Неклассические уравнения математической физики
2007. С. 212–220

УДК 517.946

ОБ ОДНОМ ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ АНАЛОГЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КОШИ – РИМАНА

Б. Б. Ошоров

В работе рассматривается эллиптическая по Петровскому система уравнений первого порядка в четырехмерном пространстве. Для этой системы рассмотрена краевая задача, аналогичная задаче Римана – Гильберта с разрывными краевыми условиями для аналитической функции. Методом априорных оценок доказана однозначная разрешимость поставленной задачи в пространствах Соболева.

В данной работе рассматривается эллиптическая по Петровскому система уравнений первого порядка в четырехмерном пространстве. Для получения этой системы уравнений привлечен аппарат теории кватернионов, которые, как известно, являются обобщением понятия комплексных чисел. В связи с тем, что множество кватернионов образует тело с левым и правым делением, для кватернион-функций определяются левая и правая производная и доказываются их условия существования, которые можно назвать четырехмерными аналогами условий Коши – Римана для аналитических функций одной комплексной переменной. Предложенная система уравнений является следствием условий существования левой производной кватернион-функции, поэтому она названа четырехмерным аналогом системы уравнений Коши – Римана. Для этой системы рассмотрена краевая задача, которую, в некотором смысле, можно назвать аналогом задачи Римана – Гильберта с разрывными краевыми условиями для аналитической функции. Методом априорных оценок доказана однозначная разрешимость поставленной задачи в пространствах Соболева.

Поскольку кватернионы используются для описания произвольных вращений тел в трехмерном пространстве, то решения рассматриваемой системы уравнений можно применять для описания некоторого процесса стабилизации таких движений.

В качестве пространства, изоморфного евклидову пространству R^4 относительно сложения элементов и умножения элемента на действительное число, будем рассматривать известное пространство кватернионов [1], базисом которого служат блочные матрицы

$$E_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix},$$
$$E_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ — некоторая точка пространства R^4, то ей взаимно однозначно соответствует матрица $X = \sum\limits_{i=1}^{4} x_i E_i$, которая называется кватернионом. Если множество всех кватернионов обозначить через $\tilde{R}^4$, то между пространствами R^4 и $\tilde{R}^4$ установлен изоморфизм относительно операций сложения элементов и умножения элементов на действительное число. Если введем норму кватерниона формулой $\|X\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{4} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ и расстояние $\rho(X, Y) = \|X - Y\|$, то, во-первых, $\tilde{R}^4$– метрическое пространство и ему присущи все понятия и свойства метрических пространств, во-вторых, изоморфизм между пространствами R^4 и $\tilde{R}^4$ является изометрией.

Пусть теперь на некотором множестве $D \subseteq R^4$ определена вектор-функция $U(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x)), \quad U : D \to R^4$. Тогда множеству D взаимно однозначно соответствует множество $\tilde{D} \subseteq \tilde{R}^4$, на котором определена функция (кватернион-функция) $\tilde{U}(X) = \sum\limits_{i=1}^{4} u_i(x) E_i, \quad u : \tilde{D} \to \tilde{R}^4$, взаимно однозначно соответствующая вектор-функции $U(x)$. Для удобства в дальнейшем мы не будем делать различия в обозначениях вектор-функции и кватернион-функции.

В связи с существованием левого и правого частного кватернионов, определяем левую и правую производную кватернион-функции $U(X)$ по формулам

$$\lim_{\Delta X \to \Theta} (\Delta X \backslash \Delta U(X)) = U'_{\text{л}}(X) = dX \backslash dU(X),$$
$$\lim_{\Delta X \to \Theta} (\Delta U(X) / \Delta X) = U'_{\text{п}}(X) = dU(X)/dX.$$

Будем рассматривать только одну из них, а именно, левую. Найдем условия ее существования. Пусть в некоторой точке $X \in \tilde{R}^4$ существует левая производная $dX \backslash dU$, значит, существует $\lim\limits_{\Delta X \to \Theta} \Delta X \backslash \Delta U(X)$ при $\forall\ \Delta X \to \Theta$, в частности, при $\Delta X = \Delta x_i E_i, \quad i = \overline{1,4}$. В этом случае приращения функции будем называть традиционно частными приращениями и обозначать через $\Delta_i U$. Тогда

$$dX \backslash dU = \lim_{\Delta x_i \to 0} (\Delta x_i E_i \backslash \Delta_i U), \quad i = \overline{1,4}.$$

Из свойств кватернионов следует

$$(\Delta x_1 E_1)^{-1} = \frac{E_1}{\Delta x_1}, \quad (\Delta x_i E_i)^{-1} = \frac{-E_i}{\Delta x_i}, \quad i = \overline{2,4}.$$

Поэтому

$$dX \backslash dU = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \Delta x_1 E_1 \backslash \Delta_1 U = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_1 U}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{4} \Delta_1 u_i E_i}{\Delta x_1} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} E_i;$$

$$dX \backslash dU = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \Delta x_2 E_2 \backslash \Delta_2 U = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{-E_2 \Delta_2 U}{\Delta x_2} = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{-E_2 \sum\limits_{i=1}^{4} \Delta_2 u_i E_i}{\Delta x_2}$$
$$= -E_2 \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial u_i}{\partial x_2} E_i = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} E_1 - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} E_2 + \frac{\partial u_4}{\partial x_2} E_3 - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} E_4;$$

$$dX \backslash dU = -\,E_3 \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial u_i}{\partial x_3} E_i = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} E_1 - \frac{\partial u_4}{\partial x_3} E_2 - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} E_3 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} E_4;$$

$$dX\backslash dU = -E_4\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial u_i}{\partial x_4}E_i = \frac{\partial u_4}{\partial x_4}E_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_4}E_2 - \frac{\partial u_2}{\partial x_4}E_3 - \frac{\partial u_1}{\partial x_4}E_4.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_4}{\partial x_4}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_4}{\partial x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_4},\\ &\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \frac{\partial u_4}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_4}, \quad \frac{\partial u_4}{\partial x_1} = -\frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_4}.\end{aligned} \tag{2}$$

Обратно, пусть выполнены условия (2) и, кроме того, все частные производные $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $i, j = \overline{1, 4}$, непрерывны в точке x. Тогда $\Delta U = \sum\limits_{i=1}^{4}\Delta u_i E_i$, где согласно теореме Лагранжа и свойствам непрерывных функций

$$\begin{aligned}\Delta u_i &= u_i(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3, x_4+\Delta x_4) - u_i(x_1, x_2, x_3, x_4)\\ &= u_i(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3, x_4+\Delta x_4) - u_i(x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3, x_4+\Delta x_4)\\ &+ u_i(x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3, x_4+\Delta x_4) - u_i(x_1, x_2, x_3+\Delta x_3, x_4+\Delta x_4)\\ &+ u_i(x_1, x_2, x_3+\Delta x_3, x_4+\Delta x_4) - u_i(x_1, x_2, x_3, x_4+\Delta x_4)\\ &+ u_i(x_1, x_2, x_3, x_4+\Delta x_4) - u_i(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{j=1}^{4}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Delta x_j + o_i(\Delta x),\end{aligned}$$

$$\lim_{|\Delta x|\to 0}\frac{o_i(\Delta x)}{|\Delta x|} = 0, \quad i = \overline{1, 4}.$$

Воспользуемся условиями (2)

$$\begin{aligned}\Delta U &= \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}u_{ix_j}(x)\Delta x_j E_i + \sum_{i=1}^{4}o_i(\Delta x)E_i\\ &= (u_{1x_1}\Delta x_1 - u_{2x_1}\Delta x_2 - u_{3x_1}\Delta x_3 - u_{4x_1}\Delta x_4)E_1\\ &+ (u_{2x_1}\Delta x_1 + u_{1x_1}\Delta x_2 + u_{4x_1}\Delta x_3 - u_{3x_1}\Delta x_4)E_2\\ &+ (u_{3x_1}\Delta x_1 - u_{4x_1}\Delta x_2 + u_{1x_1}\Delta x_3 + u_{2x_1}\Delta x_4)E_3\\ &+ (u_{4x_1}\Delta x_1 + u_{3x_1}\Delta x_2 - u_{2x_1}\Delta x_3 + u_{1x_1}\Delta x_4)E_4\\ &+ \sum_{i=1}^{4}o_i(\Delta x)E_i = \Delta X\sum_{i=1}^{4}u_{ix_1}E_i + o(\Delta X),\end{aligned}$$

где $\lim\limits_{\Delta X\to\Theta}\frac{o(\Delta X)}{\|\Delta X\|} = \Theta$.

Тогда

$$\lim_{\Delta X\to\Theta}\Delta X\backslash\Delta U = \lim_{\Delta X\to\Theta}\Delta X\backslash\Delta X\sum_{i=1}^{4}u_{ix_1}E_i + \lim_{\Delta X\to\Theta}\Delta X\backslash o(\Delta X) = \sum_{i=1}^{4}u_{ix_1}E_i + \Theta,$$

т. к.

$$\lim_{\Delta X\to\Theta}\|\Delta X\backslash o(\Delta X)\| = \lim_{\Delta X\to\Theta}\left\|\frac{\overline{\Delta X}\cdot o(\Delta X)}{\|\Delta X\|^2}\right\| = \lim_{\Delta X\to\Theta}\frac{\|o(\Delta X)\|}{\|\Delta X\|} = 0.$$

Следовательно, существует левая производная

$$dX\backslash dU = \sum_{i=1}^{4}u_{ix_1}E_i.$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Для существования левой производной $dX\backslash dU$ кватернион-функции $U(X)$ в некоторой точке $X \in \tilde{R}^4$ необходимо выполнение условий (2) в соответствующей точке $x \in R^4$. Если дополнительно потребовать непрерывность частных производных в точке x, то условия (2) становятся достаточными для существования левой производной в точке X.*

Из этой теоремы следует, что условия (2) являются четырехмерными аналогами условий Коши – Римана для существования производной функции комплексной переменной.

Случай правой производной рассматривается аналогично.

Введем во множестве кватернион-функций дифференциальные операторы

$$\partial\bar{X}\backslash\partial = \tfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} E_i \tfrac{\partial}{\partial x_i}, \quad \partial X\backslash\partial = \tfrac{1}{4}\left(E_1 \tfrac{\partial}{\partial x_1} - \sum_{i=2}^{4} E_i \tfrac{\partial}{\partial x_i}\right),$$

$$\partial/\partial\bar{X} = \tfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} \tfrac{\partial}{\partial x_i} E_i, \quad \partial/\partial X = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{\partial}{\partial x_1} E_1 - \sum_{i=2}^{4} \tfrac{\partial}{\partial x_i} E_i\right).$$

Нетрудно показать, что для существования левой производной $dX\backslash dU$ в некоторой точке $X \in \tilde{R}^4$необходимо выполнение в этой точке равенства

$$\partial\bar{X}\backslash\partial U + \partial U/\partial\bar{X} + \partial U/\partial X = \Theta. \tag{3}$$

Простой заменой переменных уравнение (3) сводится к уравнению

$$\partial\overline{X}\backslash\partial U = \Theta. \tag{4}$$

Очевидно, что любой кватернион $U \equiv const$ является решением этого уравнения.

Однако, класс решений не является тривиальным. Например, решениями уравнения (4) будут кватернионы

$$U(X) = \frac{\overline{X}}{\|X\|^4}$$

или

$$\begin{aligned} V(X) = \left((x_3^2 - x_4^2)e^{x_1}\cos x_2\right)E_1 + \left((x_3^2 - x_4^2)e^{x_1}\sin x_2\right)E_2 \\ - 2x_3 e^{x_1}\cos x_2 E_3 + 2x_4 e^{x_1}\cos x_2 E_4, \end{aligned}$$

в чем можно убедиться непосредственно.

В дальнейшем нам будет удобнее вместо базиса (1) использовать найденный автором базис

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Тогда уравнение (5) эквивалентно эллиптической системе уравнений

$$T_л U \equiv \sum_{i=1}^{4} E_i U_{x_i} = 0, \tag{6}$$

где коэффициентами служат именно матрицы базиса (5). Вполне естественно называть систему уравнений (6) четырехмерным аналогом системы уравнений Коши – Римана.

Теперь рассмотрим неоднородную систему уравнений

$$LU \equiv T_л U + AU = F(x), \tag{7}$$

где $A(x)$ — квадратная матрица четвертого порядка, $F(x)$ — заданная четырехмерная вектор-функция.

В качестве области, где рассматривается эта система уравнений, возьмем слой $D = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 : 0 < x < k\,,\ x' = (x_2, x_3, x_4) \in R^3\}$, границу которого обозначим через Г.

Задача. В слое D найти решение системы уравнений (7), если заданы граничные условия

$$u_1|_{x_1=1} = u_2|_{x_1=k} = u_3\,|_\Gamma = u_4\,|_\Gamma\ = 0. \tag{8}$$

Постановка задачи (7), (8) была предложена автором в работе [2]. Здесь подробнее рассматривается вопрос о разрешимости этой задачи.

Класс вектор-функций $U(x) \in C^\infty(\bar{D}) \cap W_2^2(D)$, удовлетворяющих условиям (8), обозначаем через C_L, замыкание C_L в норме пространства $W_2^1(D)$ — через S_L.

Лемма 1. *Для $\forall U(x) \in S_L$ справедливы неравенства*

$$\|T_л U\|_0 \geq \|U_{x_1}\|_0\,, \quad \|T_л U\|\ _0 \geq c\,\|U\|\ _0, \tag{9}$$

где $c = const > 0$ зависит только от ширины слоя D.

Доказательство. Достаточно взять произвольную вектор-функцию $U(x) \in C_L$ и рассмотреть интеграл $(T_л U, U_{x_1})_0$:

$$(T_л U, U_{x_1})_0 = \sum_{i=1}^{4} (E_i U_{x_i}, U_{x_1})_0\,; \quad (E_1 U_{x_1}, U_{x_1})_0 = (U_{x_1}, U_{x_1})_0 = \|U_{x_1}\|_0^2\,.$$

Интегрированием по частям получаем

$$(U_{x_1}, E_2 U_{x_2})_0 = \int\limits_D (-u_{1x_1} u_{2x_2} + u_{2x_1} u_{1x_2} - u_{3x_1} u_{4x_2} + u_{4x_1} u_{3x_2})\, dD$$

$$= \int\limits_D (u_1 u_{2x_1x_2} - u_{2x_1x_2} u_1 + u_3 u_{4x_1x_2} - u_{4x_1x_2} u_3)\, dD - \int\limits_\Gamma (u_1 u_{2x_2} + u_3 u_{4x_2})\, n_1\, d\Gamma,$$

где $\bar{n} = (n_1, 0, 0, 0)$ — единичный вектор внешней нормали к Г.

Согласно условиям (8) интеграл по Г равен нулю, поэтому $(U_{x_1}, E_2 U_{x_2})_0 = 0$. Аналогично, $(U_{x_1}, E_3 U_{x_3})_0 = (U_{x_1}, E_4 U_{x_4})_0 = 0$. Следовательно, $(T_л U, U_{x_1})_0 = \|U_{x_1}\|_0^2$, откуда на основании неравенства Гельдера следует первая оценка (9). Затем нетрудно получить неравенство $\|U\|_0^2 \leq \frac{k^2}{2}\, \|U_{x_1}\|_0^2$, которое в результате дает вторую оценку (9).

Лемма 2. *Для* $\forall U(x) \in S_L$ *справедливо неравенство*

$$\alpha \left\| U \right\|_{\,1} \le \left\| T_{\text{л}} U \right\|_{\,0} \le \beta \left\| U \right\|_{\,1}, \quad \alpha, \beta = const > 0. \tag{10}$$

Доказательство. Опять возьмем произвольную вектор-функцию $U(x) \in C_L$ и рассмотрим интеграл $(T_{\text{л}}U, T_{\text{л}}U)_0$:

$$(T_{\text{л}}U, T_{\text{л}}U)_0 = \sum_{i=1}^{4} (E_i U_{x_i}, E_i U_{x_i})_0 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \ne j}}^{4} \left(E_i U_{x_i}, E_j U_{x_j}\right)_0;$$

$$(E_1 U_{x_1}, E_1 U_{x_1})_0 = (U_{x_1}, U_{x_1})_0 = \left\| U_{x_1} \right\|_0^2;$$

$$(E_i U_{x_i}, E_i U_{x_i})_0 = \left(E_i^T E_i U_{x_i}, U_{x_i}\right)_0 = (U_{x_i}, U_{x_i})_0 = \left\| U_{x_i} \right\|_0^2, \quad i = \overline{2,4},$$

т. к. $E_i^T = -E_i$, $E_i^2 = -E_1$. Интегрированием по частям получаем

$$(E_1 U_{x_1}, E_2 U_{x_2})_0 = \int\limits_D (-u_{1x_1} u_{2x_2} + u_{2x_1} u_{1x_2} - u_{3x_1} u_{4x_2} + u_{4x_1} u_{3x_2})\, dD =$$

$$\int\limits_D (u_1 u_{2x_1x_2} - u_{2x_1x_2} u_1 + u_3 u_{4x_1x_2} - u_{4x_1x_2} u_3)\, dD - \int\limits_\Gamma (u_1 u_{2x_2} + u_3 u_{4x_2})\, n_1\, d\Gamma,$$

где $\bar{n} = (n_1, 0, 0, 0)$ — единичный вектор внешней нормали к Γ.

Согласно условиям (8) интеграл по Γ равен нулю, поэтому $(E_1 U_{x_1}, E_2 U_{x_2})_0 = 0$. Аналогично, $(E_1 U_{x_1}, E_3 U_{x_3})_0 = (E_1 U_{x_1}, E_4 U_{x_4})_0 = 0$.

Если $i, j = 2, 3, 4$, $i \ne j$, то $\left(E_i U_{x_i}, E_j U_{x_j}\right)_0 = 0$. Например,

$$(E_2 U_{x_2}, E_3 U_{x_3})_0 = \int\limits_D (u_{2x_2} u_{3x_3} + u_{1x_2} u_{4x_3} - u_{1x_3} u_{4x_2} + u_{2x_3} u_{3x_2})\, dD$$

$$= \int\limits_D (u_2 u_{3x_2x_3} - u_1 u_{4x_2x_3} + u_1 u_{4x_2x_3} - u_2 u_{3x_2x_3})\, dD = 0.$$

Таким образом, $\left\| T_{\text{л}} U \right\|_0^2 = \sum\limits_{i=1}^{4} \left\| U_{x_i} \right\|_0^2$. А поскольку имеет место неравенство $\left\| U \right\|_0^2 \le \frac{k^2}{2} \left\| U_{x_1} \right\|_0^2$, то

$$\left\| T_{\text{л}} U \right\|_0^2 = \frac{1}{k^2} \left(\frac{k^2}{2} \left\| U_{x_1} \right\|_0^2 + \frac{k^2}{2} \left\| U_{x_1} \right\|_0^2 \right) + \sum_{i=2}^{4} \left\| U_{x_i} \right\|_0^2 \ge \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{4} \left\| U_{x_i} \right\|_0^2 + \frac{1}{k^2} \left\| U \right\|_0^2.$$

Следовательно, $\exists \alpha, \beta = const > 0$, такие, что

$$\alpha \left\| U \right\|_{\,1} \le \left\| T_{\text{л}} U \right\|_{\,0} \le \beta \left\| U \right\|_{\,1}.$$

Здесь можно положить $\alpha = \min\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{k}\right)$, $\beta = 1$. Приближая вектор-функции $U(x) \in S_L$ вектор-функциями $U_n(x) \in C_L$ в норме $\left\| \cdot \right\|_1$, предельным переходом в последнем неравенстве получаем оценку (10) для $\forall U(x) \in S_L$.

Лемма 3. *Если матрица* $A(x)$ *непрерывна в слое* $\bar{D}$ *и существует число* δ, $0 < \delta < \frac{\sqrt{2}}{k}$, *такое, что* $\left\| AU \right\|_{\,0} \le \delta \left\| U \right\|_{\,0}$, *то для* $\forall U(x) \in S_L$ *выполнено неравенство*

$$\alpha_1 \left\| U \right\|_{\,1} \le \left\| LU \right\|_{\,0} \le \beta_1 \left\| U \right\|_{\,1}, \tag{11}$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл $(LU, T_л U)_0$ при $\forall U(x) \in S_L$:

$$|(LU, T_л U)_0| = |(T_л U + AU, T_л U)_0| = \left| \|T_л U\|_0^2 + (AU, T_л U)_0 \right|$$
$$\leq \|T_л U\|_0^2 + \|T_л U\|_0 \, \|AU\|_0 \leq \|T_л U\|_0^2 + \delta \, \|T_л U\|_0 \, \|U\|_0 \leq C \, \|T_л U\|_0^2 ,$$

а с другой стороны

$$|(LU, TU)_0| \geq \|TU\|_0^2 - \delta \, \|TU\|_0 \, \|U\|_0 \geq \|TU\|_0^2 \left(1 - \delta \frac{k}{\sqrt{2}}\right) = C_1 \, \|TU\|_0^2 , \quad C_1 > 0.$$

Из последних двух неравенств на основании оценки (10) получаем неравенство (11).

Теорема 2. *Если матрица $A(x)$ удовлетворяет условия леммы 3, то для любой вектор-функции $F(x) \in L_2(D)$ задача* (7), (8) *имеет единственное решение $U(x) \in W_2^1(D)$.*

Доказательство. Пусть $L^*V \equiv T_л^* V + A^* V$ — формально сопряженный оператор, где $T_л^* V = -E_1 V_{x_1} + \sum\limits_{i=2}^{4} E_i V_{x_i}$, C_{L^*}, S_{L^*} — классы вектор-функций, удовлетворяющих сопряженным граничным условиям. Введем негативное пространство S_{-1} с нормой $\|G\|_{S_{-1}} = \sup\limits_{U \in S_1} \frac{(G,U)_0}{\|U\|_1}$. Тогда с помощью лемм 1–3, рассматривая вспомогательную задачу $T_л U = V, \quad U \in C_L, \quad \forall V \in C_{L^*}$, получаем оценку

$$\|L^* V\|_{S_{-1}} \geq \delta \, \|V\|_0 , \quad \delta = const > 0.$$

Для этого используется представление в явном виде решения системы уравнений $T_л U = V$ [3].

Далее,

$$(L^* V, U)_0 = (LU, V)_0 = (LU, T_л U)_0 \geq \delta_1 \, \|U\|_1 ,$$

откуда следует нужная оценка.

Затем, по обычной схеме

$$|(F, V)_0| \leq \|F\|_0 \, \|V\|_0 \leq c \, \|F\|_0 \, \|L^* V\|_{S_{-1}} ,$$

откуда $\exists U \in S_L : \ (F, V)_0 = (U, L^* V)_0 , \quad \forall V(x, y) \in C_{L*}$.

Таким образом, доказана разрешимость задачи в пространстве $W_2^1(D)$. Интегрируя по частям в тождестве $(F, V)_0 = (U, L^* V)_0 , \quad \forall V(x, y) \in C_{L*}$, получаем, что это решение является решением почти всюду в D, т. к. тождество выполнено на плотном в $W_2^1(D)$ множестве. В силу оценки (11) это решение единственное.

По постановке и условиям разрешимости задача (7), (8) похожа на задачи, предложенные автором в работе [4] для обобщенной системы Коши – Римана. Поэтому и с этих позиций систему уравнений (6) можно считать аналогом системы уравнений Коши – Римана.

Что касается возможных приложений, то можно сказать следующее.

Если рассмотренное выше построение алгебры кватернионов назвать ее моделью над полем действительных чисел, то можно предложить еще одно представление кватернионов, которое естественно называть моделью над полем комплексных чисел.

Пусть i – мнимая единица. Рассмотрим матрицы

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственно убеждаемся, что для этих матриц имеет место следующая таблица умножения

$$F_2^2 = F_3^2 = F_4^2 = F_1^2; \quad F_2F_3 = -F_3F_2 = iF_4;$$
$$F_3F_4 = -F_4F_3 = iF_2; \quad F_4F_2 = -F_2F_4 = iF_3.$$

Поэтому в линейном пространстве кватернионов в качестве базиса можно взять систему матриц

$$G_1 = F_1, \quad G_2 = -iF_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$
$$G_3 = -iF_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_4 = -iF_4 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Тогда любой кватернион имеет вид

$$X = x_1F_1 - i\left(x_2F_2 + x_3F_3 + x_4F_4\right), \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4,$$

а сопряженный кватернион —

$$\bar{X} = x_1F_1 + i\left(x_2F_2 + x_3F_3 + x_4F_4\right).$$

Модель над полем комплексных чисел алгебры кватернионов позволяет привести в качестве примера одно из приложений этой теории.

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве R^3 задан ортонормированный базис e_1, e_2, e_3, в котором любой вектор имеет представление $x = \sum\limits_{i=1}^{3} x_ie_i$. Любое линейное преобразование этого пространства A задается в этом базисе квадратной матрицей третьего порядка $A = (a_{ij})\,, \quad i, j = \overline{1,3}$. Договоримся, в дальнейшем не делать различий в обозначениях преобразования и матрицы, задающей это преобразование.

Ортогональное линейное преобразование A в пространстве R^3, т. е.

$$x' = Ax, \quad AA^T = A^TA = E,$$

где E — единичная матрица, называется вращением (собственным), если $\det A = 1$.

Известно [5], что каждый действительный трехмерный вектор $x = \sum\limits_{i=1}^{3} x_ie_i$ может быть представлен комплексной эрмитовой матрицей

$$H = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=2}^{4} x_iF_i,$$

где матрицы F_2, F_3, F_4, которые называются спиновыми матрицами Паули, соответствуют базисным векторам e_1, e_2, e_3. Это соответствие является изоморфизмом относительно сложения векторов и умножения векторов на действительные числа.

Тогда вектор вращения $x' = Ax$ представляется матрицей

$$H' = \sum_{i=2}^{4} x'_iF_i = UH\bar{U},$$

где U — комплексная унимодулярная ($\det U = 1$) матрица:

$$U = \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix}, \quad \bar{U} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a = a_1 + ia_2, \quad b = b_1 + ib_2, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Числа a и b определяют вращение однозначно. При этом числа $a, b, -\bar{b}, \bar{a}$ называются параметрами Кэли – Клейна данного вращения.

Любая комплексная матрица размером 2×2 мажет быть представлена кватернионом $X = x_1F_1 - i\,(x_2F_2 + x_3F_3 + x_4F_4)$. В частности,

$$U = a_1F_1 - i\,(b_2F_2 + b_1F_3 + a_2F_4)\,, \quad \bar{U} = a_1F_1 + i\,(b_2F_2 + b_1F_3 + a_2F_4)\,.$$

Матрица U определяет вращение однозначно. Таким образом, получено представление вращений кватернионами, которые можно называть кватернионами вращения.

При вращении положение каждой точки тела определяется тремя пространственными координатами, а также временем с некоторого начала отсчета. Поэтому эти точки являются четырехмерными векторами, которым соответствует пространство кватернионов. Тогда кватернионы вращения U являются функциями от переменных кватернионов. Отсюда следует, что решения системы уравнений (6), возможно, описывают некоторое стабилизированное состояние этого процесса, и поэтому исследования, в представленной статье, также смогут найти приложения в этой области.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1975. 400 с.

2. *Ошоров Б. Б.* О некоторых модельных эллиптических системах уравнений в четырехмерном пространстве // Вестн. НГУ. Сер. мат., мех., инф. 2003. Т. 3, вып. 3. С. 91–98.

3. *Янушаускас А. И.* Многомерные эллиптические системы с переменными коэффициентами. Вильнюс: Мокслас, 1990. 180 с.

4. *Ошоров Б. Б.* Краевые задачи для некоторых модельных систем уравнений в частных производных. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2002. (Препринт / НГУ).

5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 831 с.

Ошоров Батор Батуевич
Россия, Улан-Удэ, Восточно-Сибирский государственный технологический университет
office@esstu.ru