$$
$$=\lim_{y\to+0}\left[Y_+'(y)-\frac{2\lambda_j}{\pi}C_2^+\log\frac{y_j}{2}\right]=\lambda_j\left[C_1^+-\frac{2}{\pi}C_2^+\Gamma'(1)\right]; \quad (2.42)$$

$$\lim_{y\to-0}\left\{Y_-'(y)-\lambda_jC_2^-[I_0(y_j)-1]\log\frac{y_j}{2}-\lambda_jC_2^-\log\frac{y_j}{2}\right\}$$
$$=\lim_{y\to-0}\left[Y_-'(y)-\lambda_jC_2^-\log\frac{y_j}{2}\right]=\lambda_j\left[C_1^--C_2^-\Gamma'(1)\right]. \quad (2.43)$$

Пусть

$$Y^+(0)=Y^-(0)=Y(0), \quad (2.44)$$

тогда из (2.38), (2.42) и (2.43) заключаем, что

$$C_1^+=\frac{2}{\pi}\Gamma'(1)C_2^++\frac{1}{\lambda_j}\lim_{y\to+0}\left[Y'(y)-\frac{2\lambda_j}{\pi}C_2^+\log\frac{y_j}{2}\right],$$
$$C_1^-=-\frac{2}{\pi}\Gamma'(1)C_2^++\frac{1}{\lambda_j}\lim_{y\to-0}\left[Y'(y)+\frac{2\lambda_j}{\pi}C_2^+\log\frac{y_j}{2}\right].$$

В силу (2.36)–(2.38) и (2.44)

$$C_2^+=-\pi\lambda_jY(0),\quad C_2^-=2\lambda_jY(0). \quad (2.45)$$

Стало быть,

$$C_1^+=-2\lambda_j\Gamma'(1)Y(0)+\frac{1}{\lambda_j}\,\overline{\lceil Y_+'(0)},\ C_1^-=2\lambda_j\Gamma'(1)Y(0)+\frac{1}{\lambda_j}\,\overline{\lceil Y_-'(0)}, \quad (2.46)$$

где

$$\overline{\lceil Y_+'(0)}=\lim_{y\to+0}\left[Y'(y)+2\lambda_j^2\,Y(0)\log\frac{y_j}{2}\right],\ \overline{\lceil Y_-'(0)}=\lim_{y\to-0}\left[Y'(y)-2\lambda_j^2\,Y(0)\log\frac{y_j}{2}\right].$$

Как видно из (2.45) и (2.46), к условию сопряжения (2.44) естественно присоединяется следующее условие сопряжения:

$$\overline{\lceil Y_+'(0)}=\overline{\lceil Y_-'(0)}. \quad (2.47)$$

Теперь нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 1. *Любое решение $Y(y)$ уравнения*

$$yY'' + \lambda_j^2 Y = 0, \quad -t_* < y < T, \tag{2.48}$$

удовлетворяющее условиям сопряжения $Y_+(0) = Y_-(0)$, $\lceil Y'_+(0) = \lceil Y'_-(0)$, представляет собой решение нагруженного уравнения

$$\frac{Y(y)}{y_j} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\lambda_j^2} \lceil Y'(0) J_1(y_j) - \Big[\Gamma'(1) J_1(y_j) + \dfrac{\pi}{2} Y_1(y_j)\Big] Y(0), & y > 0, \\ \dfrac{1}{2\lambda_j^2} \lceil Y'(0) I_1(y_j) + [\Gamma'(1) I_1(y_j) + K_1(y_j)]\, Y(0), & y < 0, \end{cases}$$

где, согласно (2.47), $\lceil Y'(0) = \lceil Y'_+(0)$ *означает значение конечной части $Y'(y)$ при $y \to 0$.*

Условие сопряжения (2.47) можно заменить условием ограниченности производной $Y'(y)$ решения $Y(y)$ уравнения (2.48) при $y \to +0$ или при $y \to -0$.

В самом деле, из (2.39) и асимптотической формулы (2.33) для $Y_0(y_j)$ заключаем, что

$$\lim_{y \to +0} Y'(y) < \infty \tag{2.49}$$

тогда и только тогда, когда $C_2^+ = 0$. Отсюда в силу (2.38) следует, что и постоянная $C_2^- = 0$. Аналогично убеждаемся, что из условия

$$\lim_{y \to -0} Y'(y) < 0 \tag{2.50}$$

и асимптотической формулы (2.35) следуют равенства $C_2^- = 0$, $C_2^+ = 0$.

Определяемая формулой (2.39) функция $Y'(y)$ удовлетворяет условиям (2.49) или (2.50) только тогда, когда

$$\frac{1}{\lambda_j} Y'(y) = \begin{cases} C_1^+ J_0(y), & y > 0, \\ C_1^- I_0(y), & y < 0. \end{cases} \tag{2.51}$$

При $C_2^+ = C_2^- = 0$ общее решение (2.31) уравнения (2.48) задается формулой

$$Y(y) = \begin{cases} \sqrt{y}\, J_1(y_j)\, C_1^+, & y > 0, \\ \sqrt{-y}\, I_1(y_j)\, C_1^-, & y < 0. \end{cases} \tag{2.52}$$

Из (2.50) и (2.51) легко увидеть, что $\lambda_j C_1^+ = Y'_+(0)$, $\lambda_j C_1^- = Y'_-(0)$, $Y_+(0) = Y_-(0) = Y(0) = 0$.

Вернемся к решениям уравнения (1.16) вида (2.23). Пусть $X_j(x)$ — решение (2.28) уравнения (2.24), удовлетворяющее условию (2.27), а $Y^j(y)$ — решение (2.31) уравнения (2.48). Тогда условия сопряжения для простого, но вместе с тем важного класса функций вида

$$u(x, y) = X_j(x) Y^j(y), \tag{2.53}$$

с областью определения Ω можно описать с помощью леммы 1. Эти же условия можно принять за условия сопряжения для уравнения (1.16) в области Ω.

Из леммы 1 следует естественность для уравнения (1.16) следующего условия сопряжения на линии $y = 0$, соответствующей моменту обострения теплового процесса:

$$u^+(x,0) = u^-(x,0), \quad 0 \le x \le r,$$

$$\overline{\left| u_y^+(x,0) \right.} = \overline{\left| u_y^-(x,0) \right.}, \; 0 < x < r.$$

Здесь $u^+(x,0) = \lim\limits_{y\to+0} u(x,y)$, $u^-(x,0) = \lim\limits_{y\to-0} u(x,y)$, $\overline{\left| u_y^\pm(x,0)\right.}$ — значение конечной части производной $\dfrac{\partial u^\pm(x,y)}{\partial y}$ при $y \to \pm 0$.

Следует отметить, что условия (2.49), (2.50) об ограниченности производной по времени y для смешанного типа уравнения теплопроводности второго рода являются весьма жесткими условиями сопряжения в момент обострения $y = 0$. Это становится особо заметным в случае, когда порядок характеристического вырождения $n \ge 2$. Например, для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\operatorname{sign} y) y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = 0, \tag{2.54}$$

идентичного уравнению (1.6) с $k = 0$ и $n = 2$, рассмотрим класс решений, представимых в виде (2.53).

В случае (2.54) функция $Y(y) = Y^j(y)$ должна быть решением уравнения

$$\operatorname{sign} y \cdot y^2 Y'' + \lambda_j^2 Y = 0, \tag{2.55}$$

которое можно записать в форме двух уравнений Эйлера [8, с. 367]

$$y^2 Y'' + \lambda_j^2 Y = 0, \quad y > 0; \tag{2.56}$$

$$y^2 Y'' - \lambda_j^2 Y = 0, \quad y < 0. \tag{2.57}$$

Лемма 2. *Пусть:* C_1^+, C_2^+, C_1^-, C_2^- *— произвольные постоянные;*

$$\lambda_j > 0, \; 2\alpha_j = 1 - 2\beta_j', \; 2\beta_j' = |1 - 4\lambda_j^2 \operatorname{sign} y|^{1/2}. \tag{2.58}$$

Тогда общее решение уравнения (2.55) *задается формулой*

$$Y(y) = \begin{cases} Y^+(y), & y > 0, \\ Y^-(y), & y < 0; \end{cases}$$

где

$$Y^+(y) = \begin{cases} C_1^+ y^{\alpha_j} + C_2^+ y^{1-\alpha_j}, & \forall\, \lambda_j < 1/2; \\ \sqrt{y}\,(C_1^+ + C_2^+ \log y), & \forall\, \lambda_j = 1/2; \\ \sqrt{y}\,[C_1^+ \cos(\beta_j' \log y) + C_2^+ \sin(\beta_j' \log y)], & \forall\, \lambda_j > 1/2; \end{cases} \tag{2.59}$$

$$Y^-(y) = C_1^-(-y)^{\alpha_j} + C_2^-(-y)^{1-\alpha_j}, \quad \forall\, \lambda_j. \tag{2.60}$$

Справедливость этой леммы легко устанавливается из общего представления всех решений уравнения Эйлера $y^2 Y'' = cY$, $c = \text{const}$, заданного на полуоси

$y > 0$ (см. [8, с. 367]), и того очевидного факта, что уравнение (2.57) заменой $s = -y$ сводится к уравнению

$$s^2 \frac{d^2Y}{ds^2} = \lambda_j^2 Y, \quad s > 0.$$

Функция (2.38) представляет собой решение уравнения (2.56), а функция (2.60) — решение уравнения (2.57).

Условия сопряжения на прямой $y = 0$ для уравнения (2.54) определяется с помощью леммы 2.

Рассмотрим исключительный случай, когда $\lambda_j = 1/2$, и в соответствии с (2.58): $2\beta_j' = 0,\ 2\alpha_j = 1$ при $y > 0$; $2\beta_j' = \sqrt{2},\ 2\alpha_j = 1 - \sqrt{2}$ при $y < 0$.

При $\lambda_j = 1/2$ общее решение уравнения (2.55) в силу (2.59) и (2.60) имеет вид

$$Y(y) = \begin{cases} \sqrt{y}\,(C_1^+ + C_2^+ \log y), & y > 0; \\ C_1^-(-y)^{\alpha_j} + C_2^-(-y)^{1-\alpha_j}, & y < 0, \end{cases} \tag{2.61}$$

где $\alpha_j = (1 - \sqrt{2})/2$.

Так как $\alpha_j < 0,\ 1 - \alpha_j = (1 + \sqrt{2})/2 > 0$, то для решения (2.40) условие сопряжения

$$Y^+(0) = Y^-(0) \tag{2.62}$$

возможно только тогда, когда $C_1^- = 0$.

К условию (2.62) естественным образом можно присоединить условие

$$\lim_{y \to +0} D_{0y}^{1/2} Y^+(t) < \infty, \tag{2.63}$$

где $D_{0y}^{1/2}$ — оператор дробного дифференцирования порядка 1/2:

$$D_{0y}^{1/2} Y^+(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_0^y \frac{Y^+(t)dt}{\sqrt{y-t}}.$$

В силу (2.61) $D_{0y}^{1/2} Y^+(t) = C_1^+ D_{0y}^{1/2} \sqrt{t} + C_2^+ D_{0y}^{1/2} \sqrt{t} \log t$. Нетрудно показать, что

$$D_{0y}^{1/2} \sqrt{t} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad D_{0y}^{1/2} \sqrt{t} \log y = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int\limits_0^y \frac{\sqrt{t} \log t\, dt}{\sqrt{y-t}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_0^1 \frac{y\sqrt{s} \log(sy)\, ds}{\sqrt{1-s}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{s}\,[\log(sy) + 1] ds}{\sqrt{1-s}} \to \infty \text{ при } y \to +0.$$

Следовательно, условие (2.63) имеет место тогда и только тогда, когда $C_2^+ = 0$.

Таким образом, доказано, что общее решение уравнения (2.55), удовлетворяющее условиям (2.62), (2.63), имеет следующий вид:

$$Y(y) = \begin{cases} \sqrt{y}\, C_1^+, & 0 \le y \le T; \\ (-y)^{1-\alpha_j} C_2^-, & -t_* \le y \le 0. \end{cases}$$

Постоянные C_1^+ и C_1^- однозначно определяются условием Дирихле: $Y(-t_*) = d_1$, $Y(t) = d_2$.

Особые условия сопряжения возникают и в случае уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+by\frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad b=\mathrm{const}\neq 0. \tag{2.64}$$

Функция (2.23) будет решением уравнения (2.64), если $X(x)=X_j(x)$ представима в виде (2.28), а $Y=Y_j(y)$ — решение уравнения

$$y(Y''+bY')+\omega_j^2 Y=0. \tag{2.65}$$

Уравнение (2.65) относится к классу дифференциальных уравнений Лапласа [9, с. 255]. Оно заменой независимой временной переменной y по формуле $z=-by$ сводится к уравнению

$$z(w''-w')+\alpha w=0, \tag{2.66}$$

где $w(z)=Y(-z/b)$, $\alpha=\omega_j^2/b$.

Уравнение (2.66) является особым вариантом вырожденного гипергеометрического уравнения, называемого также уравнением Куммера:

$$zw''+(\gamma-z)w'+\alpha w=0$$

и получается из него в исключительном случае, когда постоянная $\gamma=0$.

Вырожденная гипергеометрическая функция второго рода

$$w(z)=G(\alpha+1,2,z)=\frac{z}{\Gamma(\alpha-1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_k z^k}{(k+1)!\,k!}\left[\frac{\Gamma'(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\Gamma'(1+k)}{\Gamma(1+k)}-\frac{\Gamma'(2+k)}{\Gamma(2+k)}+\log z\right]$$

является решением уравнения (2.66). Это заключение прямо следует из формул (9.10.9) и (9.10.6) книги [8] (см. с. 314–315).

Пусть

$$F(\alpha,\gamma,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k}\frac{z^k}{k!},\quad \gamma\neq 0,-1,-2,\dots$$

— вырожденная гипергеометрическая функция первого рода, где $(\alpha)_k=\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}$ — символ Похгаммера. Поскольку $(2)_k=\Gamma(2+k)=(k+1)!$, то

$$G(\alpha+1,2,z)=\frac{z}{\Gamma(\alpha-1)}F(\alpha+1,2,z)\log z+$$

$$+\frac{z}{\Gamma(\alpha-1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)}{(2)_k}\frac{z^k}{k!}\left[\frac{\Gamma'(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}-\frac{\Gamma'(1+k)}{k!}-\frac{\Gamma'(2+k)}{(k+1)!}\right]. \tag{2.67}$$

Функция (2.53), где $Y^j(y)=G(\omega_j^2/b,2,-by)$ — решение уравнения (2.65), является решением уравнения (2.64) и ее производная по времени y при $y\to 0$ обращается в бесконечность. Это утверждение следует из представления (2.67) и очевидного равенства $F(\alpha,\gamma;0)=1$.

В заключение отметим, что в работе [10] анонсированы некоторые результаты, связанные с уравнением вида (1.1), где производная $\partial v/\partial t$ заменена на производную $D^{\alpha}_{t_*t}v$ в смысле Римана – Лиувилля дробного порядка α с началом в момент обострения t_*.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.

2. *Курдюмов С. П., Куркина Е. С.* Тепловые структуры в среде с нелинейной теплопроводностью // Нелинейный мир. 2005. Т. 3, № 5–6.

3. *Нахушева В. А.* Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 2006. 173 с.

4. *Магомедов К. М.* Теоретические основы геотермии. М.: Наука, 2001. 277 с.

5. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.

6. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е изд., стер. С-Пб.: Лань, 2003 . 576 с.

7. *Нахушева В. А., Муртазов Б. С.* Критерии ограниченности следа производной решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе в угловых точках области его задания // Докл. Адыг. (Черкесск.) Междунар. акад. наук. 2006. Т. 8, № 2. С. 43–48.

8. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции. М.-Л.: Физматлит. 458 с.

9. *Кратцер А., Франц В.* Трансцендентные функции. М.: ИЛ, 1963. -466 с.

10. *Нахушева В. А.* Об одной математической модели теории режимов с обострением // Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения. Междунар. конф., посвященная 100-летию со дня рождения ак. И. Н. Векуа. 28 мая – 2 июля 2007 г. Тезисы докладов. Новосибирск, 2007. С. 602–603.

Нахушева Виктория Адамовна

Россия, Нальчик, НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

`niipma@mail333.com`